ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

А. Г. ДЖВАРШЕЙШВИЛИ

О ПОВЕДЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ОКРЕСТНОСТИ ГРАНИЧНЫХ ТОЧЕК И ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

В работе получены граничные теоремы единственности для функций двух переменных, в частности, обобщаются одна теорема А. Зигмунда и Кальдерона (см. [3], стр. 489), а также некоторые результаты Э. Коллингвуда [4] и Бейджмиля [5], [10].

§ 1. Предварительные сведения

Декартовое произведение двух множеств A, B обозначим через $[A\times B]$. Пусть G_k—область в комплексной плоскости z_k, $k=1, 2$. Тогда границей области $G=[G_1, G_2]$ назовем множество $\Gamma=[\Gamma_1, \Gamma_2]$, где Γ_k — граница области G_k. Далее $\vartheta_k=\{z_k, |z_k|<1\}$; $C_k=\{z_k, |z_k|=1\}$. Пусть Γ_k — спрямляемая простая линия, имеющая в точке t_k касательную. Треугольной окрестностью точки t_k назовем множество

$$\Delta_k=\Delta_k(t_k, \varepsilon, \theta)=\left\{z_k;\ z_k=t_k+i\rho\, l^{i(\varphi_k+\psi)};\ 0<\rho<\varepsilon;\ |\psi|\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right\},$$

где φ_k — угол между касательной и положительным направлением оси OX. Обозначим через Γ_k^+ конечную область, ограниченную линией Γ_k, а через Γ_k^- — бесконечную область.

Хордой назовем отрезок прямой линии, соединяющий две точки из Γ_k и лежащий в Γ_k^+. Обозначим через $\varphi_k(t_k)$ ту половину хорды, которая оканчивается в t_k и образует с внутренней нормалью угол равный φ_k. Заметим, что при достаточно малых ε и θ имеем $\Delta_k\subset\Gamma_k^+$. Мы всегда будем полагать, что Γ_k — простая спрямляемая линия. Точка z_k угловым путем сходится к точке t_k, если $\lim|z_k-t_k|=0$, $z_k\in\Delta_k$ и будем писать $z_k\overset{\blacktriangle}{\to}t_k$, $k=1, 2$. Далее $(z_1, z_2)\overset{\blacktriangle}{\to}(t_1, t_2)$, если $z_k\overset{\blacktriangle}{\to}t_k$, $k=1, 2$. Скажем, что точка (z_1, z_2) λ-угловым путем сходится к (t_1, t_2), если $(z_1, z_2)\overset{\blacktriangle}{\to}(t_1, t_2)$, $1/\lambda\leqslant\dfrac{|z_1-t_1|}{|z_2-t_2|}\leqslant\lambda$. Этот вид сходимости коротко обозначим так $(z_1, z_2)\overset{\blacktriangle}{\to}_{\lambda}(t_1, t_2)$. Γ называется линией Ляпунова, если угол наклона касательной с осью OX, как функция дуги, удовлетворяет условию Липшица. Справедлива

Лемма 1. *Пусть область G_k ограничена линией Ляпунова Γ_k, $k=1, 2$, а функции $z_1=\omega(w_1)$; $z_2=\chi(w_2)$ конформно отображают G_k на ϑ_k, $k=1, 2$. Если для $\lambda>1$ и всех $(\tau_1, \tau_2)\in C=[C_1\times C_2]$ имеем*

$$(w_1, w_2)_\lambda \overset{\wedge}{\to} (\tau_1, \tau_2);\ (w_1, w_2) \in \vartheta = [\vartheta_1 \times \vartheta_2], \tag{1}$$

то найдется такое число $\mu > 1$, *что почти для всех* $(t_1, t_2) \in \Gamma$ *будем иметь*

$$(z_1, z_2)_\mu \overset{\wedge}{\to} (t_1, t_2), \tag{2}$$

где

$$t_1 = \omega(\tau_1);\ t_2 = \chi(\tau_2);\ z_1 = \omega(w_1),\ z_2 = \chi(w_2).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если измеримое множество $e \subset C$ и $|e| = 0$, то соответствующее ему множество $E \subset \Gamma$ посредством конформного преобразования $z_1 = \omega(w_1)$, $z_2 = \chi(w_2)$ будет также иметь меру нуль, и в силу конформности, из соотношения

$$(w_1, w_2) \overset{\wedge}{\to} (\tau_1, \tau_2);\ (w_1 w_2) \in \vartheta,\ (\tau_1, \tau_2) \in C$$

вытекает соотношение

$$(\omega(w_1), \chi(w_2)) \overset{\wedge}{\to} (\omega(\tau_1), \chi(\tau_2))$$

почти для всех $(\tau_1, \tau_2) \in C$. Далее на основании леммы 2 из [1], стр. 149 почти для всех (τ_1, τ_2) имеем

$$\frac{\omega(w_1) - \omega(\tau_1)}{w_1 - \tau_1} \overset{\wedge}{\to} w'(\tau_1);\quad \frac{\chi(w_2) - \chi(\tau_2)}{w_2 - \tau_2} \overset{\wedge}{\to} \chi'(\tau_2). \tag{3}$$

Так как Γ_k, $k=1, 2$ суть линии Ляпунова, то на основании одной теоремы Кёллога (см. например, [2], стр. 468) функции $\lg \omega'(\tau_1)$ и $\lg \chi'(\tau_2)$ непрерывны соответственно на C_1 и C_2. Следовательно, существуют постоянные числа $0 < m < M$ такие, что для любых $\tau_k \in C_k$, $k = 1, 2$

$$m \leqslant |\omega'(\tau_1)|,\ |\chi'(\tau_2)| \leqslant M. \tag{4}$$

Пусть

$$1/\lambda \leqslant \left|\frac{w_1 - \tau_1}{w_2 - \tau_2}\right| \leqslant \lambda \tag{5}$$

и воспользуемся равенством

$$\frac{z_1 - t_1}{z_2 - t_2} = \frac{\omega(w_1) - \omega(\tau_1)}{\chi(w_2) - \chi(\tau_2)} = \frac{\omega(w_1) - \omega(\tau_1)}{w_1 - \tau_1} \cdot \frac{w_2 - \tau_2}{\chi(w_2) - \chi(\tau_2)} \cdot \frac{w_1 - \tau_1}{w_2 - \tau_2}. \tag{6}$$

В силу (3) и (4) для $\eta \in \left(0, \dfrac{m}{2}\right)$ существуют числа $\delta > 0$, $\theta > 0$ такие, что при $w_k \in \Delta(\tau_k, \delta, \theta)$ имеем

$$m - \eta \leqslant |\omega'(\tau_1)| - \eta \leqslant \frac{|\omega(w_1) - \omega(\tau_1)|}{|w_1 - \tau_1|} \leqslant |\omega'(\tau_1)| + \eta \leqslant M + \eta, \tag{7}$$

$$m - \eta \leqslant |\chi'(\tau_2)| - \eta \leqslant \frac{|\chi(w_2) - \chi(\tau_2)|}{|w_2 - \tau_2|} \leqslant |\chi'(\tau_2)| + \eta \leqslant M + \eta.$$

Теперь из (5), (6) и (7) получаем

$$\frac{1}{\mu}=\frac{m-\eta}{M+\eta}\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{|z_1-t_1|}{|z_2-t_2|}\leqslant\frac{M+\eta}{m-\eta}\lambda=\mu,$$

где $\mu>1$ и лемма доказана. Аналогично можно показать обратное утверждение, то есть, если имеет место (2), то для всех $(t_1, t_2)\in\Gamma$ можно найти такое $\lambda>1$, что почти для всех $(\tau_1, \tau_2)\in C$ будет иметь место (1). Следовательно, рассматриваемый вид сходимости внутренних точек к граничной является инвариантным относительно конформных отображений.

