

С. К. АФЯН

ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим в круге $|z| \leq 1$ ($z = x + iy$) уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(q \frac{\partial u}{\partial z} \right) + a_1 \frac{\partial u}{\partial z} + a_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + a_3 \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + a_4 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + a_5 u + a_6 \bar{u} = h, \quad (1.1)$$

где $u = u(z) = u_1(x, y) + iu_2(x, y)$ — искомая функция; $a_1 = a_1(z)$, $a_2 = a_2(z)$, $\dots$, $a_6 = a_6(z)$, $h = h(z)$ — заданные функции класса $C^1(|z| \leq 1)$; $q = q(z)$ — также заданная из класса $C^1(|z| \leq 1)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$|q(z)| \neq 1 \text{ при } |z| < 1 \text{ и } |q(z)| = 1 \text{ при } |z| = 1, \quad (1.2)$$

$$1 - \bar{q}q = q_1(z)(1 - \bar{z}z)^\beta \text{ и } 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad (1.3)$$

где

$$q_1(z) \in C^1(|z| \leq 1) \text{ и } q_1(z) \neq 0; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (1.5)$$

Уравнение (1) есть комплексная запись некоторой системы дифференциальных уравнений, которая, в силу условия (2), эллиптична внутри круга $|z| < 1$ и вырождается на всей границе $|z| = 1$. Условия (1.2) — (1.4) выражают характер вырождения.

Основная цель этой работы заключается в следующем: выяснить, какие краевые задачи для уравнения (1.1), в зависимости от характера вырождения, являются нетеровыми.

В работе [3] изучена задача Римана-Гильберта для уравнения (1.1) в классе $C^1_2(|z| \leq 1) \cap C^\alpha(|z| < 1)$ ($0 < \alpha < 1$) в том случае, когда $0 < \beta \leq 1$. Обозначим через $E_\beta \left(0 < \beta < \frac{1}{2} \right)$ класс функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$u(z) \in C^\alpha(|z| < 1), \quad u(z) \in C_\alpha(|z| \leq 1), \quad (1.6)$$

$$(1 - \bar{z}z)^\beta \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \in C_\alpha(|z| \leq 1), \quad 0 < \alpha < 1 - 2\beta. \quad (1.7)$$

В настоящей работе рассматривается следующая задача: найти решение уравнения (1.1) в классе E , удовлетворяющее следующим условиям:

$$\lim_{z \rightarrow t} \operatorname{Re} \left[(1 - z \bar{z})^q u(t) \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \gamma(t), \quad |t| = 1, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{Re} [\lambda(t) u(t)] = \rho(t), \quad |t| = 1, \quad (1.9)$$

где $\mu(t)$, $\gamma(t)$, $\lambda(t)$ и $\rho(t)$ — заданные функции класса $C^1(|z|=1)$, причем $\lambda(t)$, $\mu(t)$ и $\mu(t) - \bar{q}(t) \overline{\mu(t)}$ отличны от нуля при любом t , $|t|=1$. Обозначим

$$m = \frac{1}{2\pi} [\arg \overline{\mu(t)}]_{|t|=1}, \quad n = \frac{1}{2\pi} [\arg \lambda(t)]_{|t|=1}, \quad (1.10)$$

где символ $[]_{|t|=1}$ означает приращение функции, заключенной в скобках, при однократном обходе единичной окружности в направлении против часовой стрелки.

Не ограничивая общности (см. [1], стр. 229—233), рассмотрим случай, когда краевое условие (1.9) имеет следующий простой вид:

$$\operatorname{Re} [t^{-n} u(t)] = 0 \quad \text{при } |t| = 1. \quad (1.11)$$

Рассматриваемую задачу будем называть задачей (1.1), (1.8), (1.11).

Индексом κ задачи (1.1), (1.8), (1.11) называется разность $k_0 - k_1$, где k_0 — число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи ($h(z)=0$, $\gamma(t)=0$), а k_1 — число линейно независимых условий, при которых разрешима неоднородная задача.

В работе получен следующий результат:

1. Краевая задача (1.1), (1.8), (1.11) приведена к уравнению вида $u - Au = f$ с вполне непрерывным оператором A ,
2. Доказана нетеровость задачи,
3. В случае $n \geq 0$, $m \geq 0$ получена оценка для индекса κ .

