

Г. Б. МАРАНДЖЯН

с-СТЕПЕНИ МНОЖЕСТВ МИНИМАЛЬНЫХ
ИНДЕКСОВ АЛГОРИФМОВ

Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}$ — произвольная допустимая нумерация [1] всех одноместных частично рекурсивных функций. Введем в рассмотрение множество M_Φ минимальных индексов алгорифмов следующим образом:

$$M_\Phi = \{i \mid \forall j (\varphi_i = \varphi_j \rightarrow i \leq j)\}.$$

Как доказал А. Мейер в работе [2], степень неразрешимости множества M_Φ по Тьюрингу равна O'' . В то же время, как доказал П. Янг [2], существуют такие допустимые нумерации Ψ и Ξ , что $M_\Psi <_1 M_\Xi$. Вопрос о том, попадают ли M_Φ для различных допустимых нумераций Ψ в один и тот же класс по m -сводимости, или сводимости таблицами истинности, был поставлен А. Мейером [2].

Для частного случая, требующего, чтобы m -сводящая функция была также транслятором, ранее был получен отрицательный ответ [3].

Целью настоящей работы является доказательство теоремы, из которой, в частности, следует отрицательный ответ на вопрос А. Мейера об m -эквивалентности множеств минимальных индексов алгорифмов в допустимых нумерациях.

Определение (см. [4]). Будем говорить, что множество A c -сводится к множеству B (обозначение $A \leq_c B$), если существует такая общерекурсивная функция f , что

$$\forall x (x \in A \leftrightarrow D_{f(x)} \subset B),$$

где D — каноническая нумерация конечных множеств.

Естественным образом вводится понятие c -степени неразрешимости.

Теорема. *Существуют такие допустимые нумерации Ψ и Ξ частично рекурсивных функций, что M_Ψ и M_Ξ находятся в несравнимых c -степенях неразрешимости.*

Доказательство. Зафиксируем такую допустимую нумерацию $\Phi = \{\varphi_i\}$ одноместных частично рекурсивных функций, что φ_0 — нигде не определенная функция. Пусть D — каноническая нумерация конечных множеств, построенная как в [4]. Через $(n)_i$ будем обозначать i -й по возрастанию элемент множества D_n , если же $D_n = \emptyset$ или i превышает количество элементов в D_n , то значение $(n)_i$ полагаем неопределенным.

Согласно $s - m - n$ теореме С. К. Клини можно построить такую общерекурсивную функцию (ОРФ) γ , что

$$\varphi_{\gamma(t)} \simeq \varphi_x((\varphi_y(z))_t).$$

$\gamma(x, y, z)$

Без ограничения общности будем полагать, что γ строго монотонна по всем трем аргументам.

Используя теорему 1 из [5], строим такую строго монотонную ОРФ α , чтобы для всех x имело место соотношение

$$\forall t (!\varphi_x(t) \rightarrow \varphi_x(t) \in M_\Phi) \rightarrow \forall t (!\varphi_x(t) \rightarrow \varphi_x(t) < \alpha(x)).$$

Введем ОРФ α_1 следующим образом:

$$\alpha_1(x, y, z) = \max_{t < z} \alpha(\gamma(x, y, t)).$$

Легко видеть, что α_1 строго монотонна и

$$\forall x \forall y \forall z (\forall t (\varphi_x((\varphi_y(z))_t) \in M_\Phi) \rightarrow \forall t (\varphi_x((\varphi_y(z))_t) < \alpha_1(x, y, z))). \quad (1)$$

Обычным образом строим ОРФ δ так, чтобы она была строго монотонна по всем аргументам и $\varphi_\delta(x, y, z)$ перечисляла множество $\varphi_x(\varphi_y^{-1}(z))$.