Пусть f — аналитическая функция в области $G=[G_1\times G_2]$. Скажем, что $\alpha\in G^{\lambda}_{\varphi_1\varphi_2}(f, t_1, t_2)$, $(t_1, t_2)\in\Gamma$, $\lambda>1$, если существует последовательность точек $\{z_{k,n}\}$, $n=\overline{1, \infty}$, $k=1, 2$ таких, что

$$z_{k,n}\in\varphi_k(t_k),\ k=1, 2,\ n=\overline{1, \infty},\ \lim z_{k,n}=t_k,$$

$$1/\lambda\leqslant\frac{|z_1-t_1|}{|z_2-t_2|}\leqslant\lambda;\ \lim_{n\to\infty}f(z_{1,n}, z_{2,n})=\alpha. \tag{8}$$

Скажем, что $\alpha\in C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, t_1, t_2)$, если существует последовательность точек $\{z_{k,n}\}$ таких, что $z_{k,n}\in\Delta_k(t_k)$, $n=\overline{1, \infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|z_{k,n}-t_k|=0$, $k=1, 2$ и выполнены условия (8).

Точку (t_1, t_2) назовем λ-точкой Фату для f, если объединение $C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, t_1, t_2)$ по всевозможным треугольным окрестностям Δ_k, $k=1, 2$ содержит одну точку. Если хотя бы одно множество $C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, t_1, t_2)$ совпадает с расширенной комплексной плоскостью, то (t_1, t_2) будет λ-точкой Плеснера. Дугу $\gamma=[\gamma_1\times\gamma_2]$ назовем λ-дугой Фату для f, если γ есть часть границы односвязной области $g_k\subset\Gamma^{+}_{k}$, $k=1, 2$ и для почти каждой точки $(t_1, t_2)\in\gamma$ найдутся числа $\varepsilon>0$, $\theta>0$ такие, что $\Delta_k\subset g_k$ и множество $C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, t_1, t_2)$ не покрывает всю плоскость. E называется множеством первой категории, если оно является объединением счетного множества нигде не плотных множеств, а множество, не являющееся первой категории, называют множеством второй категории. Дополнение к множеству E обозначим через CE. Измеримое множество $E\subset\gamma=[\gamma_1\times\gamma_2]$ метрически плотно на дуге γ, если для любой дуги $\gamma'=[\gamma'_1\times\gamma'_2]$ имеем $|\gamma'\cap E|>0$.

§ 2. Граничные теоремы единственности

Как известно, в граничных теоремах единственности существенное значение имеет по какому пути внутренняя точка стремится к граничной, вдоль которой функция имеет предел.

Для функции двух комплексных переменных путём, гарантирующим единственность аналитических функций, является λ-угловая сходимость внутренних точек к граничной (см. [3], стр. 478). В данном параграфе в качестве таких путей рассматриваем λ-сходимость вдоль некоторых линий. Тем самым обобщаем вышеуказанный результат Кальдерона-Зигмунда. Кроме этого, обобщены теоремы Коллингвуда [4], Бейджмиля [5], Цудзи [6].

Прежде всего отметим одно свойство λ-сходимости внутренних точек к граничной. На основании леммы 1 этот вид сходимости инвариантен относительно конформных отображений. В силу этого для простоты изложения будем рассматривать декартовое произведение верхних полуплоскостей. Пусть $z_k = x_k + iy_k$ $y_k > 0$, $k = 1, 2$. Для фиксированных углов $\varphi_k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и чисел $\sigma_k > 0$, $a_k < b_k$, $\theta_k \in \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $k=1, 2$ введем множества

$$\varphi_k(x_k) = \{z_k,\ z_k = x_k + i\rho\, e^{i\varphi_k};\ 0 < \rho < \sigma_k\}; \tag{1}$$

$$D_k = D(a_k, b_k) = \{z_k;\ z_k = x_k + i\rho\, e^{i\varphi_k};\ 0 < \rho < \sigma_k;\ a_k < x_k < b_k\}, \tag{2}$$

$$\Delta_k = \Delta(x_k) = \{z_k;\ z_k = x_k + i\rho\, e^{i\psi};\ 0 < \rho < \sigma_k, -\theta_k < \psi < \theta_k\}. \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть $f(z_1, z_2)$ определена в области $G = [G_1 \times G_2]$ и числа $\lambda > 1$, $|\varphi_k| \in (0, \pi/3)$ выбраны так, что $\lambda \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 > 1$. Положим, что для каждой точки $x_k \in (a_k, b_k)$ функция f удовлетворяет условию*

$$|f(z_1, z_2)| \leqslant M,$$

где $z_k = x_k + i\rho_k\, e^{i\varphi_k}$, $1/\lambda \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda$, $\rho_k \in (0, G_k)$. Тогда найдется подинтервал $(a_k', b_k') \subset (a_k, b_k)$ и фиксированные числа $\lambda_1 \in (1, \lambda)$, $\theta_k' = |\varphi_k|$, $\sigma_k' > 0$ так, что для каждой точки $x_k \in (a_k', b_k')$ и произвольных чисел $\rho_k \in (0, \sigma_k')$, $\psi_k \in [-\theta_k', \theta_k']$ имеем

$$|f(z_1, z_2)| \leqslant M,$$

где

$$z_k = x_k + i\rho_k\, e^{i\psi_k},\ \rho_k \in (0, \sigma_k'),\ 1/\lambda_1 \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda_1;\ \psi_k \in [-\theta_k', \theta_k'].$$

Доказательство. Точки x_k и z_k, связанные равенством (1), назовем соответственными. Пусть $\sigma_k' = \frac{\sigma_k}{2}$, $\theta_k' = |\varphi_k|$, где σ_k, φ_k — числа, фигурирующие в равенствах (1) и (2). Для x_k, σ_k', θ_k' составим множество Δ_k' типа (3). Для σ_k' найдется число $\delta_k = \sigma_k \sin\varphi_k$ такое, что для $z_k \in \Delta_k'(x_k)$ в интервале $(x_k - \delta_k, x_k + \delta_k)$ найдется точка ему соответствующая $\overline{x}_k$. Пусть $z_k \in \Delta_k'(x_k)$, $x_k \in (a_k + \delta_k, b_k - \delta_k)$. Справедливо равенство

$$\frac{|\overline{x}_1 - z_1|}{|\overline{x}_2 - z_2|} = \frac{|\overline{x}_1 - z_1|}{|x_1 - z_1|}\,\frac{|x_2 - z_2|}{|\overline{x}_2 - z_2|}\,\frac{|x_1 - z_1|}{|x_2 - z_2|}, \tag{4}$$

где $\overline{x}_k$ и z_k — соответственные точки. Положим, что $\theta_k' = |\varphi_k|$, $z_k \in \in \Delta_k'(x_k)$ и $|z_k - x_k|$ остается постоянной. Тогда

$$\cos\varphi_k \leqslant \frac{|\overline{x}_k - z_k|}{|x_k - z_k|} \leqslant \frac{1}{\cos\varphi_k}. \tag{5}$$

