ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

В. ТУЧКЕ

РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ КОМПЛЕКСНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ОБЛАДАЮЩИЕ ЗАДАННЫМИ РАЗРЫВАМИ ВДОЛЬ ЗАДАННОЙ КРИВОЙ

С помощью криволинейного интеграла типа Коши можно, как известно, определить голоморфную функцию, обладающую заданным разрывом вдоль пути интегрирования γ (см. Н. И. Мусхелишвили [5]). В этой статье строится во всей плоскости некоторое решение $w=(w_1,\cdots, w_m)$ системы

$$\frac{\partial w_j}{\partial z^*}=f_j\,(z,\ w_1,\cdots,\ w_m),\ j=1,\cdots,m, \tag{1}$$

имеющее заданные разрывы вдоль γ.

Во всей плоскости E заданная функция g, удовлетворяющая условию ($\zeta=\xi+i\eta$)

$$\|g\|_{p,\,2}=\left(\iint\limits_{|\zeta|<1}|g\,(\zeta)|^p\,d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\iint\limits_{|\zeta|<1}\left|g\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|^p\frac{1}{|\zeta|^{2p}}\,d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

принадлежит пространству $\mathbf{L}_{p,\,2}(E)$ (см. И. Н. Векуа [1], Р. П. Гильберт [2]).

Правые части f_j системы (1) предполагаются непрерывными. Предполагается далее, что правые части допускают оценку

$$|f_j\,(z,\ w_1,\cdots,\ w_m)|\leqslant K\,(r),$$

зависящую только от $|z|=r$, причем

$$K\in\mathbf{L}_{p,\,2}(E),\ p>2.$$

Аналогично, требуется, чтобы постоянная Липшица $\mathbf{L}=L\,(r)$,

$$|f_j\,(z,\ w_1,\cdots,\ w_m)-f_j\,(z,\ \tilde{w}_1,\ \cdots,\ \tilde{w}_m)|\leqslant L\,(r)\sum_{j=1}^{m}|w_j-\tilde{w}_j|,$$

зависящая также от $|z|=r$, принадлежала пространству $\mathbf{L}_{p,\,2}(E)$, $p>2$.

Вне γ ищется непрерывное решение $w=(w_1,\cdots,w_m)$ системы (1), обладающее заданным разрывом $(d_1,\cdots,d_m)$ вдоль γ. Пусть $(D_1,\cdots,D_m)$ — соответствующая голоморфная функция вне γ, осуществляющая тот же разрыв $(d_1,\cdots,d_m)$ вдоль γ.

Определенная во всей плоскости функция, значения которой равняются интегралу

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f_j(\zeta, w_1(\zeta), \cdots, w_m(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta,$$

зависящему от z, обозначается через $T_E f_j$. Применяя теорему 1.23 из книги [1] И. Н. Векуа, из предположения $K \in \mathbf{L}_{p,\,2}(E)$, $p > 2$, вытекает оценка ($\rho = |\zeta|$)

$$|(T_E f_j)[z]| \leqslant \frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{K(\rho)}{|\zeta - z|} d\xi d\eta \leqslant M(p) \|K\|_{p,\,2}, \tag{2}$$

причем $M(p)$ является постоянной, зависящей только от p.

Пусть w — данное решение. Очевидно функции

$$w_j - D_j - T_E f_j = \Phi_j \tag{3}$$

являются вне γ, следовательно, почти всюду, голоморфными. С другой стороны, $T_E f_j$ и $w_j - D_j$ непрерывны во всей плоскости (предполагается, что все w_j обладают непрерывными граничными значениями на γ извне и изнутри), следовательно функции Φ_j оказываются непрерывными и следовательно также голоморфными во всей плоскости. Наоборот, каждое решение $(w_1, \cdots, w_m)$ интегральных уравнений (3) при заданных целых функциях Φ_j является решением системы (1), обладающим теми же разрывами как $(D_1, \cdots, D_m)$. Таким образом, системы (1) и (3) (при удобном выборе функций Φ_j) допускают одни и те же решения. Далее, каждое решение w имеет представление

$$w_j = \Phi_j + D_j + w_{0j}, \tag{4}$$

причем Φ_j являются целыми, а w_{0j} непрерывными и (в силу (2)) ограниченными функциями во всей плоскости. При заданных Φ_j решения системы (1) можно, следовательно, искать в пространстве R всех таких w.