Определим теперь ОРФ α_2 следующим образом:

$$\alpha_2(x, y, z) = \max_{t < z} \alpha(\delta(x, y, t)).$$

Функция α_2 обладает, как нетрудно убедиться, следующим свойством:

$$\forall x \forall y \forall z (\varphi_x(\varphi_y^{-1}(z)) \subseteq M_\Phi \rightarrow \varphi_x(\varphi_y^{-1}(z)) \subseteq [0, \alpha_2(x, y, z)]). \quad (2)$$

Поскольку нумерация Φ выбрана допустимой, то для нее, очевидно, существует такая ОРФ β , что при любом n

$$[n + 1, \beta(n)] \cap M_\Phi \neq \emptyset \quad (3)$$

и $\beta(n) - (n + 1)$ строго монотонно возрастает. Заметим, что конструктивно найти пересечение (3), вообще говоря, невозможно в силу теоремы 2 из [5].

Если τ — некоторая ЧРФ, то через $\lceil \tau \rceil$ будем обозначать номер ее задания в Φ каким-либо стандартным образом (например, трансляцией из какой-либо удобной „термальной“ нумерации).

В дальнейшем вместо $\tau(x, y)$ будем при фиксации x писать $\tau_x(y)$.

Используя теорему о рекурсии, определим ОРФ $\theta, \omega, \bar{\omega}, \tau, \bar{\tau}, \rho$ и ε таким образом, чтобы выполнялись следующие определяющие соотношения

$$\theta(0) = \rho(0) = \varepsilon(0) = 0;$$

$$\tau(0, x) = \bar{\tau}(0, x) = \omega(0, x) = \bar{\omega}(0, x) = x;$$

$$\rho(2n + 1) = \alpha_2(\lceil \tau_{2n}^1 \rceil, n, 2^{\bar{\omega}(2n, \theta(2n)) + 1});$$

$$\rho(2n + 2) = \alpha_2(\lceil \bar{\tau}_{2n+1}^1 \rceil, n, 2^{\omega(2n+1, \theta(2n+1)) + 1});$$

$$\varepsilon(x) = \beta(\rho(x));$$

$$\tau(2n + 1, x) = \tau(2n, x);$$

$$\tau(2n+2, x) = \begin{cases} \tau(2n+1, x), & \text{если } x \leq \omega(2n+1, \theta(2n+1)); \\ \left\lfloor \frac{x - \omega(2n+1, \theta(2n+1))}{\varepsilon(2n+2) - \rho(2n+2) + 1} \right\rfloor + \theta(2n+1) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ — наименьшее целое число, не меньшее $\frac{a}{b}$;

$$\bar{\tau}(2n+2, x) = \bar{\tau}(2n+1, x);$$

$$\bar{\tau}(2n+1, x) = \begin{cases} \bar{\tau}(2n, x), & \text{если } x \leq \bar{\omega}(2n, \bar{\theta}(2n)); \\ \left\lfloor \frac{x - \bar{\omega}(2n, \bar{\theta}(2n))}{\bar{\varepsilon}(2n+1) - \bar{\theta}(2n+1) + 1} \right\rfloor + \bar{\theta}(2n) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\omega(2n+1, x) = \omega(2n, x);$$

$$\omega(2n+2, x) = \begin{cases} \omega(2n+1, x), & \text{если } x \leq \theta(2n+1); \\ (x - \theta(2n+1))(\varepsilon(2n+2) - \rho(2n+2) + 1) + \omega(2n+1, \theta(2n+1)) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\bar{\omega}(2n+2, x) = \bar{\omega}(2n+1, x);$$

$$\bar{\omega}(2n+1, x) = \begin{cases} \bar{\omega}(2n, x), & \text{если } x \leq \bar{\theta}(2n); \\ (x - \bar{\theta}(2n))(\bar{\varepsilon}(2n+1) - \bar{\rho}(2n+1) + 1) + \bar{\omega}(2n, \bar{\theta}(2n)) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\theta(2n+1) = \alpha_1(\bar{\tau}_{2n+1}^1, n, \omega(2n+1, \varepsilon(2n+1)));$$

$$\bar{\theta}(2n+2) = \alpha_1(\bar{\tau}_{2n+2}^1, n, \bar{\omega}(2n+2, \bar{\varepsilon}(2n+2))).$$

Заметим, что, по построению, функции ω и $\bar{\omega}$ неубывающие по обоим аргументам (в частности, по второму аргументу — строго возрастающие). Используя это обстоятельство, можно доказать, что при любых x, y, z имеем

$$\omega(x, y) < z \leq \omega(x, y+1) \rightarrow \tau(x, z) = y+1; \quad (4)$$

аналогичное свойство имеет место при замене в (4) ω на $\bar{\omega}$ и τ на $\bar{\tau}$.