Из (4) и (5)

$$\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \frac{|x_1 - z_1|}{|x_2 - z_2|} \leqslant \frac{|\overline{x}_1 - z_1|}{|\overline{x}_2 - z_2|} \leqslant \frac{1}{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2} \cdot \frac{|x_1 - z_1|}{|x_2 - z_2|}.$$

Полагая $\lambda_1 = \lambda \cos\varphi_1 \cos\varphi_2$, из неравенства

$$1/\lambda_1 \leqslant \frac{|x_1 - z_1|}{|x_2 - z_2|} \leqslant \lambda_1$$

получим

$$1/\lambda \leqslant \frac{|\overline{x}_1 - z_1|}{|\overline{x}_2 - z_2|} \leqslant \lambda.$$

Таким образом, если

$$x_k \in (a_k + \delta_k,\ b_k - \delta_k),\ 0 < \rho_k < \sigma_k' \leqslant \frac{\sigma_k}{2},\ \psi_k \in [-|\varphi_k|,\ |\varphi_k|];\ 1/\lambda_1 \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda_1,$$

то для всякой точки z_k вида (3) имеем

$$|f(z_1,\ z_2)| \leqslant M$$

и лемма доказана. Скажем, что f—обобщенно непрерывна в области G, если она непрерывна в обычном смысле в точках, где $|f(z_1\ z_2)| < \infty$, если $f(z_1, z_2) = \infty$, то при $(z_{1n},\ z_{2n}) \to (z_1,\ z_2)$ имеем $f(z_{1n},\ z_{2n}) \to \infty$.

Лемма 3. *Пусть f — обобщенно непрерывная при $\varphi_k > 0$, $k = 1, 2$, а числа λ, φ_k, $k = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы 2. Если на $\gamma = [\gamma_1 \times \gamma_2]$, $\gamma_k = [a_k,\ b_k]$ существует множество M второй категории такое, что для $(x_1,\ x_2) \in M$ найдется конечное или бесконечное число β, $\beta \overline{\in} C^{\lambda}_{\varphi_1\varphi_2}(f x_1,\ x_2)$, то существует $\gamma_0 = [\gamma_{10} \times \times \gamma_{20}]$, число $1 < \lambda_1 < \lambda$ такое, что: 1) γ_0 будет λ_1-дугой Фату, 2) M всюду плотно на γ_0.*

Доказательство. Положим $\beta = \infty$. Обозначим через $E_{\varphi_1\varphi_2}(\sigma_1,\ \sigma_2,\ N,\ f)$ множество тех точек $(x_1, x_2) \in M$, для которых при $0 < \rho_k < \sigma_k$; $1/\lambda \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda$ имеем

$$|f(x_1 + i\rho_1 e^{i\varphi_1};\ x_2 + i\rho_2 e^{i\varphi_2})| \leqslant N.$$

Пусть $\sigma_k^{(m)} \downarrow 0$, $N_m \uparrow \infty$ при $m \to \infty$, $k = 1, 2$. Положим

$$E_m = E_{\varphi_1\varphi_2}(\sigma_1^{(m)},\ \sigma_2^{(m)},\ N_m,\ f).$$

Очевидно равенство

$$M = \bigcup_{m=}^{\infty} E_m.$$

Так как M — множество второй категории, то существуют $\gamma_0 = [\gamma_{10} \times \times \gamma_{20}] \leqslant \gamma$ и множество E_{m_0}, всюду плотное на γ_0. Пусть $(x_1,\ x_2) \in \in E_{m_0} \cap \gamma_0$, тогда для $\rho_k \in (0,\ \sigma_k^{(m_0)})$, $1/\lambda \leqslant \rho_1/\rho_2 \leqslant \lambda$

$$|f(x_1+i\rho_1 e^{i\varphi_1};\ x_2+i\rho_2 e^{i\varphi_2})|\leqslant N_{m_0}. \qquad (6)$$

Для $(x_1, x_2)\in\gamma_0$ составим точки вида

$$z_k = x_k + i\rho_k e^{i\varphi_k};\ 0<\rho_k<\delta_k^{(m_0)},\ k=1, 2. \qquad (7)$$

Множество точек (z_1, z_2), где z_k имеет вид (7), а (x_1, x_2) пробегает γ_0, обозначим через $\mathbf{L}_0$, а если (x_1, x_2) пробегает $E_{m_0}\cap\gamma_0$, то это множество обозначим через $\mathbf{H}_0$. Ясно, что $\mathbf{H}_0$ всюду плотно на $\mathbf{L}_0$. Если $(x_1, x_2)\in E_{m_0}\cap\gamma$, $1/\lambda\leqslant\rho_1/\rho_2\leqslant\lambda$, то для соответствующих точек вида (7) имеем неравенство (6). Так как f—обобщено непрерывна и множество $\mathbf{H}_0$ всюду плотно на $\mathbf{L}_0$, то для $(x_1, x_2)\in\gamma_0$, $1/\lambda\leqslant\rho_1/\rho_2\leqslant\lambda$ и для соответствующих точек вида (7) будем иметь неравенство (6). Пусть z_k имеет вид (7), где x_k пробегает множество $\gamma_{k,0}=(a_{k,0}, b_{k,0})$.

Множество таких точек z_k образует односвязное множество G_k. На основании леммы 2 существуют $\gamma'=[\gamma_1'\times\gamma_2']$, $\gamma_k'\subset\gamma_{k,0}$ и число $\lambda_1\in(1, \lambda)$ такие, что 1) γ' будет λ_1-дугой Фату в случае $\beta=\infty$, 2) множество M всюду плотно на γ'. Теперь рассмотрим случай $\beta\neq\infty$. Введем функцию $f_1=1/f-\beta$, когда $f\neq\beta$ и $f_1=\infty$, когда $f=\beta$. Ясно, что f_1 обобщенно непрерывна. Далее, по условию $\beta\,\overline{\in}\,C^{\lambda}_{\varphi_1\varphi_2}(f_1, x_1, x_2)$. Стало быть $\infty\,\overline{\in}\,C^{\lambda}_{\varphi_1\varphi_2}(f_1, x_1, x_2)$, когда $(x_1, x_2)\in M$. В силу вышедоказанного существует число $\lambda_1\in(1, \lambda)$ и дуга γ', которая есть λ_1-дуга Фату для f_1 и M всюду плотно на γ'. Очевидно, что если γ' есть λ_1-дуга Фату для f_1, то она будет λ-дугой Фату для f. Таким образом лемма доказана.

