ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

Х. МАЛОНЕК

ТЕОРЕМЫ ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЁФА ДЛЯ РЕШЕНИЙ КОМПЛЕКСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Предметом настоящей работы является исследование поведения роста непрерывных решений некоторых комплексных дифференциальных неравенств с частными производными в угловом пространстве. Свойства этих решений, изложенные в § 1, делают возможным приводить все рассмотрения к случаю голоморфных функций.

В качестве разультата получены теоремы типа Фрагмена-Линделёфа. При допущении некоторого (зависящего только от угла раствора) максимального роста решений внутри углового пространства из ограниченности на границе следует их ограниченность внутри углового пространства. При этом классический случай голоморфных функций содержится как частный случай.

§ 1. Некоторые свойства решений комплексных дифференциальных неравенств с частными производными

Рассмотрим в области G комплексной плоскости $\mathbf{C}$ однозначные непрерывные решения $w(z)$ комплексных дифференциальных неравенств вида

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant K(z)\,|w(z)| \tag{1}$$

и

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant \tilde{K}(z) \tag{2}$$

(z^* означает сопряженное с z комплексное число).

Производная функции $w(z)$ понимается при этом как обобщенная производная в смысле Соболева. Кроме того допустим, что $K(z)$ и $\tilde{K}(z)$—определенные в $\mathbf{C}$ вещественные и неотрицательные функции, принадлежащие некоторому введенному И. Н. Векуа [9] пространству $L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p>2$. Если $K(z)$ и $\tilde{K}(z)$—заданные только в G функции, то предположим, что они вне G равняются нулю.

Класс дифференциальных неравенств (1) формально совпадает с классом дифференциальных неравенств, однозначными решениями которых являются введенные Л. Берсом [2] аппроксимативно-аналитические функции (approximatively analytic functions). Но, например, Х. Бегер [1] предполагает в случае неограниченной области G, что $K(z)$—вещественные неотрицательные и ограниченные сверху функции, для которых имеет место

$$K(z) = O(|z|^{-\sigma}) \text{ при } |z| \to \infty,\ \sigma > 1. \tag{3}$$

Легко показать, что такие $K(z)$ принадлежат некоторому пространству $L_{p,2}(\mathbf{C})$ (например, если $p = 2\sigma$), однако в каждом $L_{p,2}(\mathbf{C})$-пространстве существуют функции, для которых не выполнено условие (3). Это показывает следующее рассуждение.

По определению [см. [9], стр. 29] $f(z)$ принадлежит $L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p>2$, если она удовлетворяет условиям

1. $f(z) \in L_p(E_1)$, где $E_1 = \{z: |z| \leqslant 1\}$ и
2. $f_2(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)|z|^{-2} \in L_p(E_1)$.

Функция, удовлетворяющая этим условиям, но не удовлетворяющая условию (3), была бы, например, постоянная в E_1 и в остальной плоскости $\mathbf{C}$ неограниченная функция f от $|z| = r$, для которой

$$F(r) = \left|f\left(\frac{1}{r}\right)\right|^p r^{1-2p}\ (0 \leqslant r \leqslant 1)$$

является неограниченной, но интегрируемой функцией*. Тем самым класс дифференциальных неравенств (1) при условии

$$K(z) \in L_{p,2}(\mathbf{C}),\ p>2, \tag{4}$$

шире чем класс неравенств, который рассматривал Х. Бегер.

Отметим еще, что функция

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta = T_{\mathbf{C}}\, g,\ (\zeta = \xi + i\eta), \tag{5}$$

где

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{w(z)}\, \dfrac{\partial w(z)}{\partial z^*}, & \text{если } z \in G \setminus N, \\ 0, & \text{если } z \in N, \end{cases}$$

(N означает множество нулей функции $w(z)$ в G), определена, непре-

---

* $F(r)$ можно представить себе, например, в виде неотрицательной функции которая вне некоторых, содержащихся в $0 \leqslant r \leqslant 1$ интервалах

$$\delta_n\left(\frac{1}{n+1} < \delta_n < \frac{1}{n};\ n = 1,\ 2,\ 3, \cdots\right)$$

обращается в нуль. Во внутренности δ_n она является непрерывной функцией, принимающей в качестве максимума зависящие от $f(z)$ ($|z| \geqslant 1$) значения, которые вместе с n неограниченно возрастают. Интегрируемость функции $F(r)$ гарантируется тогда выбором достаточно малых δ_n.