Доказательство нетрудно провести индукцией по x .

Определим теперь нумерацию Ψ следующим образом.

I. Положим $\psi_0(x) \simeq \varphi_0(x)$.

II. Для $m > 0$ вычисление функции ψ_m производим следующим образом.

1) Проверяем, существует ли такое число k_m , что $m := \omega(2m+2, k_m)$. Если для данного m такое число k_m существует, то полагаем

$$\psi_m(x) \simeq \varphi_{k_m}(x).$$

Заметим, что вопрос о существовании такого k_m разрешим, так как по второму аргументу функция ω строго возрастающая.

Если же выясняется, что такого k_m не существует, то переходим к пункту 2).

2) Проверяем, существует ли такое число n , что выполнено условие

$$\omega(2n+2, \theta(2n+1)) < m < \omega(2n+2, \theta(2n+2)). \quad (5)$$

Поскольку это условие рекурсивно, то вопрос о существовании такого n разрешим.

Если указанное n существует, то ищем наименьшее t такое, что

$$\omega(2n+2, t-1) < m < \omega(2n+2, t). \quad (6)$$

Очевидно, что при сделанных предположениях t определится однозначным образом.

После этого начинаем одновременно вычислять $\varphi_n(z)$ для всех z таких, что

$$\omega(2n+2, \rho(2n+2)) < z \leq \omega(2n+2, \varepsilon(2n+2)) \ \& \ \exists y (z = \omega(2n+2, y)). \quad (7)$$

Если все вычисления завершаются, то из множества полученных значений $\varphi_n(z)$ отбрасываем те, для которых существует такое $r < \theta(2n+2)$, что

$$D_{\varphi_n(z)} \cap [\omega(2n+2, r) + 1, \omega(2n+2, r+1)] \quad (8)$$

содержит более одного элемента.

Множество оставшихся чисел вида $(\varphi_n(z))_i$ обозначим через R_{2n+2} . Если $m \in R_{2n+2}$, то положим

$$\psi_m(x) \simeq \varphi_t(x),$$

где t выбрано согласно условию (6).

Во всех случаях, не оговоренных выше, функция ψ_m нигде не определена. На этом завершается построение нумерации Ψ . Аналогичным образом строится нумерация Ξ с тем отличием, что в построении надо заменить ψ на ξ , $2n+2$ на $2n+1$, и поменять местами ω и $\bar{\omega}$.

Докажем теперь, что нумерация Ψ допустимая (доказательство для Ξ аналогично).

Во-первых, отметим, что Ψ вычислима. Покажем, что Φ 1-сводится к Ψ функцией $\omega(x, x)$.

Заметим сначала, что функция ω построена таким образом, что при любом $n > 0$, если

$$x \in [\theta(n) + 1, \theta(n+1)],$$

то для всех $k \geq n+1$ будем иметь

$$\omega(k, x) = \omega(n+1, x). \quad (9)$$

Согласно выбору отрезка, в котором находится x , и построению функций θ , ε и ρ , имеем