§ 2. Исследование задачи (1.1), (1.8), (1.11)

Сначала приведем две леммы.

Лемма 2.1. Если функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$ линейно независимы в круге $|z| < 1$, то существуют точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ ($|z_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$) такие, что

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(z_1) & \varphi_2(z_1) & \cdots & \varphi_n(z_1) \\ \varphi_1(z_2) & \varphi_2(z_2) & \cdots & \varphi_n(z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(z_n) & \varphi_2(z_n) & \cdots & \varphi_n(z_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство очевидно.

Лемма 2.2. Пусть $\psi(z)$ — аналитическая в круге $|z| < 1$ функция и $q(z)$ — функция из класса $C^1(|z| \leq 1)$. Если функция $\psi(z)$ —

— $q(z) \overline{\psi(z)}$ непрерывна в круге $|z| \leq 1$ и граничное значение принадлежит классу C_α ($|z|=1$), $0 < \alpha < 1$, то $\psi(z)$ принадлежит классу C_α ($|z| \leq 1$).

Доказательство. Пусть $\omega(z)$ — некоторая функция из класса C^1 ($|z| \leq 1$) и такая, что $\omega(z) - q(z) \overline{\omega(z)} \neq 0$ в некоторой окрестности окружности $|z|=1$. Обозначим

$$\operatorname{Re} \{ \omega(z) [\psi(z) - q(z) \overline{\psi(z)}] \}_{|z|=r} = f_r(z). \quad (2.1)$$

Отсюда легко получаем

$$\operatorname{Re} \{ [\omega(z) - q(z) \overline{\omega(z)}] \psi(z) \}_{|z|=r} = f_r(z). \quad (2.2)$$

Из непрерывности функции $\omega(z) - q(z) \overline{\omega(z)}$ следует для r достаточно близкого к единице равенство

$$\frac{1}{2\pi} \left[\arg [\omega(z) - q(z) \overline{\omega(z)}] \right]_{|z|=r} = \frac{1}{2\pi} \left[\arg [\omega(z) - q(z) \overline{\omega(z)}] \right]_{|z|=1}. \quad (2.3)$$

Это число обозначим через k . Рассмотрим сначала случай, когда $k \geq 0$.

В круге $|z| \leq r$ при r достаточно близком к единице, функция $\psi(z)$, как решение известной задачи Римана-Гильберта с краевым условием (2.2), представится в виде (см. [2], стр. 151)

$$\psi(z) = Bf_r + d_0^{(r)} \varphi_0^{(r)}(z) + d_1^{(r)} \varphi_1^{(r)}(z) + \dots + d_{2k}^{(r)} \varphi_{2k}^{(r)}(z), \quad (2.4)$$

где

$$Bf_r = \frac{X_r(z)}{2\pi i} \left[\int_{|t|=r} \frac{f_r(t) dt}{(\omega - q \overline{\omega}) X_r^+(t)(t-z)} + z^{2k} \int_{|t|=r} \frac{f_r(t) dt}{t^{2k} (\omega - q \overline{\omega}) X_r^+(t)(t-z)} - z^{2k} \int_{|t|=r} \frac{f_r(t)}{t^{2k} (\omega - q \overline{\omega}) X_r^+(t)} \frac{dt}{t} \right], \quad (2.5)$$

$$X_r(z) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \ln \frac{\overline{\omega} - q \omega}{t^{2k} (\omega - q \overline{\omega})} \cdot \frac{dt}{t-z} \right], \quad (2.6)$$

$$\varphi_\nu^{(r)}(z) = \begin{cases} (z^\nu + z^{2k-\nu}) X_r(z) & \text{при } 0 \leq \nu \leq k-1 \\ z^k X_r(z) & \text{при } \nu = k \\ (z^\nu - z^{2k-\nu}) X_r(z) & \text{при } k+1 \leq \nu \leq 2k, \end{cases} \quad (2.7)$$