рывна и ограничена на всей плоскости $\mathbf{C}^*$. Из основной леммы Векуа ([9], стр. 156) следует тогда, что $w(z)\,e^{-\omega(z)}$ является голоморфной функцией.

Перейдем теперь к свойствам аппроксимативно-аналитических функций, т. е. непрерывных (однозначных) решений (1) и непрерывных решений (2), которые позволяют приводить все к голоморфному случаю.

Аппроксимативно-аналитические функции допускают, во-первых, факторизацию [2] (в случае ограниченных областей ср. [8]), именно представляются в виде

$$w(z) = \Phi(z)\cdot w_0(z), \tag{6}$$

где $\Phi(z)$ — некоторая голоморфная функция, а $w_0(z) = e^{\omega(z)}$ и $\omega(z)$ определяется как в (5).

В случае непрерывных решений $w(z)$ неравенства (2) можно из них извлечь голоморфное слагаемое $\tilde{\Phi}(z)$, т. е. имеет место

$$w(z) = \tilde{\Phi}(z) + \bar{w}_0(z), \tag{7}$$

при этом

$$\bar{w}_0(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{C}} \frac{\frac{\partial w(\zeta)}{\partial \zeta^*}}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta = T_{\mathrm{C}}\left(\frac{\partial w}{\partial z^*}\right)^{**}$$

и (7) следует в силу леммы Вейля из того факта, что

$$\frac{\partial(w - \tilde{w}_0)}{\partial z^*} = 0.$$

В обоих случаях функции $w_0(z)$ и $\bar{w}_0(z)$ определены, непрерывны и ограничены на всей плоскости $\mathbf{C}$.

В дальнейшем мы укажем некоторые оценки для функций, порожденных оператором T_{C}.

Во-первых, приведем основанную на неравенстве Гельдера оценку при помощи нормы пространства $L_{p,2}(\mathbf{C})$ (см. [9], стр. 30). Мы обозначаем норму через $\|\cdot\|_{p,2}$.

---

* Надо, конечно, при этом предполагать, что быть может несобственный интеграл (5) абсолютно сходится. В нашем случае (4) было бы достаточно предположение, что $\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}$ принадлежит $L_{p,2}(\mathrm{C})$ (w и g полагаем равными 0 вне G), так как измеримая функция $|g(z)|^p$ на E_1 мажорируется интегрируемой функцией $K(z)^p$ и $\left|g\left(\frac{1}{z}\right)\right|^p \cdot |z|^{-2p}$ мажорируется функцией $K\left(\frac{1}{z}\right)^p \cdot |z|^{-2p}$. Тем самым обе функции являются интегрируемыми на E_1. Отсюда вытекает, что $g(z) \in L_{p,2}(\mathrm{C})$ и следовательно существует (5).

** О существовании интеграла ср. примечание 2.

Имеет место следующее

Предложение. Если функция $\varphi(z) \in L_{p,2}(C)$, удовлетворяет условию

$$|\varphi(z)| \leqslant K(z) \quad (\tilde{K}(z))^*,$$

то выполняется неравенство ([9], стр. 60)

$$|T_C \varphi(z)| \leqslant M_p \|\varphi(z)\|_{p,2} \leqslant M_p \|K(z)\|_{p,2}, \tag{8}$$

причем M_p есть зависящая только от p постоянная. Она определяется ([9], стр. 54) таким образом:

$$M_p = \frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi(p-1)}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot 2^{\frac{p-2}{p}}. \tag{9}$$

Другую оценку для $T_C\varphi$ в случае, когда $K(z)$ принимает специальный вид (все, конечно, имеет место аналогично для $\tilde{K}(z)$)

$$K(z) = \begin{cases} K, & \text{если } |z| \leqslant r_0 \\ K\dfrac{r_0^\gamma}{|z|^\gamma}, & \text{если } |z| \geqslant r_0 \quad (\gamma > 2,\ r_0 > 0,\ K = \text{const}) \end{cases} \tag{10}$$

получается при помощи введения полярных координат. Эта граница вычисляется легче чем в первом случае, так как выражается довольно просто через величины K, r_0 и γ. Кроме того, она при некоторых условиях точнее чем первая граница, как будет показано в дальнейшем на примере.