Скажем, что функция f, определенная в области $G=[G_1\times G_2]$, ведет себя λ-ограниченно, $\lambda>1$, в граничной точке $(t_1, t_2)\in[\Gamma_1\times\Gamma_2]$, если существует конечное или бесконечное число β и треугольная окрестность точки (t_1, t_2) такие, что

$$\beta\,\overline{\in}\,C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, t_1, t_2).$$

Лемма 4. *Пусть f— аналитическая функция при $y_k>0$, $k=1, 2$. Если в каждой точке $(x_1, x_2)\in E$, $|E|>0$ ведет себя λ-ограниченно, $\lambda>1$, то почти в каждой точке $(x_1, x_2)\in E$ существует предел*

$$\lim_{(z_1, z_2)\overset{\Delta}{\underset{\lambda}{\to}}(x_1, x_2)} f(z_1, z_2).$$

Доказательство. Пусть для $(x_1, x_2)\in E$ имеем

$$\beta\,\overline{\in}\,C^{\lambda}_{\Delta_1\Delta_2}(f, x_1, x_2),$$

где β — конечное или бесконечное число. Тогда пользуясь преобразованием

$$z_1=w_1+\varepsilon w_2;\ z_2=\varepsilon w_1+w_2;\ z_k=x_k+iy_k;\ w_k=u_k+iv_k,$$
$$k=1, 2,$$

получим, что из стремления точки (w_1, w_2) угловым путем к (u_1, u_2) следует стремление соответствующей точки (z_1, z_2) угловым путем к (x_1, x_2) и при этом выполнено неравенство

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \leqslant y_1/y_2 \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}, \ 0<\varepsilon<1.$$

Положим

$$\lambda = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \text{ и } F(w_1, w_2) = f(w_1 + \varepsilon w_2, \varepsilon w_1 + w_2).$$

Тогда, в силу условия леммы и теоремы (4.22) из [3] (стр. 482), существует угловой предел функции $F(w_1, w_2)$ почти всюду на H, где H—прообраз множества E при указанном преобразовании. Следовательно, f имеет λ-угловой предел почти всюду на E и лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть f — аналитическая функция при $y_k > 0$, $k = 1, 2$ на $\gamma = [\gamma_1 \times \gamma_2]$, $\gamma_k = [a_k, b_k]$, существуют:* 1) *множество $M \subset \gamma$ второй категории;* 2) *фиксированные числа λ, φ_1, φ_2, удовлетворяющие условиям леммы 2 и*

$$\bigcap_{(x_1, x_2) \in M} \mathbf{C}\, C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2) \neq \varnothing. \tag{8}$$

Если существуют конечное или бесконечное число α, метрически плотное на γ множество N такие, что

$$\alpha \in \bigcap_{(x_1, x_2) \in N} C^{\lambda_1}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2), \ \lambda_1 = \lambda \cos\varphi_1 \cos\varphi_2, \tag{9}$$

то $f(z_1, z_2) \equiv \alpha$.

Доказательство. В силу условия теоремы существует конечное или бесконечное число β такое, что для $(x_1, x_2) \in M$

$$\beta \overline{\in} C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2).$$

На основании леммы 3 существуют $\gamma_0 = [\gamma_{10} \times \gamma_{20}] \subset \gamma$ и число $\lambda_1 \subset (1, \lambda)$ такие, что γ_0 будет λ_1-дугой Фату и M всюду плотно на γ_0. Теперь, в силу леммы 4, почти всюду на γ_0 существует предел

$$\lim_{(z_1, z_2) \underset{\lambda_1}{\overset{\wedge}{\to}} (x_1, x_2)} f(z_1, z_2), \tag{10}$$

почти для всех $(x_1, x_2) \in \gamma_0$. Так как множество N метрически плотно на γ, то $|\gamma_0 \cap N| = |e| > 0$. Отсюда и из (9), (10) следует, что почти для всех $(x_1, x_2) \in e \subset N$

$$\lim_{(z_1, z_2) \underset{\lambda_1}{\overset{\wedge}{\to}} (x_1, x_2)} f(z_1, z_2) = \alpha.$$

Теперь на основании одной теоремы из [3], стр. 489 заключаем, что $f(z_1, z_2) \equiv \alpha$ и теорема доказана. Заметим, что в теореме 1 условие (8) можно заменить условием: $C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2)$ не совпадает с расширенной плоскостью. Для изучения этого случая приведем лемму.

Лемма 5. *Пусть $w = f(z_1, z_2)$ — аналитическая функция при $y_k > 0$, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$ и на $\gamma = [\gamma_1 \times \gamma_2]$, $\gamma_k = [a_k, b_k]$ существует множество M второй категории такое, что при фиксированных λ, φ_1, φ_2, удовлетворяющих условию леммы 2, для любой точки $(x_1, x_2) \in M$ множество $C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2)$ не совпадает с расширенной плоскостью. Тогда существует множество $M_0 \subseteq M$ второй категории на γ и*

$$\bigcap_{(x_1, x_2) \in M_0} C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2) \neq \varnothing.$$

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству соответствующей леммы из [12], стр. 47. Опираясь на лемму 5 и используя предыдущее рассуждение, можно доказать следующую теорему

Теорема 2. *Пусть f — аналитическая функция при $y_k > 0$, $k = 1, 2$ и для $\gamma = [\gamma_1 \times \gamma_2]$, $\gamma_k = [a_k, b_k]$ существуют фиксированные числа λ, φ_1, φ_2, удовлетворяющие условию леммы 2, множество $M \subset \gamma$ второй категории на γ такое, что для $(x_1, x_2) \in M$ множество $C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2)$ не покрывает всю плоскость. Если существуют конечное или бесконечное число α и на γ метрически плотное множество N такие, что*

$$\alpha \in \bigcap_{(x_1, x_2) \in N} C^{\lambda_1}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2), \ \lambda_1 = \lambda \cos \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

то $f(z_1, z_2) \equiv \alpha$.

Как известно, не всякая полигармоническая функция является действительной (мнимой) частью аналитической функции многих переменных. Хорошо известна следующая (см., например, [8], стр. 49)

Теорема А. *Пусть $U(z_1, z_2) = U(x_1, y_1, x_2, y_2)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция в ϑ. Для того чтобы $U(z_1, z_2) = \operatorname{Re} f(z_1, z_2)$, где f — аналитическая функция в ϑ, необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x_k} + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y_k} = 0, \ k = 1,2; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial y_2} =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial x_2} = 0. \tag{11}$$

Полигармонические функции, удовлетворяющие условиям (11), назовем бигармоническими. Путем непосредственной проверки можно доказать следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть $W(\omega) = W(\xi, \eta)$ есть гармоническая функция от $\omega = \xi + i\eta$, а $\omega = f(z_1, z_2) = \xi(z_1, z_2) + i\eta(z_1, z_2)$ есть аналитическая функция от переменных $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$. Тогда функция*

$W = W[f(z_1, z_2)]$ *будет бигармонической функцией от переменных* z_1, z_2.

Теорема 3. *Пусть f — ограниченная аналитическая функция на $\vartheta = [\vartheta_1 \times \vartheta_2]$. Если для $(t_1, t_2) \in e \subset C$; $|e| > 0$ имеем $C^{\lambda}_{\Delta_1 \Delta_2}(f, t_1, t_2) \subseteq E$, где E — замкнутое множество емкости нуль*, то $f(z_1, z_2) \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. Допустим $f(z_1, z_2) \not\equiv \mathrm{const}$ и $|f| < 1$. На основании одной теоремы Г. К. Эванса [9] ([7], стр. 22) существует распределение $\mu(t)$ единичной массы на E, так что функция

$$U(w) = \int_E \ln \left|\frac{2}{w-t}\right| d\mu(t)$$

будет гармонической и неотрицательной в $|w| < 1$. Кроме того, при $w \to t \in E$, $U(w) \to \infty$. Рассмотрим функцию $U_1(z_1, z_2) = U[f(z_1, z_2)]$, которая в силу леммы 6 будет бигармонической в ϑ. Пусть $V_1(z_1, z_2)$ — бигармоническая функция, сопряженная с $U_1(z_1, z_2)$, то есть выражение

$$\psi(z_1, z_2) = e^{-U_1(z_1, z_2) - iV_1(z_1, z_2)}$$

есть аналитическая функция на ϑ. Заметим, что для

$$(t_1, t_2) \in e, \; C^{\lambda}_{\Delta_1, \Delta_2}(U_1, t_1, t_2) = \{\infty\}, \; U_1(z_1, z_2) \geqslant 0.$$

