ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 1, 1977 Математика

А. Э. ДЖРБАШЯН

О НУЛЯХ ПОДКЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ДИРИХЛЕ

1°. Говорят, что аналитическая в единичном круге $|z|<1$ функция $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу D, если она имеет конечный интеграл Дирихле

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1} |f'(z)|^2\, r dr d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n < \infty \quad (z=re^{i\theta}).$$

В статье Г. Шапиро и А. Шилдса [1] были доказаны следующие теоремы о нулях функций из класса D.

Теорема A. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_1^{\infty}$ $(|z_k|<1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\log\frac{1}{1-|z_k|^2}\right\}^{-1} < \infty. \tag{1}$$

Тогда существует функция $f\in D$, $f(z)\not\equiv 0$, *с нулями в точках* $\{z_k\}_1^{\infty}$ *и с нормой*

$$\|f\|^2 \leq \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{|z_k|^2}{\log(1-|z_k|^2)}\right)^{-1}.$$

Что этот результат существенно улучшить нельзя, показывает вторая теорема.

Теорема B. *Пусть $h(t)$ — произвольная неотрицательная и непрерывная функция на* $[0,1]$, *причем* $h(0)=0$ *и* $h(t)>0$ *при* $0<t\leq 1$. *Тогда существует последовательность* $\{z_k\}_1^{\infty}$ $(|z_k|<1)$, *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\log\frac{1}{1-|z_k|^2}\right\}^{-1} h(1-|z_k|)<\infty \tag{2}$$

и являющаяся множеством единственности для класса D, т. е. для любой функции $f\in D$ из $f(z_k)=0$ $(1\leq k<\infty)$ следует, что $f(z)\equiv 0$ $(|z|<1)$.

Тем самым в указанной выше статье были существенно улучшены результаты, полученные ранее Л. Карлесоном в [2].

В той же работе [1] были указаны некоторые обобщения этих теорем.

В предположении, что последовательность положительных чисел $\{c_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$c_n^2 \leqslant c_{n-1} \cdot c_{n+1} \quad (n \geqslant 2) \tag{3}$$

вводилась функция

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{4}$$

а затем класс D_φ, аналитических в круге $|z| < 1$ функций

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

посредством условия

$$L(f) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{c_n} < \infty. \tag{5}$$

Притом в частном случае, когда $c_n = \dfrac{1}{n} \left(\varphi = \log \dfrac{1}{1-z} \right)$, соответствующий класс $D_\varphi \equiv D$.

Для классов D_φ в статье был сформулирован аналог теоремы А с заменой условия (1) на условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{\varphi(|z_k|^2)\}^{-1} < \infty, \tag{1'}$$

пря этом авторами отмечалось лишь, что доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы А, опираясь на условие (3) и некоторые известные результаты Харди и Шура.

Однако доказательство обратной теоремы В было не полным, поскольку оно не проходило в общем случае и, поэтому авторами было дано указание лишь для частного случая $\varphi(z) = (1-z)^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, что, кстати, не содержало в себе даже тоoремы В

$$\left(\text{где } \varphi(z) = \log \frac{1}{1-z} \right).$$

В дальнейшем В. С. Захарян в работе [3] ввел классы $D\{\omega\}$, ассоциированные с функциями $\omega(x)$ из множества Ω_0 (определение см. ниже) при помощи условия

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\int_r^1 \omega(x)\, dx \right) |f'(re^{i\theta})|^2\, r dr d\theta < \infty \tag{6}$$

и доказал для них аналоги обеих теорем А и В. Доказательство первой теоремы не приводилось, поскольку оно содержалось в его совместной с М. М. Джрбашяном работе [4] (лемма 1.9). Доказанная же им вторая теорема, в частности, содержала в себе вышеуказанный случай $\varphi(z)=(1-z)^{-\alpha}$ $(0<\alpha<1)$.

Из определения пространств $D\{\omega\}$ видно, что все они содержат класс Дирихле D и $D\{\omega\}\subset D_\varphi$ (для некоторого φ).

Таким образом, вне рассмотрения оставались пространства типа D_φ, содержащиеся в D.

Цель настоящей заметки—покрыть этот пробел, а также дать более обозримую формулировку соответствующих общих теорем А и В.