Пусть $K(z)$ имеет вид (10). Тогда очевидно имеет место

$$|T_C\varphi| \leqslant \frac{1}{\pi}\iint_C \frac{K(\zeta)}{|\zeta - z|}\, d\xi d\eta.$$

Если введем интегралы

$$I_1 = \iint_{|\xi| < r_0} \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\xi d\eta,$$

$$I_2 = \iint_{|\xi| \geqslant r_0} \frac{1}{|\zeta|^\gamma |\zeta - z|}\, d\xi d\eta,$$

то тем самым получим

$$|T_C\varphi| \leqslant \frac{K}{\pi}\,(I_1 + r_0^\gamma I_2). \tag{11}$$

Легко сообразить, что

$$I_1 \leqslant 2\pi r_0. \tag{12}$$

---

* Как всегда имеется в виду, что $K(z)$ и $\tilde{K}(z)$ принадлежат $L_{p,2}(C)$, $p > 2$.

Чтобы оценить I_2 рассмотрим круг радиуса $\rho > 0$, центр которого находится в точке z и два множества P и Q точек ζ, причем

$$Q = \{\zeta: |\zeta - z| \leqslant \rho \text{ и } |\zeta| \geqslant r_0\},$$
$$P = \{\zeta: |\zeta - z| \geqslant \rho \text{ и } |\zeta| \geqslant r_0\}.$$

Тогда получим

$$\iint\limits_Q \frac{1}{|\zeta - z||\zeta|^\gamma}\, d\xi d\eta \leqslant \iint\limits_{|\zeta - z| \leqslant \rho} \frac{1}{|\zeta - z|\, r_0^\gamma}\, d\xi d\eta = 2\pi \frac{\rho}{r_0^\gamma},$$

$$\iint\limits_P \frac{1}{|\zeta - z||\zeta|^\gamma}\, d\xi d\eta \leqslant \iint\limits_{|\,|>r_0} \frac{1}{\rho |\zeta|^\gamma}\, d\xi d\eta = 2\pi \frac{1}{\rho(\gamma - 2) r_0^{\gamma-2}}$$

и

$$I_2 = \iint\limits_Q + \iint\limits_P \leqslant \frac{2\pi}{r_0^{\gamma-2}} \left(\frac{\rho}{r_0^2} + \frac{1}{\rho(\gamma - 2)}\right).$$

Как легко проверить, минимальное значение правой части неравенства достигается при $\rho = \frac{r_0}{\sqrt{\gamma - 2}}$, так что мы наконец получим

$$I_2 < \frac{4\pi}{r_0^{\gamma-1}\sqrt{\gamma - 2}}. \tag{13}$$

(11), (12) и (13) вместе дают окончательную оценку

$$|T_C \varphi| \leqslant 2Kr_0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\gamma - 2}}\right), \tag{14}$$

если только $|\varphi(z)| \leqslant K(z)$ ((14) аналогично имеет место для $\tilde{K}(z)$).

В конце этого параграфа мы сравним обе оценки (8) и (14) в случае, когда $K(z)$ принимает вид (10). Для простоты считаем при этом $r_0 = 1$. Так как $K(z)$ по-видимому удовлетворяет условиям Х. Бегера ($K(z)$ — вещественная, неотрицательная и ограниченная сверху функция, для которой выполняется (3)), то она принадлежит некоторому $L_{p,\,2}$(C)-пространству и (ср. [9], стр. 30)

$$\|K(z)\|_{p,\,2} = \|K(z)\|_p + \|K_2(z)\|_p, \quad p > 2,$$

где $K_2 = K\left(\frac{1}{z}\right)|z|^{-2}$ и $\|\cdot\|_p$ означает норму пространства $L_p(E_1)$.