$$x > \theta(n) > \varepsilon(n) > \rho(n) > 2^n > n+1. \quad (10)$$

Следовательно, из (9), (10) и свойства монотонности ω получим

$$\omega(2\omega(n+1, x) + 2, x) = \omega(n+1, x) \quad (10')$$

и

$$\omega(n+1, x) = \omega(x, x). \quad (11)$$

Согласно пункту 1) построения нумерации Ψ из (10') следует

$$\psi_{\omega(2n+1, x)}(z) \simeq \varphi_x(z),$$

следовательно, используя (11), получим

$$\psi_{\omega(x, x)}(z) \simeq \varphi_x(z)$$

для выбранных $n > 0$ и произвольного x из отрезка $[\theta(n)+1, \theta(n+1)]$. Поскольку всякое $x > 0$ принадлежит некоторому отрезку упомянутого вида, и $\omega(0, 0) = 0$ по определению, а $\psi_0 = \varphi_0$ по построению Ψ , то тем самым $\psi_{\omega(0, 0)} = \varphi_0$, чем и завершается доказательство того, что $\lambda_x[\omega(x, x)]$ 1-сводит Φ к Ψ .

Замечание. Как можно видеть из построения нумерации Ψ и доказательства ее допустимости, функция, имеющая номер $x+1$ в нумерации Φ получает (благодаря именно этому номеру $x+1$) в нумерации Ψ номер $\omega(x+1, x+1)$ и, быть может, еще несколько номеров, но обязательно лежащих в отрезке $[\omega(x+1, x), \omega(x+1, x+1)]$. Таким образом, если $x+1 \in M_\Phi$, то

$$[\omega(x+1, x) + 1, \omega(x+1, x+1)] \cap M_\Psi \neq \emptyset \quad (12)$$

и, аналогично

$$[\bar{\omega}(x+1, x) + 1, \bar{\omega}(x+1, x+1)] \cap M_{\bar{\varepsilon}} \neq \emptyset, \quad (13)$$

хотя указать элемент в пересечении алгоритмически, вообще говоря, невозможно в силу теоремы 2 из [5]. Нетрудно также заметить, что для всех n, x, p имеем

$$x \in [\tilde{\omega}(n, p) + 1, \tilde{\omega}(n, p+1)] \cap M_{\bar{\varepsilon}} \rightarrow \tilde{\tau}_n(x) \in M_\Phi \quad (14)$$

(а также аналогичное свойство с заменой $\bar{\varepsilon}$ на Ψ , $\bar{\omega}$ на ω и $\tilde{\tau}$ на τ).

Нетрудно заметить также, что можно кусочным заданием построить такие обще рекурсивные функции T и $\bar{T}$, что для любых m и x

$$x \in [0, \omega(m, \theta(m+1))] \rightarrow T(x) = \tau_m(x), \quad (15)$$

$$x \in [0, \bar{\omega}(m, \theta(m+1))] \rightarrow \bar{T}(x) = \bar{\tau}_m(x).$$

Очевидно, что функция $T(\bar{T})$ переводит всякий минимальный номер из $\Psi(\Xi)$ в минимальный номер той же функции в Φ .

Докажем теперь, что M_Ξ не может быть с-сведено к M_Φ . Обозначим через t и $\bar{t}$ какие-либо номера функций T и $\bar{T}$ соответственно в нумерации Φ . Допустим, что множество M_Ξ с-сводится к M_Φ функцией φ_n , где без ограничения общности можно считать, что числа τ_{2n+1} и $\bar{\tau}_{2n+1}$ превышают $\max(t, \bar{t})$. (Заметим, что поскольку функции $\tau_m, \bar{\tau}_m$ отличаются от $\tau_k, \bar{\tau}_k$ при $m \neq k$, то это требование легко выполняется).

В силу выбора функции β и затем построения ε , имеем

$$[\rho(2n+2)+1, \varepsilon(2n+2)] \cap M_\Phi \neq \emptyset.$$

Отсюда, учитывая то, что

$$\theta(2n+2) > \varepsilon(2n+2) > \rho(2n+2), \quad (16)$$

а также свойства (9) и (13) вместе с условиями связанного с ними контекста, можем заключить, что

$$[\omega(2n+2, \rho(2n+2))+1, \omega(2n+2, \varepsilon(2n+2))] \cap M_\Xi \neq \emptyset. \quad (17)$$