Именно, с каждой функцией $\omega(x)\in\Omega_0$ мы ассоциируем пространство $D^*\{\omega\}$ посредством условия: $f\in D^*\{\omega\}$, если

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\omega(r)|f'(re^{i\theta})|^2\,rdrd\theta<\infty,$$

очевидно совпадающее с классом D при $\omega(x)\equiv 1$.

Для этих классов доказываются аналог теоремы А (теоремы 1 и 2) и ее полное обращение (теорема 3), что в специальном случае $\omega(x)\equiv 1$ полностью содержит в себе приведенные выше теоремы А и В Шапиро и Шилдса.

2°. Мы будем говорить, что определенная и непрерывная на отрезке $[0,1)$ функция $\omega(x)$ принадлежит множеству Ω_0, если

1) $\omega(0)=1$ и $\omega(x)$ монотонно возрастает,

2) $\displaystyle\int_0^1\omega(x)\,dx<\infty.$

Если, кроме того,

3) $\omega(x)$ кусочно непрерывно дифференцируема и

$$\overline{\lim_{x\to 1}}\frac{(1-x)\,\omega'(x)}{\omega(x)}<1,$$

то мы отнесем ее к множеству Ω_0^*.

Известно (см. [5], теорема 8), что: *если $\omega(x)\in\Omega_0$, то для последовательности*

$$\Delta_0=1,\ \Delta_n=n\int_0^1 t^{n-1}\,\omega(t)\,dt,\ n=1,2,\cdots$$

проблема моментов

$$\mu_n\equiv\frac{1}{\Delta_n}=\int_0^1 t^n\,d\mu(t)$$

имеет решение $\mu(t)$ в классе неубывающих функций ограниченной вариации.

Отсюда сразу вытекает, что последовательность $\{\mu_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условию типа (3):

$$\mu_n^2 \leqslant \mu_{n-1}\cdot\mu_{n+1}, \quad n=1,\ 2,\cdots.$$

Определим новую последовательность

$$\mu_n^* = \frac{1}{n}\mu_n = \frac{1}{n}\int_0^1 t^n\, d\mu(t), \quad n=1,\ 2,\cdots,$$

для которой, очевидно,

$$(\mu_n^*)^2 \leqslant \mu_{n-1}^*\cdot\mu_{n+1}^*, \quad n=2,\ 3,\cdots.$$

Наряду с известной функцией (см. [5])

$$C(z) \equiv C(z;\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n$$

определим новую функцию

$$C^*(z) \equiv C^*(z;\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^* z^n.$$

Как известно (см. [4], лемма 1.3), если $\omega(x)\in\Omega_0^*$, то существуют две положительные константы c_1 и c_2 такие, что

$$c_1\left\{\int_r^1 \omega(x)\,dx\right\}^{-1} \leqslant C(r) \leqslant c_2\left\{\int_r^1 \omega(x)\,dx\right\}^{-1} \quad (0\leqslant r<1). \tag{7}$$

Но

$$C^*(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^* r^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^2\int_0^1 t^{n-1}\,\omega(t)\,dt\right\}^{-1} r^n,$$

и поэтому

$$C^{*\prime}(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\int_0^1 t^{n-1}\,\omega(t)\,dt\right\}^{-1} r^{n-1} = -1+\frac{1}{r}C(r).$$

Отсюда, интегрированием вдоль любого отрезка $\left[\frac{1}{2},\ r\right]$ $\left(\frac{1}{2}< <r<1\right)$, получим

$$C^*(r) = c_r + \int_{1/2}^{r} \frac{C(r)}{r}\,dr,$$

где $-\frac{1}{2}\leqslant c_r\leqslant 0$.

Наконец, воспользуясь оценками (7), легко приходим к неравенствам

$$-c_3+\int\limits_0^r\frac{dt}{\int\limits_t^1\omega(x)\,dx}\leqslant C^*(r)\leqslant -c_4+\int\limits_0^r\frac{dt}{\int\limits_t^1\omega(x)\,dx}\quad(0\leqslant r<1),$$

где c_3 и c_4 — некоторые положительные константы.

Таким образом, для $\omega(x)\in\Omega_0^*$ утверждения

$$\int\limits_0^1\frac{dt}{\int\limits_t^1\omega(x)\,dx}=\infty \tag{8}$$

и

$$\lim_{r\to1} C^*(r;\,\omega)=\infty \tag{8'}$$

равносильны.