В силу (10)

$$\|K(z)\|_{p,\,2} = K\pi^{\frac{1}{p}} + K\left(\frac{2\pi}{2 + (\gamma - 2)p}\right)^{\frac{1}{p}} = K\pi^{\frac{1}{p}}\left(1 + \left(\frac{2}{2 + (\gamma - 2)p}\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Вместе с (9) это дает (8) точное значение оценки при помощи $L_{p,\,2}$(C)-нормы, именно

$$|T_C\varphi|\leqslant 3K\cdot 2^{\frac{2p-3}{p}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(1+\left(\frac{2}{2+(\gamma-2)p}\right)^{\frac{1}{p}}\right),\ p>2.$$

Следовательно, (14) лучше чем (8), когда выполняется неравенство

$$2\left(1+\frac{2}{\sqrt{\gamma-2}}\right)<3\cdot 2^{\frac{2p-3}{p}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(1+\left(\frac{2}{2+(\gamma-2)p}\right)^{\frac{1}{p}}\right). \tag{15}$$

Так как $p>2$, $\gamma>2$ непосредственно видно, что

$$\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p}}>1 \text{ и } \left(1+\left(\frac{2}{2+(\gamma-2)p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)>1.$$

Следовательно

$$3\cdot 2^{\frac{2p-3}{p}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(1+\left(\frac{2}{2+(\gamma-2)p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)>3\cdot 2^{\frac{2p-3}{p}}.$$

Это неравенство можно еще продолжить, замечая что $2^{\frac{2p-3}{p}}>\sqrt{2}$, так как $p>2$. Значит, если требуем

$$2\left(1+\frac{2}{\sqrt{\gamma-2}}\right)<3\sqrt{2},$$

то обязательно выполняется (15). Но последнее неравенство ничего другого не означает как то, что

$$\gamma>2+\frac{2}{(3-\sqrt{2})^2},$$

то есть по меньшей мере при таких γ оценка вида (14) дает точнее границы для $T_C\varphi$, чем всякая оценка (8) при помощи $L_{p,2}(\mathbf{C})$-норм, если только $K(z)$ (аналогично $\widetilde{K}(z)$) имеет вид (10).

§ 2. Оценки в угловых пространствах

В силу изложенных в § 1 свойств аппроксимативно-аналитических функций имеет место следующая

Теорема 1. (Теорема Фрагмена-Линделёфа [6] для аппроксимативно-аналитических функций*. *Пусть в угловом пространстве*

$$G=\{z\colon 0<\arg z<\alpha\pi,\ 0<\alpha\leqslant 2\} \tag{16}$$

$w=w(z)$ является аппроксимативно-аналитической функцией и удовлетворяет следующим условиям:

Для каждой конечной точки ζ, граничной для области G,

---

* Для голоморфных функций теорема в этом виде была доказана в [5].

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\, |w(z)| \leqslant C, \; C = \text{const}, \; z \in G, \tag{17}$$

и кроме того

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_w(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant 0, \; z = re^{i\varphi}, \tag{18}$$

где

$$M_w(r) = \sup_{|z|=r} |w(z)|.$$

Тогда в области G

$$|w(z)| \leqslant k \cdot C \tag{19}$$

и постоянную k, *зависящую только от* $p > 2$ *и* $K(z)$, *можно оценить следующим образом:*

$$1 \leqslant k \leqslant e^{2M_p \|K(z)\|_{p,2}} \tag{20}$$

или в случае, когда $K(z)$ *имеет вид* (10)

$$1 \leqslant k \leqslant e^{4Kr_0\left(1+\frac{2}{\sqrt{\gamma-2}}\right)}. \tag{21}$$

Если $|w(z_0)| = k \cdot C$ *в некоторой точке* $z_0 \in G$, *то* $w(z)$ *является обобщенной константой*.*

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что $w(z) \not\equiv 0$. Тогда существует такая голоморфная функция $\Phi(z)$, что, соответственно (6)

$$w(z) = \Phi(z)\, e^{\omega(z)} \quad (z \in G), \tag{22}$$

причем $\omega(z)$ является определенной в (5) функцией.