Пусть число a принадлежит этому пересечению. Поскольку $a \in M_\Xi$, то, согласно предположению о том, что φ_n с-сводит M_Ξ к M_Φ , $D_{\varphi_n(a)} \neq \emptyset$ и $D_{\varphi_n(a)} \subseteq M_\Phi$. Докажем сначала, что среди элементов списка $D_{\varphi_n(a)}$ должны существовать такие, которые превышают $\omega(2n+2, \theta(2n+1))$. В самом деле, если для всех i , для которых определено $(\varphi_n(a))_i$, мы имели бы

$$(\varphi_n(a))_i \leq \omega(2n+2, \theta(2n+1)),$$

то тогда

$$\varphi_n(a) < 2^{\omega(2n+2, \theta(2n+1)) + 1},$$

откуда следует, по строгой монотонности функции α_2 ,

$$\rho(2n+2) > \alpha_2(\tau_{2n+1}, n, \varphi_n(a)). \quad (18)$$

Согласно выбору числа a , из (15) и (16) можем заключить

$$\varepsilon(2n+2) \geq \bar{T}(a) \geq \rho(2n+2),$$

откуда, используя (18), получим

$$\bar{T}(a) > \alpha_2(\bar{\tau}_{2n+1}, n, \varphi_n(a)), \quad (19)$$

а поскольку $\bar{t} < \bar{\tau}_{2n+1}$, то в силу монотонности функции α_2 , из (19) следует

$$\bar{T}_i^*(a) > a_2(t, n, \varphi_n(a)). \quad (20)$$

Очевидно, что $\bar{T}(\varphi_n^{-1}(\varphi_n(a))) \subset M_+$, следовательно, по (2)

$$\bar{T}(\varphi_n^{-1}(\varphi_n(a))) \subseteq [0, a_2(t, n, \varphi_n(a))],$$

чему противоречит (20), так как, очевидно, $a \in \varphi_n^{-1}(\varphi_n(a))$.

Следовательно, среди элементов $D_{\varphi_n(a)}$ должны существовать такие, которые превосходят число $\omega(2n+2, \theta(2n+1))$. Пусть i_0 таково, что

$$(\varphi_n(a))_{i_0} > \omega(2n+2, \theta(2n+1)). \quad (21)$$

Докажем теперь, что для всех j , для которых определено значение $(\varphi_n(a))_j$, это значение не превосходит $\omega(2n+2, \theta(2n+2))$. Пусть, напротив, это неверно. Тогда функция $j \rightarrow (\varphi_n(a))_j$, перечисляя (в силу выбора числа a и функции φ_n) некоторое подмножество из M_+ , при некотором j_0 превзойдет $\omega(2n+2, \theta(2n+2))$, а тогда по (4)

$$T((\varphi_n(a))_{i_0}) > \theta(2n+2) \geq a_1(\tau_{2n+2}^{-1}, n, a) > a_1(t, n, a),$$

что невозможно в силу (1), следовательно, для всех j , для которых определено $(\varphi_n(a))_j$, имеем

$$(\varphi_n(a))_j \leq \omega(2n+2, \theta(2n+2)), \quad (22)$$

Из (21) и (22) следует

$$\omega(2n+2, \theta(2n+1)) < (\varphi_n(a))_{i_0} \leq \omega(2n+2, \theta(2n+2)). \quad (23)$$

Поскольку φ_n , по предположению, с-сводит M_Σ к M_+ , то условие (8) для нее при $z = a$, очевидно, не может иметь места, так как в этом случае оказалось бы, что одновременно более одного номера одной и той же функции являются минимальными в нумерации Ψ .