Следовательно, функция $\psi(z_1, z_2)$ будет ограниченной и для $(t_1, t_2) \in e$ имеем $C^{\lambda}_{\Delta_1 \Delta_2}(\psi, t_1, t_2) = \{0\}$. Отсюда в силу одной теоремы из [3], стр. 489, получаем $\psi(z_1, z_2) \equiv 0$, что противоречит допущению, а потому $f(z_1, z_2) \equiv \mathrm{const}$ и теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть f — аналитическая ограниченная функция при $y_k > 0$, $k = 1, 2$ и существуют точки*

$$z'_{k,n} = a'_{k,n} + ib'_{k,n}, \; z''_{k,n} = a''_{k,n} + ib''_{k,n}, \; k = 1, 2, \; n = \overline{1, \infty}, \; \lim_{n \to \infty} a'_{k,n} = a'_k,$$

$$\lim_{n \to \infty} a''_{k,n} = a''_k, \lim_{n \to \infty} b'_{k,n} = \lim_{n \to \infty} b''_{k,n} = 0, \; k = 1, 2.$$

Если существуют непрерывные линии $\gamma_{k,n}$, соединяющие точки $z'_{k,n}$ и $z''_{k,n}$ так, что для любой точки этой линии

$$\zeta_{k,n} = \alpha_{k,n} + i\beta_{k,n}, \; \lim \beta_{k,n} = 0, \; \lim_{(\beta_{1n}, \beta_{2n})_\lambda \to 0} |f(\zeta_{1n_1}, \zeta_{2n})| = 0,$$

где $(\beta_{1,n}, \beta_{2,n})_\lambda \to 0$ означает

$$\beta_{k,n} \to 0, \; 1/\lambda \leqslant \frac{\beta_{1n}}{\beta_{2n}} \leqslant \lambda,$$

то $f(z_1, z_2) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $\gamma_1 = [a'_1, a''_1]$, $\gamma_2 = [a'_2, a''_2]$. Тогда в силу условия теоремы

---

* Определение множества емкости нуль см., например, [7], стр. 20

$$\bigcap_{(x_1, x_2)\in\gamma} C^{\lambda}_{\varphi_1, \varphi_2}(f, x_1, x_2) \neq \varnothing, \ \gamma = [\gamma_1 \times \gamma_2]$$

для любых $\varphi_k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Пусть $a_k' < C_k' < C_k'' < a_k''$. Существует номер m_0 такой, что при $m > m_0$, $C_k' \leqslant \alpha_{k,m} \leqslant C_k''$. Далее числа φ_k, $k = 1, 2$ можно выбрать столь малыми, что $\lambda_1 = \lambda \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 > 1$ и точки вида $z_{k,m} = x_{k,m} + i\rho_m e^{i\varphi_k}$ при $m > m_0$ будут лежать на кривых $\gamma_{k,m}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \rho_{k,m} = 0$. Таким образом

$$\bigcap_{C_k' < x_k < C_k''} C^{\lambda_1}_{\varphi_1\varphi_2}(f, x_1, x_2) \ni 0.$$

Следовательно, в силу теоремы 1, $f(z_1, z_2) \equiv 0$ и теорема доказана. Так как λ-сходимость инварианта относительно конформного отображения, когда области ограничены кривыми Ляпунова, то приведенная теорема справедлива для биобластей $G = [G_1 \times G_2]$, если G_k ограничена линией Ляпунова.

§ 3. Теорема Бейджмиля для функций двух переменных

Пусть $0 < \rho < 1$, $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{4}$ — рациональные числа и $S \subset \vartheta$ — некоторое множество. Относительно множества S разобьем $C = [C_1 \times C_2]$ на подмножества $E_{\rho, \alpha, \beta}$. Скажем, что точка $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ принадлежит множеству $E_{\rho, \alpha, \beta}$, если существуют линии L_k', L_k'' из ϑ_k, оканчивающиеся в $e^{i\theta_k}$, начинающиеся соответственно в ζ_k', ζ_k'' так, что

$$|\zeta_k'| = |\zeta_k''| = \rho; \ [L_1' \times L_2'] \subseteq S; \ [L_1'' \times L_2''] \subseteq C S; \ \rho < |z_k'|, \ |z_k''| < 1;$$

$$\theta_k - \pi/4 < \arg z_k', \ \arg z_k'' < \theta_k + \pi/4 \ z_k' \in L_k', \ z_k'' \in L_k''; \ \theta_k - \pi/4 <$$

$$< \arg \zeta_k' < \theta_k + \pi/4 - \alpha < \theta_k + \pi/4 - \beta < \arg \zeta_k'' < \theta_k + \pi/4, \ k = 1, 2.$$

Лемма 7. *Пусть $E \subset [0, 1; 0, 1]$ — некоторое множество с внешней лебеговской мерой $|E| > 0$. Тогда существует хотя бы одна точка $(x, y) \in E$ такая, что*

$$|E \cap (x, x+h; y, y+h)| > 0; \ |E \cap (x, x+h, y-h, y)| > 0,$$

$$|E \cap (x-h, x, y, y+h)| > 0; \ |E \cap (x-h, x, y-h, y)| > 0, \ h > 0.$$

Доказательство. Допустим, что не существует точки, удовлетворяющей вышеуказанным условиям. Тогда для всякой точки $(x, y) \in E$ и для $h_n \to 0$ внешняя мера множества $E \cap (x, x+h_n; y, y+h_n)$ будет равна нулю.

На основании теоремы Витали о покрытии множества существует счетная система сегментов $r_p = [x_p, x_p + h_{np}, y_p, y_p + h_{np}]$ таких, что

$$|\Phi| = \left| E \setminus \bigcup_{p=1}^{\infty} (r_p \cap E) \right| = 0.$$

Из последних равенств имеем

$$|E| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} |E \cap r_p| + |\Phi| = 0,$$

что противоречит условию леммы. Следовательно, наше допущение неверно, и лемма доказана.

Лемма 8. *Множество $E_{\rho,\alpha,\beta}$ имеет лебеговскую меру, равную нулю.*

Доказательство. Допустим, что $|E_{\rho,\alpha,\beta}| > 0$. Тогда существует точка $(e^{i\theta_1}; e^{i\theta_2})$, для которой выполнены условия леммы 7. В силу этого существует последовательность точек $\{(e^{i\theta_{1n}}, e^{i\theta_{2n}})\}$ из $E_{\rho,\alpha,\beta}$ таких, что

$$\theta_{k,n} \leqslant \theta_{k,n+1}, \; n = \overline{1, \infty}, \; \lim_{n\to\infty} \theta_{k,n} = \theta_k.$$

Отсюда и из определения множества $E_{\rho,\alpha,\beta}$ для $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n > N$ будем иметь

$$\theta_k - \pi/4 - \varepsilon < \arg \zeta'_{k,n} < \theta_k + \pi/4 - \varepsilon - \alpha <$$
$$< \theta_k + \pi/4 - \varepsilon - \beta < \arg \zeta''_{k,n} < \theta_k + \pi/4 + \varepsilon.$$

Так как рассматриваемые линии непрерывны, то из последних соотношений имеем: для всякого номера $n > N$

$$\mathbf{L}''_{k,n} \cap \mathbf{L}'_{k,n+p} \neq \varnothing, \; k = 1, 2, \; p = \overline{1, \infty}.$$