В силу (1)

$$|\omega(z)| \leqslant D \quad (z \in \mathbf{C}), \tag{23}$$

где D в случае (4) равно $M_p \|K(z)\|_{p,2}$, а в случае (10) мы имеем

$$D = Kr_0\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\gamma-2}}\right).$$

Так как $|\mathrm{Re}\,\omega| \leqslant |\omega| \leqslant D$, то

$$e^{-D} \leqslant e^{\mathrm{Re}\,\omega(z)} \leqslant e^{D} \quad (z \in \mathbf{C}). \tag{24}$$

Пусть

$$S = \inf_{\zeta\in\partial G} e^{\mathrm{Re}\,\omega(z)}, \tag{25}$$

причем ζ — конечная точка и ∂G означает границу области G. Тогда

$$e^{-D} \leqslant S \leqslant e^{D}. \tag{26}$$

---

* Определение обобщенной константы см. [9], стр. 166.

В силу (17), (25) и непрерывности функции $\omega(z)$ тем самым для абсолютной величины голоморфной функции $\Phi(z)$ должно иметь место неравенство (где вместо $\frac{C}{S}$ пишется T)

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\ |\Phi(z)| \leqslant \frac{C}{\inf\limits_{\zeta\in\partial G} e^{\operatorname{Re}\omega(\zeta)}} = T, \tag{27}$$

а соответствующее условие для $|\Phi(z)|$ получается следующим образом:

Условие (18), которое налагает определенное ограничение на возможный рост $|w(z)|$ при $|z|\to\infty$, эквивалентно следующему. Для любого $\varepsilon>0$ существует строго монотонно возрастающая неограниченная последовательность $\{R_n\}$ положительных чисел $R_n = R_n(\varepsilon)$ такая, что

$$|w(z)| < e^{\varepsilon|z|^{\frac{1}{\alpha}}}, \text{ при } |z| = R_n \ (n=1, 2, 3, \cdots). \tag{28}$$

(22), (24) и (28) вместе дают нам

$$|\Phi(z)|\, e^{-D} < |w(z)| \leqslant e^{\varepsilon|z|^{\frac{1}{\alpha}}}, \text{ при } |z| = R_n \ (n=1, 2, 3, \cdots),$$

то есть

$$|\Phi(z)| < e^{\varepsilon|z|^{\frac{1}{\alpha}}+D}, \text{ при } |z| = R_n \ (n=1, 2, 3, \cdots).$$

В силу неравенств

$$\frac{\ln|\Phi(z)|}{|z|^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant \frac{\ln M_\Phi(|z|)}{|z|^{\frac{1}{\alpha}}} < \varepsilon + \frac{D}{|z|^{\frac{1}{\alpha}}}, \text{ при } |z| = R_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

и произвольности ε имеем, что

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\ln M_\Phi(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant 0, \tag{29}$$

и мы получили искомое условие для $|\Phi(z)|$*.

Наконец, (27) и (29) позволяют нам применить классическую теорему Фрагмена-Линделёфа к голоморфной функции $\Phi(z)$, в силу которой должно иметь место неравенство

$$|\Phi(z)| \leqslant T \tag{30}$$

при всех $z\in G$.

---

* lim inf, конечно, может быть равен $-\infty$.

Чтобы теперь из (30) сделать вывод относительно функции $w(z)$, введем обозначение

$$S' = \sup_{z \in G} e^{\operatorname{Re}\omega(z)} \leqslant e^{D}. \tag{31}$$

Так как $\operatorname{Re}\omega(z)$ является непрерывной в $\overline{G}$ функцией, то

$$S < S'. \tag{32}$$

Оценки (30) и (31) вместе нам дают $(z \in G)$

$$|w(z)| = |\Phi(z)|^{\operatorname{Re}\omega(z)} \leqslant T \cdot S' = \frac{C}{S} \cdot S' = kC,$$

причем $k = \dfrac{S'}{S}$, откуда сразу вытекают оценки (20) и (21) для k, если учесть (26), (31) и (32), а именно

$$1 \leqslant \frac{S'}{S} = k \leqslant e^{2D}$$

(вместо D надо подставить соответствующие значения).