Следовательно, значение $\varphi_n(a)$ не отбрасывается, а тогда на месте $(\varphi_n(a))_{i_0}$, согласно процедуре построения Ψ ,

1) будет помещена пустая функция, если $(\varphi_n(a))_{i_0}$ не представимо в виде $\omega(2n+2, u)$, или

2) в случае, если $(\varphi_n(a))_{i_0}$ равно при некотором u числу $\omega(2n+2, u)$, то на место $(\varphi_n(a))_{i_0}$ помещается некоторая функция φ_n , для которой этот номер не минимален, так как в отрезок $[\omega(2n+2, u-1)+1, \omega(2n+2, u)]$ не может попасть более одного элемента из R_{2n+2} , принадлежащего R_{2n+2} благодаря какому-либо одному значению переменной z из отрезка

$$[\omega(2n+2, \rho(2n+2))+1, \omega(2n+2, \varepsilon(2n+2))].$$

Поскольку множество таких z содержит не более чем $\varepsilon(2n+2) - \rho(2n+2)$ чисел, а отрезок

$$[\omega(2n+2, u-1)+1, \omega(2n+2, u)] \quad (24)$$

содержит более чем $\varepsilon(2n+2) - \rho(2n+2)$ элементов (так как $u > \theta(2n+1)$), то в отрезке (24) останутся числа, не принадлежащие

R_{2n+2} , а тогда на этих местах будет помещена функция φ_u , так что $(2n+2, u)$ не будет минимальным номером. Таким образом, $D_{\varphi_n(a)}$ в любом случае не может быть подмножеством M_Ψ , что и опровергает предположение, сделанное относительно функции φ_n . Аналогичным образом доказываем, что M_Ψ не с-сводится к M_Ξ . Теорема доказана.

Поскольку m -сводимость является частным случаем c -сводимости, то из доказанной теоремы непосредственно следует отрицательный ответ на вопрос А. Мейера о m -эквивалентности множеств минимальных номеров функций в допустимых нумерациях. Вопрос о tt -эквивалентности остается открытым. Естественным образом возникают вопросы, касающиеся btt -, q - и p -степеней этих множеств.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Поступила 25.XII.1975

Հ. Բ. ՄԱՐԱՆԺՅԱՆ. Ալգորիթմների նվազագույն համարների բազմությունների c -աստիճանների մասին (ամփոփում)

Դիցուք $\Phi = \{\varphi_i\}$ մասնակի ռեկուրսիվ ֆունկցիաների ըստ Հ. Ռոջերսի թույլատրելի համարակալում է: Նշանակենք M_Φ նշանով $\{i | \forall j (\varphi_i = \varphi_j \supset i \leq j)\}$ բազմությունը:

Հողվածում ապացուցված է, որ գոյություն ունեն այնպիսի թույլատրելի Ψ և Ξ համարակալումներ, որ M_Ψ և M_Ξ բազմությունները անհամեմատելի են c -հանգեցման նկատմամբ:

Այս թեորեմից հետևում է բացասական պատասխան Ա. Մեյերի այն հարցին թե արդյոք երբ M_Φ տիպի բազմություններն են m -հանգեցման նկատմամբ համազոր:

H. B. MARANDJIAN On c -degrees of sets of minimal indices of algorithms
(summary)

Let $\Phi = \{\varphi_i\}$ be an acceptable (in the sense of Rogers's) enumeration of all one-place partially recursive functions. Denote by M_Φ the set

$$\{i | \forall j (\varphi_i = \varphi_j \supset i \leq j)\}.$$

The following theorem is proved:

There exist such acceptable enumerations Ψ , Ξ that M_Ψ and M_Ξ are incomparable with respect to $<_c$.

This theorem provides negative answer to the question of A. Meyer concerning m -equivalency of sets of minimal indices.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. H. Rogers Jr. Gödel numberings of partial recursive functions, J. Symbolic Logic, 23, 1958, 331—341.
2. A. R. Meyer. Program size in restricted programming Languages, Information and Control, 21, 1972, 382—394.
3. Դ. Բ. Մարանդյան. Об алгоритмических языках, не допускающих взаимной оптимальной трансляции, ДАН Арм.ССР, LXI, № 4, 1975, 193—197.
4. Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Изд. «Мир», 1972.
5. Դ. Բ. Մարանդյան. Об алгоритмах минимальной сложности, ДАН СССР, 213, № 4, 1973.