а $d_0^{(r)}, d_1^{(r)}, \dots, d_{2k}^{(r)}$ — некоторые действительные числа. Легко видеть, что функции $\varphi_0^{(r)}(z), \dots, \varphi_{2k}^{(r)}(z)$ линейно независимы относительно поля действительных чисел. То же самое верно и для предельных функций, когда r стремится к единице. Предельные функции будем обозначать соответственно через $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_{2k}(z)$. В силу леммы 2.1 существуют точки $z_0, z_1, \dots, z_{2k}$ ($|z_j| < 1, j=0, 1, \dots, 2k$), такие, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(z_0) & \varphi_1(z_0) & \cdots & \varphi_{2k}(z_0) \\ \varphi_0(z_1) & \varphi_1(z_1) & \cdots & \varphi_{2k}(z_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(z_{2k}) & \varphi_1(z_{2k}) & \cdots & \varphi_{2k}(z_{2k}) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.8)$$

Пусть r такое, что $|z_j| < r$, $j = 0, 1, \dots, 2k$. Из непрерывности функции $\varphi_j^{(r)}(z)$ по r (см. (2.7) и (2.6)) следует непрерывность определителя

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \varphi_0^{(r)}(z_0) & \varphi_1^{(r)}(z_0) & \cdots & \varphi_{2k}^{(r)}(z_0) \\ \varphi_0^{(r)}(z_1) & \varphi_1^{(r)}(z_1) & \cdots & \varphi_{2k}^{(r)}(z_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0^{(r)}(z_{2k}) & \varphi_1^{(r)}(z_{2k}) & \cdots & \varphi_{2k}^{(r)}(z_{2k}) \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

от r . Но так как $\Delta \neq 0$, то, взяв r достаточно близким к единице, получим, что Δ_r также отлично от нуля. Подставляя в (2.4) z_ν вместо z ($\nu = 0, 1, \dots, 2k$), получим

$$d_0^{(r)} \varphi_0^{(r)}(z_\nu) + d_1^{(r)} \varphi_1^{(r)}(z_\nu) + \cdots + d_{2k}^{(r)} \varphi_{2k}^{(r)}(z_\nu) = \psi(z_\nu) - (Bf_r)(z_\nu). \quad (2.10)$$

Пользуясь условием $\Delta_r \neq 0$, из системы (2.10) числа $d_j^{(r)}$ выразим через $\varphi_j^{(r)}(z_\nu)$, $\psi(z_\nu)$ и $(Bf_r)(z_\nu)$ ($j = 0, 1, \dots, 2k$; $\nu = 0, 1, \dots, 2k$). Теперь, принимая во внимание непрерывную зависимость от r всех выражений, входящих в $d_j^{(r)}$ ($j = 0, 1, \dots, 2k$), убедимся, что $d_0^{(r)}$, $d_1^{(r)}$, $\dots$, $d_{2k}^{(r)}$ имеют пределы при r стремящемся к единице, которые будем обозначать через d_0 , d_1 , $\dots$, d_{2k} . В силу условий леммы существует предел

$$f(z) = \lim_{r \rightarrow 1} f_r(z). \quad (2.11)$$

Переходя к пределу в (2.6), (2.5), (2.4) при $r \rightarrow 1$, получим

$$X(z) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \ln \frac{\bar{\omega} - q\omega}{t^{2k}(\omega - \bar{q}\bar{\omega})} \cdot \frac{dt}{t-z} \right], \quad (2.12)$$

$$Bf = \frac{X(z)}{2\pi i} \left[\int_{|t|=1} \frac{f(t) dt}{(\omega - \bar{q}\bar{\omega}) X^+(t)(t-z)} + z^{2k} \int_{|t|=1} \frac{f(t) dt}{t^{2k}(\omega - \bar{q}\bar{\omega}) X^+(t)(t-z)} - \right. \\ \left. - z^{2k} \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{t^{2k}(\omega - \bar{q}\bar{\omega}) X^-(t)} \cdot \frac{dt}{t} \right], \quad (2.13)$$

$$\psi(z) = Bf + d_0 \varphi_0(z) + d_1 \varphi_1(z) + \cdots + d_{2k} \varphi_{2k}(z), \quad (2.14)$$

где $X(z) = \lim_{r \rightarrow 1} X_r(z)$ и $Bf = \lim_{r \rightarrow 1} Bf_r$. Так как интеграл типа Коши отображает C_α ($|z|=1$) в C_α ($|z| \leq 1$), то в силу условий леммы, из (2.12) и (2.13) получим, что $Bf \in C_\alpha$ ($|z| \leq 1$). С другой стороны, функции $\varphi_j(z)$, как пределы функций (2.7), также принадлежат C_α ($|z| \leq 1$). Отсюда и из (2.14) следует утверждение леммы 2.2 в случае $k \geq 0$. В случае $k < 0$ вместо (2.14) будем иметь $\psi(z) = Bf$. Из этого, по до-

казанному выше, следует, что $\psi(z) \in C_\alpha (|z| \leq 1)$. Таким образом, лемма 2.2 полностью доказана.