Остается рассмотреть еще случай, когда

$$|w(z_0)| = k \cdot C$$

во внутренней точке $z \in G$. Это означает, что

$$|\Phi(z_0)|\, e^{\operatorname{Re}\omega(z_0)} = k \cdot C = S' \cdot T \quad (z_0 \in G),$$

откуда следует

$$|\Phi(z_0)| = T. \tag{33}$$

Допустим противное. Если $|\Phi(z_0)| > T$, $z_0 \in G$, то это противоречит (30). Если $|\Phi(z_0)| < T$, то должно иметь место

$$e^{\operatorname{Re}\omega(z_0)} > S',$$

что противоречит (31). Следовательно, имеет место (33).

Применяя принцип максимума для голоморфных функций, из (33) получим

$$\Phi(z) \equiv c = \text{const}.$$

Следовательно, $w(z)$ имеет вид

$$w(z) = c \cdot e^{\omega(z)} \quad (z \in G),$$

т. е. действительно является обобщенной константой. Тем самым теорема полностью доказана.

Следствие: Однозначные непрерывные решения дифференциального уравнения типа Векуа

$$\frac{\partial w(z)}{\partial z^*} = A(z)\, w(z) + B(z)\, w^*(z),$$

где A, $B \in L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p > 2$, очевидно являются аппроксимативно-аналитическими функциями. Они удовлетворяют дифференциальному неравенству вида (1), причем

$$K(z) = |A(z)| + |B(z)|.$$

Применяя теорему 1 к этому классу функций, мы получим теорему Фрагмена-Линделёфа для обобщенных аналитических функций. Другое доказательство такой теоремы путем прямого применения классических методов доказательства на случай обобщенных аналитических функций имеется в [3].

Теорема 2 (Теорема Фрагмена-Линделёфа для однозначных непрерывных решений (2)). *Пусть G есть определенная в* (16) *область из* $\mathbf{C}$, $w = w(z)$—*однозначное непрерывное решение* (2), *причем* $\tilde{K}(z) \in L_{p,2}(\mathbf{C})$, $p > 2$. *Если* $w(z)$ *удовлетворяет условиям* (17) *и* (18) *теоремы* 1, *то в области* G *имеет место неравенство*

$$|w(z)| \leq \tilde{k} + C \tag{34}$$

и постоянную $\tilde{k}$ *можно в общем случае оценить так*:

$$0 \leq \tilde{k} \leq 2M_p \|\tilde{K}(z)\|_{p,2}, \tag{35}$$

а если $\tilde{K}(z)$ *имеет специальный вид, аналогичный* (10), *то имеет место оценка*

$$0 \leq \tilde{k} \leq 4\tilde{K} r_0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\gamma - 2}}\right). \tag{36}$$

Если имеет место знак равенства в (34) *для хотя бы одной внутренней точки* $z_0 \in G$, *то* $w(z)$ *можно представить в виде*

$$w(z) = c + T_{\mathbf{C}}\left(\frac{\partial w}{\partial z^*}\right), \quad c = \text{const}. \tag{37}$$

Доказательство. Как было замечено в § 1, функция $w(z)$ допускает разложение в виде суммы двух слагаемых

$$w(z) = \tilde{\Phi} + \tilde{w}_0, \tag{38}$$

причем в силу (7) $\tilde{\Phi}$ является голоморфной функцией, а $\tilde{w}_0 = T_{\mathbf{C}}\left(\frac{\partial w}{\partial z^*}\right)$ есть определенная в $\mathbf{C}$ непрерывная и ограниченная функция.