Именно такие функции $\omega(x)$ из класса Ω_0^* нас будут интересовать, поскольку, как будет видно ниже, определяемые нами пространства $D^*\{\omega\}$ только в этом случае содержательны.

Теперь дадим определение классов $D^*\{\omega\}$.

Мы скажем, что функция $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу $D^*\{\omega\}$, если

$$\|f\|^2\equiv\|f\|^2_{\{\omega\}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n^*)^{-1}|a_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 n^2\int\limits_0^1 t^{n-1}\omega(t)\,dt<\infty.$$

Лемма 1. *Функция $f(z)$ принадлежит $D^*\{\omega\}$ тогда и только тогда, когда конечен интеграл*

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\omega(r)\,|f'(re^{i\theta})|^2\,r\,dr\,d\theta. \tag{9}$$

Доказательство несложно и опирается на следующее утверждение, которое понадобится нам и в дальнейшем (см. [4], лемма 2.1):

Если $\omega(x)\in\Omega_0$, то существуют две положительные константы $A\equiv A(\alpha,\beta)$ и $B\equiv B(\alpha,\beta)$ такие, что для любого r из промежутка $[1,\infty)$ имеют место неравенства

$$A\int\limits_{1-\frac{1}{r}}^1\omega(x)\,dx\leqslant\int\limits_0^1\omega(x)\,x^{\alpha r+\beta}\,dx\leqslant B\int\limits_{1-\frac{1}{r}}^1\omega(x)\,dx \tag{10}$$

для всех $1\leqslant\alpha<\infty$ и $-1\leqslant\beta<\infty$.

Проследив доказательство этих неравенств, легко видеть, что для всех $1 \leqslant \alpha < \infty$, $-1 \leqslant \beta < \infty$

$$0 < A(\alpha, \beta) \leqslant 2, \; 1 \leqslant B(\alpha, \beta) \leqslant 2,$$

а также, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} A(\alpha, \beta) = 0.$$

Это замечание понадобится в лемме 2.

Теперь вычисление интеграла (9) дает

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \omega(r) \left| \sum_{n=1}^{\infty} n a_n e^{i(n-1)\theta} r^{n-1} \right|^2 r dr d\theta = \pi \int_0^1 \omega(r) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 r^{2n-1} \right) dr =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 \int_0^1 \omega(r) r^{2n-1} dr,$$

а последний ряд, согласно (10), сходится лишь вместе с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 \int_0^1 \omega(x) x^{n-1} dx.$$

Скалярное произведение двух функций $f, g \in D^* \{\omega\}$ определим следующим образом:

$$(f, g) \equiv (f, g)_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \overline{l_n}}{\overset{*}{\mu}_n},$$

если $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ и $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n z^n$.

Функция

$$K_\zeta(z) = C^*(z\bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{*}{\mu}_n (z\bar{\zeta})^n \quad (|\zeta| < 1)$$

является воспроизводящим ядром для класса $D^* \{\omega\}$, так как, очевидно

$$(f, K_\zeta)_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} (\overset{*}{\mu}_n)^{-1} a_n \left(\overline{\overset{*}{\mu}_n \bar{\zeta}^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n = f(\zeta).$$

3°. Приведем две теоремы. Первая из них является обобщением теоремы А на случай пространств $D^* \{\omega\}$ и дает достаточное условие на последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ отличных друг от друга точек единичного круга, для того, чтобы она была множеством нулей для некоторой нетривиальной функции $f \in D^* \{\omega\}$. Вторая же теорема содержит построение такой функции с минимальной нормой. Оказывается, что ее можно получить как предел некоторой последовательности определителей.

Доказательства этих теорем нами не приводится, поскольку они фактически содержатся в статье [1]. Однако приводимые нами формулировки этих теорем имеют, по нашему мнению, то существенное преимущество, что как определение введенных нами классов $D^* \{\omega\}$, так и соответствующие теоремы сформулированы исключительно в терминах функции $\omega(x)$.