Теперь перейдем к исследованию задачи (1.1), (1.8), (1.11).

Пусть функция $u(z)$ есть произвольное решение задачи (1.1), (1.8), (1.11). Тогда из (1.1) будем иметь (см. [1], стр. 42)

$$\frac{\partial u}{\partial z} + q \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = Ku + Th + \psi(z), \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} Ku = & -\frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \left[\left(\frac{\partial a_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial a_3}{\partial \bar{\zeta}} - a_5 \right) u + \left(\frac{\partial a_2}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial a_4}{\partial \zeta} - a_6 \right) \bar{u} \right] \frac{d\zeta d\eta}{\zeta - z} + \\ & + \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{a_1(\zeta) u(\zeta) + a_4(\zeta) \bar{u}(\zeta) - a_1(z) u(z) - a_4(z) \bar{u}(z)}{(\zeta - z)^2} d\zeta d\eta - \\ & - a_2(z) \bar{u}(z) - a_3(z) u(z), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$Th = -\frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta). \quad (2.17)$$

(см. [3], лемма 3) и $\psi(z)$ — некоторая аналитическая в круге $|z| < 1$ функция. Переходя в (2.15) к комплексно сопряженным, получим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \bar{q} \frac{\partial u}{\partial z} = \overline{Ku} + \overline{Th} + \overline{\psi(z)}. \quad (2.18)$$

Умножая обе части (2.18) на $-q$ и складывая соответственно левые и правые части полученного равенства и равенства (2.15), имеем

$$(1 - q\bar{q}) \frac{\partial u}{\partial z} = Ku - q\overline{Ku} + Th - q\overline{Th} + \psi(z) - q\overline{\psi(z)}. \quad (2.19)$$

В силу условия (1.3) равенство (2.19) принимает вид

$$q_1(z)(1 - z\bar{z})^\beta \frac{\partial u}{\partial z} = Ku - q\overline{Ku} + Th - q\overline{Th} + \psi(z) - q\overline{\psi(z)}. \quad (2.20)$$

Пользуясь теоремой 1.32, [1], легко видеть, что K представляет собой линейный (над полем действительных чисел) ограниченный оператор в $C_\alpha (|z| \leq 1)$, отображающий это пространство в себя. На основании этого и условия (1.7) из (2.20) имеем, что $\psi(z) - q(z)\overline{\psi(z)}$ принадлежит классу $C_\alpha (|z| \leq 1)$, $0 < \alpha < 1 - 2\beta$. Отсюда в силу леммы 2.2 получаем, что $\psi(z)$ также принадлежит классу $C_\alpha (|z| \leq 1)$. Из (2.20) будем иметь

$$\begin{aligned} q_1(z) \operatorname{Re} \left[\mu(t)(1 - z\bar{z})^\beta \frac{\partial u}{\partial z} \right] &= \operatorname{Re} [\mu(t)(Ku - q\overline{Ku} + Th - q\overline{Th})] + \\ &+ \operatorname{Re} [\mu(t)(\psi - q\bar{\psi})]. \end{aligned}$$

Пользуясь краевым условием (1.8), из предыдущего легко получаем

$$\operatorname{Re} \{ [\mu(t) - \overline{q(t)} \overline{\mu(t)}] \psi(t) \} = q_1(t) \gamma(t) - \operatorname{Re} \{ [\mu(t) - \overline{q(t)} \overline{\mu(t)}] \times \\ \times (Ku + Th)(t) \}, \quad |t| = 1. \quad (2.21)$$