В силу (2), с использованием (8) и (14), мы получим

$$|\tilde{w}_0(z)| \leq M_p \|\tilde{K}(z)\|_{p,2} \quad (z \in \mathbf{C}), \tag{39}$$

если $\tilde{K}(z)$ имеет общий вид (4), и

$$|\tilde{w}_0(z)| \leq 2\tilde{K} r_0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\gamma - 2}}\right) \quad (z \in \mathbf{C}), \tag{40}$$

если $\breve{K}(z)$ принимает специальный вид (10). Обе границы обозначим буквой $\tilde{D}$.

Подобно доказательству теоремы 1 введем величины

$$\breve{S} = \sup_{\zeta \in \partial G} |\breve{w}_0(\zeta)| \quad (\zeta - \text{конечно}) \tag{41}$$

и

$$\tilde{S}' = \sup_{z \in G} |\tilde{w}_0(z)|, \tag{42}$$

для которых в силу (39) и (40) имеем

$$\begin{cases} 0 \leqslant \tilde{S} \leqslant \breve{D} \\ 0 \leqslant \tilde{S}' \leqslant \breve{D}. \end{cases} \tag{43}$$

Так как

$$|\breve{\Phi}(z)| = |w(z) - \breve{w}_0(z)| = |w(z)| + |\breve{w}_0(z)|, \ z \in G, \tag{44}$$

то в силу (17), (41) и непрерывности функции $\tilde{w}_0(z)$, имеет место

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} |\breve{\Phi}(z)| \leqslant \overline{\lim_{z \to \zeta}} |w(z)| + \breve{S} \leqslant C + \breve{S}, \tag{45}$$

т. е. голоморфное слагаемое на границе области G ограничено.

С другой стороны, из (18) вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует строго монотонно возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел $\{R_n\}$, такая что имеет место (28). Вместе с (44) это нам дает

$$|\breve{\Phi}(z)| < e^{\varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}} + \breve{D} = e^{\varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 + e^{\ln \breve{D} - \varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}}\right), \text{ при } |z| = R_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Отсюда, в силу

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln \left(1 + e^{\ln \breve{D} - \varepsilon r^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} = 0,$$

получим аналогично доказательству теоремы 1

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M_{\breve{\Phi}}(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant 0. \tag{46}$$

Для $|\breve{\Phi}(z)|$ (45) и (46) представляют собой условия классической теоремы Фрагмена-Линделёфа, так что внутри области G должно иметь место

$$|\tilde{\Phi}(z)| \leq C + \tilde{S}. \tag{47}$$

Тогда внутри G $w(z)$ можем оценить так

$$|w(z)| \leq |\tilde{\Phi}(z)| + |\tilde{w}_0(z)| \leq C + \tilde{S} + \tilde{S}'$$

и, тем самым, получили доказываемое неравенство (34), подставляя $\tilde{S} + \tilde{S}' = \tilde{k}$.

Оценки (35) и (36) для $\tilde{k}$ вытекают тривиальным образом из оценок (41) для $\tilde{S}$ и $\tilde{S}'$.

Если теперь положить $|w(z_0)| = \tilde{k} + C$ для некоторого $z_0 \in G$, то это означает, что

$$|\tilde{\Phi}(z_0)| = C + \tilde{S} \quad (z_0 \in G), \tag{48}$$

так как $|\tilde{\Phi}(z_0)| > C + \tilde{S}$ противоречит (47), а с другой стороны, из

$$|\tilde{\Phi}(z_0)| < C + \tilde{S}$$

следовало бы

$$\tilde{S} + \tilde{S}' + C = |w(z_0)| \leq |\tilde{\Phi}(z_0)| + |\tilde{w}_0(z_0)| < C + \tilde{S} + |\tilde{w}_0(z_0)|,$$

то есть $|\tilde{w}_0(z_0)| > \tilde{S}'$.

Но это противоречит (42), так что (48) действительно имеет место. Рассуждая дальше аналогично доказательству теоремы 1, получим (7), и теорема полностью доказана.