Теорема 1. *Пусть* $\omega(x) \in \Omega_0$ *и последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ $(|z_k| < 1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{C^*(|z_k|; \omega)} < \infty,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=1}^\infty \left\{ \int_0^{|z_k|} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\, dx} \right\}^{-1} < \infty. \tag{11}$$

Тогда существует функция $f \in D^* \{\omega\}$, $f(z) \not\equiv 0$, *с нулями в точках* $\{z_k\}_1^\infty$ *и с нормой*

$$\|f\|^2 \leqslant \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{\mu_1^* |z_k|}{C^*(|z_k|)}\right)^{-1}.$$

Сделаем следующее замечание. Если для функции $\omega(x)$ не выполняется условие (8), то, как показывает теорема 1, пространства $D^* \{\omega\}$ могут содержать лишь такие нетривиальные функции, которые имеют не более конечного числа нулей.

Теорема 2. *Пусть* $\{z_k\}_1^\infty$ — *последовательность отличных друг от друга и от нуля точек единичного круга. Пусть, далее, существует функция* $f \in D^* \{\omega\}$, $\omega \in \Omega_0$, *имеющая эти точки своими нулями. Тогда функции*

$$f_n(z) = \frac{\begin{vmatrix} z & z_1 & \cdots & z_n \\ K_1(z) & (K_1, K_1) & \cdots & (K_1, K_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_n(z) & (K_n, K_1) & \cdots & (K_n, K_n) \end{vmatrix}}{d_n^2\, G(K_1, \cdots, K_n)}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

принадлежат классу $D^* \{\omega\}$ *и обладают следующими свойствами:*

(a) $f_n(z_j) = (f_n, K_j) = 0 \ (1 \leqslant j \leqslant n)$,

(b) $(f_n, z) = 1$, *то есть* $f'_n(0) = \mu_1^*$,

(c) f_n *имеет минимальную норму среди всех функций из* $D^*\{\omega\}$, *удовлетворяющих* (a) *и* (b) *и* $\|f_n\| = \dfrac{1}{d_n}$,

(d) f_n *стремятся по норме пространства* $D^*\{\omega\}$ *к единственной функции* $z \in D^*\{\omega\}$, *имеющей нули* $\{z_k\}_1^\infty$, $(f, z) = 1$ *и обладающей минимальной нормой. Здесь* $K_j(z) \equiv K_{z_j}(z)$, $G(K_1, \cdots, K_n)$ — *детерминант Грамма функций* $K_1, K_2, \cdots, K_n$ *и* d_n — *расстояние от точки* z *до подпространства в* $D^*\{\omega\}$, *образованного функциями* $K_1(z), \cdots, K_n(z)$.

4°. В этом пункте мы установим полное обращение теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть* $h(t)$ — *произвольная неотрицательная и непрерывная функция на* $[0, 1]$, *причем* $h(0) = 0$ *и* $h(t) > 0$ *при* $0 < t \leqslant 1$. *Тогда существует последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ $(|z_k| < 1)$, *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{|z_k|} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} \right\}^{-1} h(1 - |z_k|) < \infty \tag{12}$$

и являющаяся множеством единственности для класса $D^*\{\omega\}$, $\omega \in \Omega_0^*$.

Доказательство будет основано на следующих двух леммах.

Лемма 2. *Допустим, что точки* $z_1, \cdots, z_n$ *равномерно распределены на окружности* $|z| = r < 1$ *и* $z_1 = r$. *Тогда, если* $f \in D^*\{\omega\}$, $f(z_j) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *и* $(f, z) = 1$, *то*

$$\|f\|^2 \geqslant cn \left\{ \int_0^{r^{2n}} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} \right\}^{-1}.$$

Доказательство. Обозначим

$$H(z) = \frac{1}{n} \left(\frac{K_1(z)}{\bar{z}_1} + \cdots + \frac{K_n(z)}{\bar{z}_n} \right),$$

где

$$K_j(z) = K_{z_j}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^* (z\bar{z}_j)^m \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Теперь ясно, что $(f, H) = 0$ и

$$\mu_1^* = (f, \mu_1^* z) = (f, \mu_1^* z - H) \leqslant \|f\| \cdot \|H - \mu_1^* z\|.$$