Пусть $z_k \in \mathbf{L}''_{k,n} \cap \mathbf{L}'_{k,n+p}$, тогда

$$(z_1, z_2) \in [\mathbf{L}'_{1,n+p} \times \mathbf{L}'_{2,n+p}] \subseteq S$$

и

$$(z_1, z_2) \in [\mathbf{L}''_{1,n} \times \mathbf{L}''_{2,n}] \subseteq \mathbf{C}S,$$

что невозможно. Следовательно, $|E| = 0$ и лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $S \subset \vartheta$, тогда на C существует множество C^*; $|C \setminus C^*| = 0$, причем каждая точка $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \in C^*$ обладает следующими свойствами: любые две жордановые линии $\mathbf{L}'_k$, $\mathbf{L}''_k$ из ϑ_k, $\mathbf{L}'_k \cap \mathbf{L}''_k \leqslant e^{i\theta_k}$, оканчивающиеся в $e^{i\theta_k}$, таковы, что либо*

$$[\mathbf{L}'_1 \times \mathbf{L}'_2] \cap S \neq \varnothing, \; [\mathbf{L}''_1 \times \mathbf{L}''_2] \cap S \neq \varnothing,$$

либо

$$[\mathbf{L}'_1 \times \mathbf{L}'_2] \cap \mathbf{C}S \neq \varnothing, \; [\mathbf{L}''_1 \times \mathbf{L}''_2] \cap \mathbf{C}S \neq \varnothing.$$

Доказательство. Для рациональных чисел $0 < \rho < 1$, $0 < \beta < \alpha < \pi/4$ рассмотрим множество $E_{\rho,\alpha,\beta}$, а также $E'_{\rho,\alpha,\beta}$, причем точки множества $E'_{\rho,\alpha,\beta}$ отличаются от $E_{\rho,\alpha,\beta}$ лишь условием

$$[\mathbf{L}_1' \times \mathbf{L}_2'] \subset \mathbf{C}S, \ [\mathbf{L}_1'' \times \mathbf{L}_2''] \subset S.$$

Пусть $E = \bigcup\limits_{\rho} \bigcup\limits_{\alpha} \bigcup\limits_{\beta} (E_{\rho,\alpha,\beta} \cup E'_{\rho,\alpha,\beta})$. В силу леммы 8 имеем $|E|=0$. Положим $C^* = C \setminus E$ и пусть $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \in C^*$. Рассмотрим жордановы линии $\mathbf{L}_k'$, $\mathbf{L}_k''$; $\mathbf{L}_k' \cap \mathbf{L}_k'' = e^{i\theta_k}$, оканчивающиеся в $e^{i\theta_k}$. Введем множество

$$r_k = \{z_k, \ \rho < |z_k| < 1; \ \theta_k - \pi/4 < \arg z_k < \theta_k + \pi/4\}, \ k = 1, \ 2.$$

Подберем число ρ столь близким к 1, чтобы непрерывная часть дуг $\mathbf{L}_k'$ и $\mathbf{L}_k''$, находящихся в r_k и оканчивающихся в $e^{i\theta_k}$, начинались бы соответственно в точках $\zeta_k' \neq \zeta_k''$. Эти дуги обозначим через l_k', l_k''.

Для определенности предположим, что $\arg \zeta_k' < \arg \zeta_k''$. Тогда можно определить рациональные числа $0 < \beta < \alpha < \pi/4$ так, что будем иметь

$$|\zeta_k'| = |\zeta_k''| = \rho; \ \theta_k - \pi/4 < \arg \zeta_k' < \theta_k + \pi/4 - \alpha < \theta_k + \pi/4 -$$

$$- \beta < \arg \zeta_k'' < \theta_k + \pi/4; \ \rho < |z_k'|, \ |z_k''| < 1,$$

$$\theta_k - \pi/4 < \arg z_k', \ \arg z_k'' < \theta_k + \pi/4$$

для всех $z_k' \in l_k'$, $z_k'' \in l_k''$. Таким образом, если линии l_k' и l_k'' будут удовлетворять хотя бы одному из следующих условий:

$$[l_1' \times l_2'] \subset S; \ [l_1'' \times l_2''] \subset \mathbf{C}\, S,$$

либо

$$[l_1' \times l_2'] \subset \mathbf{C}S; \ [l_1'' \times l_2''] \subset S,$$

то точка $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ по определению будет принадлежать множеству E, что невозможно. Следовательно, выполнено одно из следующих условий:

$$[l_1' \times l_2'] \cap S \neq \varnothing; \ [l_1'' \times l_2''] \cap S \neq \varnothing$$

либо

$$[l_1' \times l_2'] \cap \mathbf{C}S \neq \varnothing; \ [l_1'' \times l_2''] \cap \mathbf{C}\, S \neq \varnothing.$$

Очевидно, что последнее соотношение верно для линий $\mathbf{L}_k'$, $\mathbf{L}_k''$, $k=1, 2$ и, тем самым, лемма доказана.

Опираясь на доказанные леммы, можно установить справедливость теоремы Бейджмиля (см. [10]) для функций двух переменных, а именно имеет место следующая

Теорема 5. *Пусть $f(z_1, z_2)$ — произвольная комплекснозначная функция, определенная в $\mathfrak{D}$. Тогда на C найдется множество C^*; $|C \setminus C^*| = 0$ такое, что в каждой точке $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ и для любых непрерывных простых линий $\mathbf{L}_k'$, $\mathbf{L}_k''$, $\mathbf{L}_k' \cap \mathbf{L}_k'' = e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2$, оканчивающихся в $e^{i\theta_k}$, имеем*

$$C_{L_1' L_2'}(f, \theta_1, \theta_2) \cap C_{L_1'' L_2''}(f, \theta_1, \theta_2) \neq \varnothing^*.$$

Доказательство. Пусть Σ есть риманова w-сфера и $\{v_n\}$ — счетная система окрестностей, а $G_1, G_2, \cdots$ — совокупность открытых множеств, каждое из которых можно представить как объединение конечного числа множеств v_n; кроме того

$$\Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Введем множество

$$S_n = \{(z_1, z_2);\ f(z_1, z_2) \in G_n\},\quad n = \overline{1, \infty}.$$

Согласно лемме 9 существует множество C_n^*, $|C - C_n^*| = 0$ такое, что для каждой точки из C_n^* будут выполнены условия леммы 9 относительно множества S_n. Положим

$$C^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^*.$$

Очевидно $|C \setminus C^*| = 0$. Пусть

$$(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \in C^* \text{ и } \mathbf{L}_k', \ \mathbf{L}_k''; \ \mathbf{L}_k' \cap \mathbf{L}_k'' = e^{i\theta_k}$$

— простые непрерывные линии, оканчивающиеся в $e^{i\theta_k}$ так, что

$$C_{L_1' L_2'}(f, \theta_1, \theta_2) \cap C_{L_1'' L_2''}(f, \theta_1, \theta_2) = \varnothing.$$

Так как предельные множества замкнуты, то найдется такой номер n, что

$$C_{L_1' L_2'}(f, \theta_1, \theta_2) \in G_n;\ C_{L_1'' L_2''}(f, \theta_1, \theta_2) \subset \Sigma \setminus G_n.$$

Следовательно, при подходящем выборе последних частей l_k', l_k'' кривых $\mathbf{L}_k'$, $\mathbf{L}_k''$ можно добиться того, что образы кривых l_k', l_k'' при отображении $w = f(z_1, z_2)$ будут целиком лежать, соответственно, внутри G_n и $\Sigma \setminus G_n$. Отсюда вытекает, что $[l_1' \times l_2'] \subset S_n$ и $[l_1'' \times l_2''] \subset \complement S_n$. Последние включения невозможны в силу выбора точки $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$, т. е. наше допущение неверно и теорема доказана.