Таким образом, $\psi(z)$ является решением задачи Римана-Гильберта (для аналитических функций) с краевым условием (2.21) в классе $C_\alpha (|z| \leq 1)$, причем коэффициент $\mu - \overline{q} \overline{\mu}$ отличен от нуля и принадлежит классу $C_\alpha (|t| = 1)$ вместе с правой частью (2.21). Принимая во внимание (1.2) и (1.10), легко убедиться, что

$$\frac{1}{2\pi} \{ \arg [\mu(t) - \overline{q(t)} \overline{\mu(t)}] \}_{|t|=1} = -m. \quad (2.22)$$

Согласно вышесказанному $\psi(z)$ в круге $|z| \leq 1$ представится в виде

$$\psi(z) = B(q_1 \gamma) - B \{ \operatorname{Re} [(\mu - \overline{q} \overline{\mu}) Th] \} - B \{ \operatorname{Re} [(\mu - \overline{q} \overline{\mu}) Ku] \} + \\ + X(z) \sum_{v=0}^{2m} c_v z^v, \quad (2.23)$$

где B — оператор, определяемый формулой (2.13) при $\omega(t) = \mu(t)$, $X(z)$ — функция, определяемая формулой (2.12) также при $\omega(t) = \mu(t)$ и $c_0, c_1, \dots, c_{2m}$ — некоторые комплексные числа, удовлетворяющие условию (см. [2], стр. 145—151)

$$c_{2m-v} = \overline{c_v}, \quad v = 0, 1, \dots, 2m. \quad (2.24)$$

Подставляя $\psi(z)$ из (2.23) в (2.20) и разделив обе части на $q_1(z) \times (1 - z\overline{z})^\beta$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial z} = SKu + STh + F\gamma + \sum_{v=0}^{2m} a_v h_v(z), \quad (2.25)$$

где

$$Sf = q_1^{-1}(z)(1 - z\overline{z})^{-\beta} \{ f - q\overline{f} - B[\operatorname{Re}((\mu - \overline{q}\overline{\mu})f)] + q\overline{B[\operatorname{Re}((\mu - \overline{q}\overline{\mu})f)]} \}, \quad (2.26)$$

$$F(\gamma) = q_1^{-1}(z)(1 - z\overline{z})^{-\beta} [B(q_1 \gamma) - q\overline{B(q_1 \gamma)}],$$

$$x_v = \operatorname{Re} c_v \text{ при } 0 \leq v \leq m, \quad a_v = \operatorname{Im} c_v \text{ при } m < v \leq 2m, \quad (2.27)$$

$$h_v(z) = \begin{cases} q_1^{-1}(z)(1 - z\overline{z})^{-\beta} [\lambda(z)(z^v + z^{2m-v}) - q(z)\overline{X(z)}(\overline{z}^v + \overline{z}^{2m-v})] & \text{при } 0 \leq v \leq 2m, \\ q_1^{-1}(z)(1 - z\overline{z})^{-\beta} [X(z)z^m - q(z)\overline{X(z)}\overline{z}^m] & \\ q_1^{-1}(z)(1 - z\overline{z})^{-\beta} [X(z)(z^{v+m-1} - z^{3m+1-v}) - q(z)\overline{X(z)}(\overline{z}^{v-m-1} - & \\ - \overline{z}^{3m+1-v})] & \text{при } m < v \leq 2m. \end{cases} \quad (2.28)$$

Докажем теперь, что правая часть (2.25) принадлежит $L_p (|z| \leq 1)$ при $p = \frac{2}{1-\alpha}$. Действительно, согласно свойству интеграла типа Коши, оператор B отображает $C_\alpha (|z|=1)$ в $C_\alpha (|z| \leq 1)$. Отсюда и из условия $p\beta < 1$ ($p = \frac{2}{1-\alpha}$) следует, что операторы S и F будут отображать $C_\alpha (|z| \leq 1)$ в $L_p (|z| \leq 1)$. Аналогично можно показать, что функции $h_0(z), h_1(z), \dots, h_{2m}(z)$ принадлежат классу $L_p (|z| \leq 1)$, оператор же K , как было отмечено выше, отображает $C_\alpha (|z| \leq 1)$ в себя. Поэтому правая часть уравнения (2.25) принадлежит классу $L_p (|z| \leq 1)$.