Имеем

$$H(z)-\mu_1^*(z)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j(z)}{\bar z_j}-\mu_1^* z=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\bar z_j}\sum_{m=1}^{\infty}z^m\bar z_j^m\,\mu_m^*-\mu_1^* z=\sum_{m=0}^{\infty}z^{nm+1}r^{nm}\quad\mu_{nm+1}^*-\mu_1^* z=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}z^{nm+1}r^{nm}\mu_{nm+1}^*=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{nm+1}r^{nm}}{(nm+1)^2\int\limits_0^1 t^{nm}\omega(t)\,dt}\,.$$

Здесь мы воспользовались следующим свойством корней из единицы

$$\sum_{j=1}^{n}\bar z_j^k=\begin{cases}0, & k\neq 0\ (\mathrm{mod}\ n)\\ nr^n, & k=0\ (\mathrm{mod}\ n)\end{cases},\qquad \text{при } |z_j|=r.$$

Теперь мы получаем

$$\|H-\mu_1^* z\|^2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2nm}}{(nm+1)^2\int\limits_0^1 t^{nm}\omega(t)\,dt}\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2nm}}{(nm+1)^2\int\limits_{1-\frac{1}{nm}}^{1}\omega(t)\,dt}\leqslant\frac{c}{n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2nm}}{m^2\int\limits_{1-\frac{1}{m}}^{1}\omega(t)\,dt}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c}{n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(r^{2n})^m}{m^2\int\limits_0^1 t^{m-1}\omega(t)\,dt}=\frac{c}{n^2}C^*(r^{2n})\leqslant\frac{c}{n^2}\int\limits_0^{r^{2n}}\frac{dt}{\int\limits_0^1\omega(x)\,dx}\,.$$

Здесь c, вообще говоря, различные постоянные, зависящие только от n, притом, как видно из замечания к неравенству (10), $c\equiv c(n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Таким образом, окончательно получаем

$$\|f\|^2\geqslant(\mu_1^*)^2 c(n)^{-1}n^2\left\{\int\limits_0^{r^{2n}}\frac{dt}{\int\limits_t^1\omega(x)\,dx}\right\}^{-1}\geqslant c_0 n\left\{\int\limits_0^{r^{2n}}\frac{dt}{\int\limits_t^1\omega(x)\,dx}\right\}^{-1},$$

так как уже $c(n)^{-1}\to\infty$ при $n\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $n_k\to\infty$, $\delta_k\to 0$ *и* $n_k\delta_k\to 0$. *Обозначим*

$$\psi(k)=\frac{1}{n_k}\int\limits_0^{1-\delta_k}\frac{dt}{\int\limits_t^1\omega(x)\,dx}\equiv\frac{1}{n_k\varphi(1-\delta_k)}\,.$$

Тогда, если $\psi(k)\to 0$, *то и*

$$\frac{1}{n_k \varphi[(1-\delta_k)^{n_k}]} \to 0.$$

Доказательство очевидно, так как

$$\frac{1}{\varphi(1-\delta_k)} = \int_0^{1-\delta_k} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} \geqslant \int_0^{(1-\delta_k)^{n_k}} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} = \frac{1}{\varphi[(1-\delta_k)^{n_k}]}.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Для этого нужно построить две последовательности: $n_k \to \infty$ и $r_k = (1-\delta_k) \to 1$ так, чтобы удовлетворялись следующие три условия:

(I) $\psi(k) \to 0$;

(II) $n_k \delta_k \to 0$;

(III) $\sum_{k=1}^{\infty} h(\delta_k)[\psi(k)]^{-1} < \infty$.

Обозначим как и прежде

$$1 - r_k = \delta_k, \quad \psi(k) = [n_k \varphi(r_k)]^{-1}.$$

Положив далее $g(y) = h(e^{-y})$, по условию теоремы будем иметь, что $g(y) \to 0$ при $y \to \infty$.