Обобщение другого вида теоремы Бейджмиля имеется в [11].

§ 4. Теорема Линделёфа для функций двух переменных

Плоскостью назовем множество точек (z_1, z_2), удовлетворяющих условию $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma = 0$, где α, β, γ — фиксированные комплексные

* $C_{L_1 L_2}(f, x_1, x_2)$ — обычное предельное множество без условия

$$1/\lambda \leqslant \frac{|z_1 - x_1|}{|z_2 - x_2|} < \lambda.$$

числа. Пусть E — некоторое множество и $p_0\,(z_{10}, z_{20})$ — предельная точка. Рассмотрим некоторую последовательность $p_n\,(z_{1n}; z_{2n}) \in E$, $p_n \to p_0$. Проведем через точки p_0 и p_n плоскость

$$\pi_n: \frac{z_1 - z_{1,0}}{z_{1,n} - z_{1,0}} = \frac{z_2 - z_{2,0}}{z_{2,n} - z_{2,0}}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Если при $n \to \infty$ плоскости π_n допускают бесконечное множество предельных плоскостей, зависящих от выбора последовательностей p_n, то p_0 назовем предельной точкой бесконечного порядка. В [13], стр. 200 и [1], стр. 155 доказана следующая

Теорема В. *Пусть f — аналитическая в $\vartheta = [\vartheta_1 \times \vartheta_2]$ и обращающаяся в нуль в точках множества E функция. Если E имеет хотя бы одну предельную точку бесконечного порядка в ϑ, то $f \equiv 0$.*

Введем множества

$$S_k\,(t_k, \alpha, 1) = \{z_k, -\alpha < \arg\,(z_k - t_k) < \alpha;\ 0 < |z_k - t_k| < 1\},\ k = 1, 2;$$

$$S = S\,(t, \alpha, 1) = [S_1 \times S_2],\ t = (t_1, t_2);$$

$$S_\lambda = \left\{(z_1, z_2);\ 1/\lambda \leqslant \frac{|z_1 - t_1|}{|z_2 - t_2|} \leqslant \lambda:\ (z_1, z_2) \in S\right\},\ \lambda > 1;$$

$$R_\delta = \{(z_1, z_2),\ \arg z_k = \arg t_k,\ \delta < |t_k - z_k| < 1,\ k = 1, 2\},\ \delta > 0.$$

При этом, если $t = 0$, то $\arg t = 0$.

Лемма 10. *Для любого $\delta \in (0,1)$ множество $E_\lambda = R_\delta \cap S_\lambda$ имеет хотя бы одну предельную точку бесконечного порядка.*

Доказательство. Рассмотрим числа $0 < \delta < \eta < r_0 < \mu < 1$;

$$1/\lambda < \delta/\eta < 1/\mu < \lambda;\ r_n \in (\eta, \mu);\ m_n \in (\delta/\eta, 1/\mu),\ n = \overline{1, \infty},\ m_n \to 1,\ r_n \to r_0.$$

Положим

$$t_1 = t_2 = 0,\ z_{10} = z_{20} = r_0,\ z_{1,n} = r_n,\ z_{2,n} = m_n \cdot r_n.$$

Очевидно, что

$$p_0\,(z_{10}, z_{2,0}) \in E_\lambda \text{ и } p_n\,(z_{1n}, z_{2n}) \in E_\lambda,\ p_n \to p_0.$$

Пусть $\mathbf{k}$ — некоторое число. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} \frac{k r_0 - r_0 + r_n}{k\, r_n} = 1.$$

В силу этого, начиная с некоторого номера N, для всех $n \geqslant N$ имеем $\sigma_n \in (\delta/\eta, 1/\mu)$. Пусть $m_n = \sigma_{N+n}$, $n = \overline{1, \infty}$. Проведем через точки p_0 и p_n плоскость

$$\pi_n: \frac{z_1 - z_{1,n}}{z_{1,0} - z_{1,n}} = \frac{z_2 - z_{2,n}}{z_{2,0} - z_{2,n}}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Отсюда получаем

$$\pi_n:\ z_1 = \mathbf{k}\,(z_2 - m_n \cdot r_{N+n}) + r_n.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\pi:\ z_1 = \mathbf{k}\,(z_2 - r_0) + r_0.$$

Меняя значения $\mathbf{k}$, мы будем получать различные предельные плоскости. Стало быть, точка p_0 есть предельная точка бесконечного порядка и лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть* $\{f_{m,n}(z_1, z_2)\}$, $1/\lambda \leqslant m/n \leqslant \lambda$, $\lambda > 1$ *есть двойная последовательность аналитических и ограниченных в совокупности функций в области* G. *Допустим в каждой точке множества* $H \subset G$ *существует*

$$\lim_{(m,\,n)_\lambda \to \infty} f_{m,n}(z_1, z_2),$$

где $(m, n)_\lambda \to \infty$ *означает* $m \to \infty$; $n \to \infty$, $1/\lambda \leqslant m/n \leqslant \lambda$. *Если множество* H *имеет хотя бы одну предельную точку бесконечного порядка, то равномерно внутри* G *существует предел*

$$\lim_{(m,\,n)_\lambda \to \infty} f_{m,n}(z_1, z_2).$$

Доказательство этой леммы опирается на теорему B и лемму 10.

Как известно, при изучении угловых граничных свойств аналитической функции одной переменной важную роль играет теорема Линделёфа (см. [14]; [7], стр. 17). При исследовании аналогичной теоремы для функции двух переменных, в силу увеличения размерности, возникают различные пути обобщения. Приведем некоторые обобщения этой теоремы для функций двух переменных. Справедлива

Теорема 6. *Пусть* f — *аналитическая функция в области* $S = S(0, \alpha, 1)$ *и ограничена в* $S_\lambda = S_\lambda(0, \alpha, 1)$. *Если существует*

$$\lim_{(r_1,\,r_2)_\lambda \to 0} f(r_1, r_2) = C_0,\ r_1 > 0,\ r_2 > 0,\ \lambda > 1,$$

то для любых $\alpha' \in (0, \alpha)$, $\mu \in (1, \sqrt{\lambda})$ *существует*

$$\lim f(z_1, z_2) = C_0, \tag{$*$}$$

когда $z_1 \to 0$, $z_2 \to 0$ *так, что* $(z_1, z_2) \in S_\mu(0, \alpha', 1)$.

Доказательство. Рассмотрим двойную последовательность аналитических функций

$$f_{m,n}(z_1, z_2) = f\left(\frac{z_1}{m}, \frac{z_2}{n}\right),$$

где

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \sqrt{\lambda};\ (z_1, z_2) \in S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1).$$

В силу условия теоремы указанная последовательность ограничена в совокупности на области $S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1)$. На основании теоремы Монтеля ([13], стр. 195) семейство $\{f_{m,n}(z_1, z_2)\}$ будет нормальным в $S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1)$. Пусть

$$e = \left\{(z_1, z_2);\ 1/2 < |z_k| < 1,\ \arg z_k = 0,\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \in \frac{|z_1|}{|z_2|} < \sqrt{\lambda},\ k = 1, 2\right\}.$$

Ясно, что $e \subset S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1)$ и по условию теоремы для любой точки $(z_1, z_2) \in e$ имеем

$$\lim_{(m,n)\xrightarrow[\sqrt{\lambda}]{}\infty} f_{m,n}(z_1, z_2) = C_0.$$

На основании леммы 10 множество e имеет хотя бы одну предельную точку бесконечного порядка внутри $S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1)$.