Следствие. Пусть $w_j(z)$ есть компонента непрерывного вектора $(w_1(z), w_2(z), \cdots, w_m(z))$ и

$$\frac{\partial w_j(z)}{\partial z^*} = f_j(z, w_1(z), w_2(z), \cdots, w_m(z)) \quad (j=1, 2, 3, \cdots, m)$$

— некоторая, быть может нелинейная, система комплексных дифференциальных уравнений с частными производными и непрерывными правыми частями. (Системы такого рода рассматривал В. Тучке в [7]).

Если только все f_j обладают равномерно для всех $w_1, w_2, \cdots, w_m$ некоторой мажорантой $K(z) \in L_{p,2}(\mathbf{C})$, то простым применением теоремы 2 получаем теоремы типа Фрагмена-Линделёфа для решений таких систем (ср. [3]).

Х. Меден рассматривал в [4] случай $j=1$ с условием (3) для функции $f(z, w(z))$.

В заключение хочу выразить благодарность профессору В. Тучке за постоянное внимание и советы при выполнении настоящей работы.

Секция математики университета
им. Мартина Лютера, Халле (ГДР)

Поступила 8.IX.1975

Հ. ՄԱԼՈՆԵԿ. Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի տիպի թեորեմներ մասնական ածանցյալներով կոմպլեքս դիֆերենցիալ անհավասարությունների լուծումների համար *(ամփոփում)*

Դիտարկվում են (1), (2) մասնական ածանցյալներով կոմպլեքս դիֆերենցիալ անհավասարությունների միարժեք անընդհատ լուծումներ։ Այսպիսի լուծումների համար ապացուցվում են երկու թեորեմ, որոնք իրենցից ներկայացնում են հոլոմորֆ ֆունկցիաների համար Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի հայտնի թեորեմի անալոգը։

Նկատենք, որ (1) անհավասարության քննարկված լուծումները համընկնում են Լ. Բերսի ապրոկսիմատիվ անալիտիկ ֆունկցիաների հետ։

H. MALONEK. *Theorems of Phragmen—Lindelöf type for solutions of complex partial differential inequalities* (summary)

The paper investigates continuous solutions of complex partial differential inequalities

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant K(z)|w(z)|$$

and

$$\left|\frac{\partial w(z)}{\partial z^*}\right| \leqslant \tilde{K}(z)$$

where $K(z)$ and $\tilde{K}(z)$ are real nonnegative functions, defined in C. K, $K \in L_{p,2}(C)$ ($p > 2$, see I. N. Vekua [9]). For such solutions two theorems are proved which are analogus to the well-known Phragmen-Lindelöf theorems for holomorphic functions.

The solutions of the first inequality are approximatively analytic functions of L. Bers. The case of generalized analytic functions is a special case of approximatively analytic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Begehr*. Zur Wertverteilung approximativ analytischer Funktionen, Arch d. Math., XXIII, 1972, 41—49.
2. *L. Bers*. Theory of pseudo-analytic functions, Institute of Mathematics and Mechanics, New York University, New York, 1953. (Гектографированная разработка лекций).
3. *Х. Малонек*. Принцип Фрагмена-Линделёфа для обобщенных аналитических функций, Дипломная работа, Халле—Ереван, 1974.
4. *H. Meden*. Eine Verallgemeinerung des Reziprozitätstheorems für Lösungen auch nichtlinearer partieller komplexer Differentialgleichungen, Math. Nachr., 63, 1974, 223—227.
5. *F. u. R. Nevanlinna*. Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. Sci fenn. 50 Nr. 5, 1922.
6. *E. Phragmén, E. Lindelöf*. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, Acta math., 31, 1908.
7. *W. Tutschke*. Über Fixpunktmethoden in der Theorie partieller komplexer Differentialgleichungen (содержится в J. Naas, Beiträge zur komplexen Analysis und deren Anwendungen in der Differentialgeometrie, Berlin, 1974, 31—41).
8. *W. Tutschke*. Abspaltung holomorpher Faktoren aus Lösungen von Differentialungleichungen, Math. Nachr. (в печати).
9. *И. Н. Векуа*. Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.