Выберем теперь последовательность $\{y_k\}_1^\infty$ так, чтобы

$$y_1 < y_2 < \cdots, \; y_k \geqslant k \text{ и } g(y) \leqslant 2^{-k} \text{ при } y \geqslant y_k.$$

После этого положим $n_k = k y_k$ и $\psi(k) = \frac{1}{k}$, т. е.

$$\frac{1}{n_k}\int_0^{r_k} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} = \frac{1}{k}, \quad \text{или} \quad \int_0^{1-\delta_k} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} = y_k.$$

Тогда ясно, что условие (I) выполняется. Далее, при $k \to \infty$

$$n_k \delta_k = k y_k \delta_k \leqslant y_k^2 \delta_k =$$

$$= \delta_k \left\{ \int_0^{1-\delta_k} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} \right\}^2 \leqslant \delta_k \left\{ \int_0^{1-\delta_k} \frac{dt}{1-t} \right\}^{-1} = \delta_k \log^2 \frac{1}{\delta_k} \to 0.$$

Таким образом, выполняется и условие (II). Наконец, замечая, что $\log \frac{1}{\delta_k} \geqslant y_k$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(\delta_k)}{\psi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} k h(\delta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k g\left(\log \frac{1}{\delta_k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < \infty.$$

Теперь образуем последовательность $\{z_m\}_1^\infty$ следующим образом: на окружностях $|z| = r_k$ берем n_k точек так, чтобы они были равномерно распределены на этих окружностях и одна из этих z_m была равна r_k. Тогда условие (III) означает, что для $\{z_m\}_1^\infty$ выполняется условие (12) теоремы.

Если бы существовала нетривиальная функция $f \in D^* \{\omega\}$, равная нулю во всех точках последовательности $\{z_m\}_1^\infty$, то, по лемме 2, мы имели бы, что

$$\|f\|_\omega^2 \geqslant c_0\, n_k \left\{ \int\limits_0^{r_k^{2n_k}} \frac{dt}{\int\limits_t^1 \omega(x)\, dx} \right\}^{-1}$$

для всех $k = 1, 2, \cdots$.

Однако из условий (I) и (II) и леммы 3 следует, что правая часть этого неравенства при $k \to \infty$ стремится к бесконечности. Это противоречие доказывает теорему.

В заключение сделаем следующее замечание. В случае большего роста функций $\omega(x)$, когда интеграл (8) сходится (например, при $\omega(x) = (1-x)^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ соответствующие пространства $D^* \{\omega\}$ лежат в пространстве A аналитических в круге $|z| < 1$ функций с абсолютно сходящимся рядом Тейлора.

Действительно, если $\omega(x) = \dfrac{1}{(1-x)^\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, то из

$$f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n z^n \in D^* \{\omega\}$$

вытекает, что

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 n^2 \int\limits_0^1 x^{n-1} \frac{dx}{(1-x)^\alpha} < \infty.$$

Но

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1-x)^\alpha}\, dx = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)} = O(n^{\alpha-1})$$

при $n \to \infty$ и, следовательно

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 n^{1+\alpha} < \infty.$$

Отсюда будем иметь

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| = \sum_{n=1}^\infty \frac{|a_n|\, n^{\frac{1+\alpha}{2}}}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 n^{1+\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1+\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

при $0<\alpha<1$, а это означает, что имеет место включение $D^*\{\omega\}\subset A$, и поэтому не существует нетривиальной функции $f(z)\in D^*\{\omega\}$ с бесконечным числом нулей произвольного расположения в единичном круге.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.IX.1976

Ա. Է. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Դիրիխլեի վերջավոր ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների ենթադասերի զրոների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են Դիրիխլեի վերջավոր ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների D *դասի* $D^*\{\omega\}$ *ենթադասերը։ Նրանց համար ապացուցվում են Հ. Շապիրոյի և Ա. Շիլդսի ([1]) թեորեմների անալոգները այդ դասերի ֆունկցիաների զրոների մասին։*

A. E. DJRBASHIAN *On the zeros of functions belonging to subclasses of analitic functions with finite Dirichlet integral* (summary)

In the paper the subclasses $D^*\{\omega\}$ of the class D of functions with finite Dirichlet integral are considered. The analogues of theorems of H. Shapiro and A. Shields ([1]) for the zeros of functions from that classes are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. S. Shapiro, A. L. Shilds.* On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces, Math. Zeit., 80, № 3, 1962, 217—229.
2. *L. Carleson.* On the zeros of functions with bounded Dirichlet integrals, Math. Zeit., 56, № 3, 1952, 289—295.
3. *В. С. Захарян.* Граничные свойства и единственность функций с ограниченным интегралом типа Дирихле, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", V, № 6, 1970, 534—543.
4. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 1970, 1262—1339.
5. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 1075—1111.