В таком случае из (2.25) следует, что

$$u(z) = TSKu + TSTh + TF\gamma + \sum_{v=0}^{2m} \alpha_v Th_v + \varphi(z), \quad (2.29)$$

где $\varphi(z)$ — некоторая аналитическая в круге $|z| < 1$ функция. Поскольку оператор T действует из $L_p (|z| \leq 1)$ в $C_\alpha (|z| \leq 1)$, то из (2.29) вытекает, что $\varphi(z)$ принадлежит классу $C_\alpha (|z| \leq 1)$. Теперь представим функцию $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) - \frac{z^{2n+1}}{\pi} \int \int_{|\zeta| < 1} \left(SKu + STh + F\gamma + \sum_{v=0}^{2m} \alpha_v h_v \right) \frac{d\bar{\zeta} d\eta}{1 - z\bar{\zeta}}, \quad (2.30)$$

где $\varphi_0(z)$ — некоторая другая аналитическая в круге $|z| < 1$ функция класса $C_\alpha (|z| \leq 1)$. Подставляя выражение (2.30) в (2.29), получим, что функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению

$$u - P_n SKu = \varphi_0(z) + P_n (STh + F\gamma + \sum_{v=0}^{2m} \alpha_v h_v), \quad (2.31)$$

где

$$P_n f = - \frac{1}{\pi} \int \int_{|\zeta| < 1} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + z^{2n+1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{1 - z\bar{\zeta}} \right| d\bar{\zeta} d\eta. \quad (2.32)$$

Легко видеть, что для любой функции $f(z)$ класса $L_p (|z| \leq 1)$, $p > 2$, выполняется равенство $\operatorname{Re}(z^{-n} P_n f) = 0$ при $|z| = 1$. Поэтому, в силу (1.11), из (2.31) следует, что

$$\operatorname{Re}[z^{-n} \varphi_0(z)] = 0 \text{ при } |z| = 1. \quad (2.33)$$

Подставляя в (2.31) общее решение задачи Римана-Гильберта (2.33), получим

$$u - P_n SKu = P_n (STh + F\gamma) + \sum_{v=0}^{\sigma} \delta_v H_v(z), \quad \sigma = 2m + 2n + 2, \quad (2.34)$$

где

$$H_v(z) = \begin{cases} P_n h_{v-1} & \text{при } 1 \leq v \leq 2m+1 \\ z^{v-2m-2} - z^{\sigma-v} & \text{при } 2m+1 < v \leq 2m+n+1, n > 1 \\ iz^n & \text{при } v = 2m+n+2, n \geq 0 \\ i(z^{v-2m-n-3} - z^{2m+3n+3-v}) & \text{при } 2m+n+2 < v \leq \sigma, n \geq 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

и $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\sigma$ — некоторые вещественные числа.

Таким образом, доказано, что решение $u(z)$ задачи (1.1), (1.8), (1.11) удовлетворяет уравнению (2.34).

Рассмотрим банахово пространство, элементами которого являются функции из класса C_α ($|z| \leq 1$) с обычными операциями сложения и умножения на скаляр и с нормой

$$\|u\| = \max_{|z| \leq 1} |u(z)| + \sup_{|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha}. \quad (2.36)$$

Покажем, что линейный оператор $A = P_n SK$, отображающий это пространство в себя, вполне непрерывен. Действительно, поскольку оператор P_n , действующий из L_p ($|z| \leq 1$) в C_α ($|z| \leq 1$) вполне непрерывен (см. [1], стр. 294), а оператор K , отображающий рассматриваемое пространство в себя, ограничен, то достаточно доказать ограниченность оператора S , действующего из C_α ($|z| \leq 1$) в L_p ($|z| \leq 1$), $p = \frac{2}{1-\alpha}$.

Последнее же следует из оценки

$$\left[\iint_{|\zeta| < 1} \frac{|g(\zeta)|^p}{(1 - |\zeta|^2)^{p\beta}} d\bar{\zeta} d\zeta \right]^{1/p} \leq \text{const } \|g\|_{C_\alpha(|z| < 1)} (p\beta < 1)$$

и из того, что оператор B , представляющий из себя сумму интегралов типа Коши, ограничен из C_α ($|z| = 1$) в C_α ($|z| \leq 1$).