Пусть

$$H = \left\{(z_1, z_2);\ \frac{1-\varepsilon}{3} \leqslant |z_k| \leqslant 1-\varepsilon;\ -\alpha' \leqslant \arg z_k \leqslant \alpha';\ \lambda_1^{-1} \leqslant \frac{|z_1|}{|z_2|} \leqslant \lambda_1,\right.$$
$$\left. k = 1, 2\right\},$$

где $0 < \alpha' < \alpha$, $1 < \lambda_1 \in \sqrt{\lambda}$, $0 < \varepsilon$. Ясно, что замкнутое множество $H \subset S_{\sqrt{\lambda}}(0, \alpha, 1)$. В силу леммы 11, равномерно на множестве H имеем

$$\lim_{(m,n)\xrightarrow[\sqrt{\lambda}]{}\infty} f_{m,n}(z_1;\ z_2) = C_0. \tag{12}$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim f(z_1, z_2) = C_0, \tag{13}$$

когда $z_1 \to 0$, $z_2 \to 0$, $(z_1, z_2) \in S_\mu(0, \alpha', 1)$, $1 < \mu < \lambda_1$.

Допустим утверждение (13) неверно. Тогда существуют $\eta > 0$, последовательность точек $(z_{1p}, z_{2p}) \in S_\mu(0, \alpha', 1)$ таких, что $z_{1,p} \to 0$, $z_{2,p} \to 0$, $p \to \infty$ и

$$|f(z_{1,p}, z_{2,p}) - C_0| > \eta. \tag{14}$$

Далее, в силу (12) и для того же $\eta > 0$, существует число $N = N(\eta) > 0$ такое, что при $m > N$, $n > N$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \sqrt{\lambda}$ и любом $(z_1, z_2) \in H$ имеем

$$|f_{m,n}(z_1, z_2) - C_0| < \eta. \tag{15}$$

Для достаточно большого p найдутся числа $m' > N$, $n' > N$ такие, что

$$\frac{1}{m'},\ \frac{1}{n'} \leqslant \min\left\{2,\ \mu - 1,\ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda_1}\right\},$$

$$\frac{1-\varepsilon}{m'+1} \leqslant |z_{1,p}| \leqslant \frac{1-\varepsilon}{m'}; \ \frac{1-\varepsilon}{n'+1} \leqslant |z_{2p}| \leqslant \frac{1-\varepsilon}{n'}.$$

Пусть $w_1 = m' z_{1p}$, $w_2 = n' z_{2p}$.

Используя вышеприведенные неравенства, можно показать справедливость следующих соотношений:

$$\frac{1}{\mu} \leqslant \frac{|w_1|}{|w_2|} \leqslant \mu; \ \frac{1}{\lambda_1} \leqslant \frac{m'}{n'} \leqslant \lambda_1; \ \frac{1-\varepsilon}{3} \leqslant |w_k| < 1-\varepsilon, \ k=1, 2.$$

Отсюда вытекает, что $(w_1, w_2) \in H$ и выполнены все условия для неравенства (15), то есть

$$|f_{m', n'}(w_1, w_2) - C_0| = |f(z_{1p}, z_{2p}) - C_0| < \eta.$$

Но последнее неравенство противоречит неравенству (4). Стало быть, наше допущение неверно и теорема доказана.

Пусть непрерывная простая линия $L_k \subset S_k(t_k, \alpha, 1)$ оканчивается в точке t_k и $L = [L_1 \times L_2]$. Тогда символ

$$(z_1, z_2)_\lambda \xrightarrow{L} (t_1, t_2), \ \lambda > 1$$

означает

$$z_k \to t_k, \ z_k \in L_k, \ 1/\lambda \leqslant \frac{|z_1 - t_1|}{|z_2 - t_2|} \leqslant \lambda.$$

Справедлива

Теорема 7. *Пусть f — аналитическая функция в $S = S(t, \alpha, 1)$, $t = (t_1, t_2)$ и ограничена в области $S_\lambda = S_\lambda(t, \alpha, 1)$. Если существует*

$$\lim_{(z_1, z_2)_\lambda \xrightarrow{L} (t_1, t_2)} f(z_1, z_2) = C_0,$$

то существует предел (*).

Повторяя метод доказательства предыдущей теоремы, можно установить справедливость следующего предложения.

Теорема 8. *Пусть f — аналитическая и ограниченная функция в $S(t, \alpha, 1)$. Если существует*

$$\lim f(z_1, z_2) = C_0,$$

когда $z_k \to t_k$, $z_k \in L_k$, $k=1, 2$, то имеем

$$\lim f(z_1, z_2) = C_0,$$

когда $z_k \to t_k$, $(z_1, z_2) \in S(t, \alpha', 1)$, где $0 < \alpha' < \alpha$.

Тбилисский математический
институт им. Размадзе
АН Грузинской ССР

Поступила 20.I.1975

Ա. Գ. ՋՎԱՐՇԵՅՇՎԻԼԻ. Երկու փոփոխականի անալիտիկ ֆունկցիայի վարքը եզակի կետերի շրջակայքում և միակության թեորեմներ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ստացված են միակության եզրային թեորեմներ երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար, մասնավորապես, ընդհանրացված են Ա. Զիգմունդի և Կալդերոնի, Ցուջիի, Կոլլինգվուդի և Բեյգմիլի թեորեմները։

A. G. DZVARSHEISHVILI. *On the behaviour of the unaltical functions of two variables in the neighborhood of the sinsulat points and the uniqueness* (summary)

Boundary uniqueness theorems for the functions of two variables are obtained. In particular, the generalizations of Zigmund and Calderon, Tsuji, Collingwood and Bagemihl theorems are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г Джваршейшвили.* О граничных свойствах аналитических функций многих переменных, Труды матем. ин-та АН ГССР. т. 29, 1963, 147—167.
2. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1952.
3. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. II, М., 1965.
4. *E. Collingwood.* On the linear and angular cluster sets, Acta Math., 91, 1954, 165—185.
5. *P. Bagmihl.* Some identity and uniqueness theorems, Sci. Fenn. Ser., № 299, 1961.
6. *M. Tsuji.* Theory of meromorphic functions, Jap. J. Math., 19, 1944, 139—154.
7. *К. Носиро.* Предельные множества, И.Л.М., 1963.
8. *Б. А. Фукс.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М.—Л., 1962.
9. *G. Evanc.* Potential and positively infinite singularites, Mh. Math. Phys., 43, 1936, 419—424.
10. *P. Begmihl.* Curvilinear cluster sets, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 41, 1955, 379—382.
11. *G. Young.* A generalisation of Bagmihls theorem, Michigan Math. J., 8, № 2, 1961, 193—200.
12. *А. Г. Джваршейшвили.* Предельные множества и теоремы единственности. Труды матем. ин-та АН ГССР, т. 38, 1970, 44—51.
13. *П. Монтель.* Нормальные семейства аналитических функций, М.—Л., 1936.
14. *E. Линделёф.* Sur un principe gènèral de l'analyse et ses applications, Acta Soc. Sci. Fenn., 46, № 4, 1915, 1--35.