В силу (4) имеется взаимно-однозначное отображение между R и пространством R_0 всех $w_0 = (w_{01}, \cdots, w_{0m})$. Пространство R будет пространством типа Банаха, если определить норму* элемента w через

$$\|w_0\| = \max_j \sup_E |w_{0j}|$$

и если, кроме того, определить

$$\lambda w + \bar{\lambda}\,\tilde{w} = (\Phi_1 + D_1 + \lambda w_{01} + \bar{\lambda}\,\tilde{w}_{01}, \cdots, \Phi_m + D_m + \lambda w_{0m} + \bar{\lambda}\,\tilde{w}_{0m})$$

(причем $\bar{w}_j = \Phi_j D_j + \bar{w}_{0j}$). Если оператор T определяется через $w = Tw$, причем

---

* Аналогичное определение нормы использовалось в работе [10] при доказательстве существования решений, обладающих заданной главной частью.

$$W_j(z) = D_j(z) + \Phi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f_j(\zeta, w_1(\rho), \cdots, w_m(\rho))}{\zeta - z}\, d\xi d\eta,$$

то T отображает пространство R в себя. Ввиду

$$w_j - \tilde{w}_j = w_{0j} - \tilde{w}_{0j}$$

из условия Липшица следует $(\tilde{W} = T\tilde{w},\ \rho = |\zeta|)$, что

$$|W_j(z) - \tilde{W}_j(z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\, m \cdot \max_j \sup_E |w_{0j} - \tilde{w}_{0j}| \cdot \iint\limits_E \frac{L(\rho)}{|\zeta - z|}\, d\xi d\eta.$$

Учитывая предположение $L \in \mathbf{L}_{p,2}(E)$ и оценку, соответствующую правой части неравенства (2), получаем, что

$$d(W, \tilde{W}) \leqslant m\, M(p)\, \|L\|_{p,2}\, d(w, \tilde{w}),$$

причем $d(w, \tilde{w}) = d(w_0, \tilde{w}_0) = \|w_0 - \tilde{w}_0\|$. Из этого неравенства непосредственно следует непрерывность оператора T. В предположении

$$\|L\|_{p,2} < \frac{1}{mM(p)} \tag{5}$$

оператор T далее оказывается оператором сжатия. В этом случае существует (по теореме Банаха) неподвижная точка, являющаяся вне γ решением системы (1). Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Если норма постоянной Липшица удовлетворяет условию* (5), *то существует решение системы* (1) *с заданными разрывами вдоль* γ, *одновременно удовлетворяющее интегральному уравнению* (3). *При этом функции* Φ_j — *произвольные целые функции**.

В силу уравнения (3) имеется взаимно однозначное отображение Λ между решениями w и векторами $\Phi = (\Phi_1, \cdots, \Phi_m)$, состоящими из целых функций Φ_j.

Пусть M — произвольное компактное множество плоскости z и $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Тогда число r_0 выбирается настолько большим, чтобы

а) $M \subset \{\zeta: |\zeta| \leqslant r_0\}$,

б) $\displaystyle\iint\limits_{|\zeta| > r_0} \frac{K(\rho)}{|\zeta - z|}\, d\xi d\eta < \frac{\pi}{4}\,(1 - mM(p)\,\|L\|_{p,2})\,\varepsilon$

для всех точек z (в силу $K \in \mathbf{L}_{p,2}(E)$ такой выбор числа r_0 возможен).

* Х. Меден в своей работе [4] доказал существование решений (без особенностей) с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. С помощью этой теоремы получается теорема существования без каких-либо ограничений для постоянной Липшица (или для меры рассматриваемой области). Таким образом, можно также доказать существование решений, обладающих заданными разрывами.