Пусть теперь функция $u(z) \in C_\alpha$ ($|z| \leq 1$) является решением уравнения (2.34) внутри круга $|z| < 1$ с произвольно выбранными вещественными числами $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_\sigma$. Тогда $u(z)$ удовлетворяет уравнению (2.20) внутри круга $|z| < 1$, где аналитическая функция $\psi(z)$ определяется формулой (2.23). Ясно, что $\psi(z)$ принадлежит классу C_α ($|z| \leq 1$), следовательно, $u(z)$ принадлежит классу E_3 . Кроме того, из (2.20) и (2.23) получим, что $u(z)$ является решением задачи (1.1), (1.8), (1.11).

Таким образом, задача (1.1), (1.8), (1.11) эквивалентна уравнению (2.34) в классе C_α ($|z| \leq 1$). Отсюда, в свою очередь, следует нетеро-вость рассматриваемой задачи.

Теперь получим оценку индекса задачи (1.1), (1.8), (1.11). Пусть E — банахово пространство элементов $V = (u, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_\sigma)$ с обычными операциями и нормой $\|V\| = \|u\|_{C_\alpha(|z| < 1)} + \max_{0 \leq k \leq \sigma} \delta_k$, где $u \in C_\alpha$ ($|z| \leq 1$), а $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_\sigma$ — действительные числа. Рассмотрим операторы K_1 и K_2 , отображающие E соответственно в пространство E и C_α ($|z| \leq 1$) по следующим законам:

$$K_1 V = (u - P_n SKu, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_\sigma), \quad K_2 V = u - \delta_0 H_0(z) - \delta_1 H_1(z) - \dots - \delta_\sigma H_\sigma(z).$$

Тогда уравнение (2.34) можно записать в виде

$$K_2 K_1 V = P_n (STh + F\gamma). \quad (2.37)$$

По теореме об индексе суперпозиции двух операторов (см. [4], стр. 45) имеем $\text{ind}(K_2 K_1) = \text{ind} K_1 + \text{ind} K_2$.

Так как оператор $P_n SK$ вполне непрерывен, то $\text{ind} K_1 = 0$ (см. [4], стр. 47). С другой стороны легко видеть, что $\text{ind} K_2 = \sigma + 1$, следовательно

$$\text{ind}(K_2 K_1) = \sigma + 1. \quad (2.38)$$

Пусть теперь линейные функционалы $l_1, l_2, \dots, l_{k'_1}$, определенные в пространстве $C_\alpha(|z| \leq 1)$, составляют полную систему линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.37). Тогда для разрешимости уравнения (2.37) необходимы и достаточны следующие условия:

$$l_\nu [P_n (STh + F_\gamma)] = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, k'_1. \quad (2.39)$$

Ясно, что условия (2.39), в свою очередь, будут необходимы и достаточны для разрешимости задачи (1.1), (1.8), (1.11). Обозначим через k'_0 число линейно независимых решений однородного уравнения $K_2 K_1 V = 0$. Согласно (2.38)

$$k'_0 - k'_1 = \sigma + 1. \quad (2.40)$$

Легко видеть, что $k_0 = k'_0$ и $k_1 \leq k'_1$, следовательно, на основании (2.40), $\kappa = k_0 - k_1 \geq \sigma + 1$ ($\sigma = 2m + 2n + 1$).

Таким образом, в случае $n \geq 0, m \geq 0$ получаем для индекса нашей задачи оценку

$$\kappa \geq 2m + 2n + 2. \quad (2.41)$$

В остальных случаях исследование задачи можно провести аналогичным образом.

Автор выражает признательность проф. Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и ценные указания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 25.X.1975

Ս. Կ. ԱՖԻԱՆ. Ինդեքս-հիլբերտի տիպի խնդիրը վերասերվող էլիպտական սխեմների մի դասի համար (ամփոփում)

Ինտարկվող խնդիրը բերված է $u - Au = f$ տեսքի հավասարման, որտեղ A -ն լիովին անընդհատ օպերատոր է և խնդրի ինդեքսի համար ստացված է բանաձև:

S. K. AFIAN. *The Riemann-Hilbert problem for a class degenerating elliptical systems* (summary)

The problem in the title is reduced to the equation $u - Au = f$, where A is a completely continuous operator. A formula for the index of the problem is obtained

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
2. Н. И. Muskhelishvili. Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.
3. С. К. Афян. Краевая задача Римана-Гильберта для одного класса вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XI, № 3, 1976, 189—202.
4. С. Г. Крейн. Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.