Пусть теперь $\{\Phi^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ — некоторая локально равномерно сходящаяся последовательность векторов, образованная из целых функций. Функциям $\Phi^{(k)}$ в силу (3) соответствуют решения, обозначаемые через $w^{(k)}$. В силу условия Липшица из (3) следует, что

$$|w_j^{(k)}(z)-w_j^{(l)}(z)|\leqslant|\Phi_j^{(k)}(z)-\Phi_j^{(l)}(z)|+$$

$$+\frac{1}{\pi}\,m\cdot\max_j\sup_{|\zeta|<r_0}|w_j^{(k)}-w_j^{(l)}|\cdot\iint\limits_{|\zeta|<r_0}\frac{L(\rho)}{|\zeta-z|}\,d\xi d\eta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|>r_0}\frac{K(\rho)}{|\xi-z|}\,d\xi d\eta.$$

Применяя вторую часть неравенства (2) в случае функции $L=L(\rho)$ и соотношение б), в силу последнего неравенства получается, что

$$\max_j\sup_{|z|<r_0}|w_j^{(k)}-w_j^{(l)}|\leqslant$$

$$\leqslant(1-mM(p)\,\|L\|_{p,2})^{-1}\max_j\sup_{|z|<r_0}|\Phi_j^{(k)}-\Phi_j^{(l)}|+\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Ввиду локальной равномерной сходимости функций $\Phi_j^{(k)}$ найдется число K_0 такое, что первое слагаемое в правой части последнего неравенства будет меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, если $k,\ l\geqslant k_0$. Это значит, что последовательность $\{w^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ на множестве $\{z\colon |z|\leqslant r_0\}$ и следовательно на множестве M равномерно сходится.

Аналогично из предполагаемой локальной равномерной сходимости последовательности $\{w^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ следует локальная равномерная сходимость соответствующей последовательности $\{\Phi^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Взаимно однозначное отображение Λ между целыми функциями Φ и решениями w является топологическим отображением в смысле топологии локальной равномерной сходимости*.*

Секция математики университета
им. Мартина Лютера (Халле, ГДР)

Поступила 30.IV.1975

Վ. ՏՈՒՉԿԵ. Տված կորի վրա որոշակի խզումներ ունեցող կոմպլեքս մասնական ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում է տված կորի վրա որոշակի խզումներ ունեցող կոմպլեքս մասնական ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների գոյության հարցը։

* В. Хепнер в работе [3] рассматривал эту топологию для решений системы Бельтрами в C^n.

Կառուցվում է բոլոր հնարավոր լուծումների բազմությունը։ Ապացույցի հիմքն է հանդիսանում Բանախի թեորեմն անշարժ կետի վերաբերյալ։

V. TOUCHKE. *Solutions of nonlinear differential equations with partial complex derivatives possessing prescribed discontinuities along given curves* (summary)

The questions of existence are considered and the set of all possible solution is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.
2. *R. P. Gilbert.* Constructive Methods for Elliptic Equations. Lectures Notes in Mathematics, 365, Springer—Verlag, Berlin (Heidelberg), New York, 1974.
3. *W. Höppner.* Uber globale Losungen von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen in mehreren komplexen Variablen, Dissertationsschrift, Halle, 1974.
4. *H. Meden.* Über die eindeutige Bestimmtheit von Losungen partieller komplexer Differentialgleichungen, Math. Nachr (в печати).
5. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, Изд. второе, Физматгиз, М., 1962.
6. *F. Naas.* Beitväge zur komplexen Analysis und deren Anwendungen in der Differential geometric, Akademieverlag, Berlin, 1974 (сборник статей).
7. *W. Tutschke.* Über Fixpunktmethoden in der Theorie partieller komplexer Differentialgleichungssysteme (работа содержится в сборнике [6]).
8. *W Tutschke.* Uber die Umwandlung (auch nichtlinearer) partieller komplexer Differentialgleichungssysteme mit mehreren komplexen Variablen in Integro-Differentialgleichungssysteme und deren Losung durchfunktionalanalytische methoden, Math. Nachr., 58, 1973, 87—136.
9. *W. Tutschke.* Topologische Abschätzungsmethoden für Losungen partieller komplexer Differentialgleichungen, Math. Nachr., 63, 1974, 89—95.
10. *W. Tutschke.* Losungen partieller komplexer Differentialgleichungen in mehreren, komplexen Variablen mit vorgeschriebenem Hauptteit, Math. Nachr., 61, 1974, 271—277.