ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 1, 1977 Математика

Г. А. БАРСЕГЯН

ДЕФЕКТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СТРУКТУРА ПОВЕРХНОСТЕЙ НАЛОЖЕНИЯ

Предполагаем известными основные положения теории распределения мероморфных функций и теории поверхностей наложения Л. Альфорса и пользуемся стандартными обозначениями (см. [1]).

Из первой основной теоремы Р. Неванлинны вытекает следующее качественное следствие: если мероморфная в $|z|< R \leqslant \infty$ функция $w(z)$ (с неограниченной характеристикой) относительно „редко" принимает в круге $|z|\leqslant r < R$ значение a, то на окружности $|z| = r$ найдутся участки, на которых $|w(z) - a|$ „мало". Иначе некоторые участки границы ∂F_r области $F_r = \{w(z): |z| \leqslant r\}$ (F_r — часть римановой поверхности функции $w^{(-1)}(z)$, на которую отображается круг $|z|\leqslant r$ при отображении функцией $w(z)$) „близко" расположены от a.

Введем величину $\nu(r, a)$, которая характеризует структуру этих участков ∂F_r. Рассмотрим часть границы ∂F_r, лежащую над кругом $|w - a|<1$ при $a\neq\infty$ и над $|w|>1$ при $a = \infty$. Это множество является объединением некоторой совокупности дуг γ_a. При этом обозначим через $2\pi\nu_{\gamma_a}$ приращение на γ_a величины $\arg \dfrac{1}{w(z) - a}$ при $a \neq \infty$ и величины $\arg w(z)$ при $a = \infty$.

Положим

$$\nu(r, a) = \nu(r, a, w) = \sum_{\gamma_a} [\nu_{\gamma_a}],$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Величина $\nu(r, a)$ определяется структурой границы ∂F_r в окрестности точки a и сама характеризует эту структуру, показывая суммарное количество целочисленных оборотов дуг γ_a вокруг точки a.

Аналогичную величину $\nu(F, a)$ можно определить и в случае конечной, односвязной поверхности наложения F над римановой сферой с гладкой границей ∂F. В самом деле, пусть F^* — поверхность, полученная из такой поверхности F стереографическим отображением на плоскость. Если граница ∂F^* поверхности F^* задается уравнением

$$w = w(z), \ |z| = 1,$$

то величина $\nu(F, a)$ определяется как выше, аналогично величине $\nu(r, a)$ при $r = 1$.

Пользуясь введенными величинами, сформулируем основные результаты настоящей работы.

Теорема I. *Пусть* $w(z)$ — *мероморфная в* $|z| < R \leqslant \infty$ *функция* $w(z) \not\equiv \mathrm{const}$. *Тогда для каждого* $a \in \overline{\mathbf{C}}$ *и* r, $0 < r < R$ *имеет место равенство*

$$\nu(r, a) + n(r, a) = A(r) + hL(r),$$

где $|h| < h(a) = \mathrm{const}$.

Теорема II. *Пусть* $w(z)$ — *мероморфная в* $|z| < R \leqslant \infty$ *функция* $w(z) \not\equiv \mathrm{const}$ *и* $a_i \in \overline{\mathbf{C}}$, $(i = 1, 2, \cdots, q)$ *таковы, что* $a_i \neq a_j$ *при* $i \neq j$. *Тогда при* $0 < r < R$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{q} \nu(r, a_i) + \sum_{i=1}^{q} n_1(r, a_i) \leqslant A(r) + hL(r),$$

где

$$|h| < h(a_1, a_2, \cdots, a_q) = \mathrm{const}.$$

Теорема I′. *Пусть* F — *конечная, односвязная, с гладкой границей поверхность наложения над римановой сферой. Тогда для каждого* $a \in \overline{\mathbf{C}}$ *выполняется равенство*

$$\nu(F, a) + n(F, a) = A(F) + hL(F),$$

где $|h| < h(a) = \mathrm{const}$, $n(F, a)$ — *число точек поверхности, стереографически проектирующихся в точку* a, $\pi A(F)$ — *площадь поверхности* F *в сферической метрике,* $L(F)$ — *длина границы* ∂F *в сферической метрике.*

Теорема II′. *Пусть* F — *конечная, односвязная, с гладкой границей поверхность наложения над римановой сферой и* $a_i \in \overline{\mathbf{C}}$, $(i = 1, 2, \cdots, q)$ *таковы, что* $a_i \neq a_j$ *при* $i \neq j$. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{q} \nu(F, a_i) + \sum_{i=1}^{q} n_1(F, a_i) \leqslant 2A(F) + hL(F),$$

где $|h| < h(a) = \mathrm{const}$, $n_1(F, a)$ — *сумма порядков алгебраических точек ветвления поверхности* F, *стереографически проектирующихся в точку* a.

Теоремы I, II, I′, II′ можно рассматривать как аналоги I и II основных теорем Р. Неванлинны и Л. Альфорса. Для регулярно исчерпываемых поверхностей F и соответствующих им мероморфных функций $w(z)$ можно определить по аналогии понятия дефекта

$$\overline{\delta}(a, F) = \varlimsup_{k \to \infty} \frac{\nu(F_k, a)}{A(F_k)}, \quad \overline{\delta}(a, w) = \varlimsup_{r \to R} \frac{\nu(r, a)}{A(r)},$$

где F_k — последовательность поверхностей наложения, регулярно исчерпывающая полную поверхность, и записать соотношение дефектов, вытекающее из теорем II и II′

$$\sum_{(i)} \bar{\delta}(a_i, F) \leqslant 2, \quad \sum_{(i)} \bar{\delta}(a_i, w) \leqslant 2.$$

Для широкого класса регулярно исчерпываемых поверхностей и соответствующих им однозначных функций теоремы I, II, I′, II′, есть определенные высказывания о строении границы $F_r(F)$ в окрестности a-точек. Именно, если значение a относительно „редко“ принимается в $|z| \leqslant r$ (на F), то близость некоторых участков границы $F_r(F)$ к a осуществляется определенным образом; большое число граничных дуг навивается вокруг точки a.

Отметим, что в определении величины $\nu(r, a)$, являющейся аналогом неванлинновской функции приближения $m(r, a)$, нет упоминания о близости граничных дуг ∂F_r к a, хотя качественно такой вывод в определении содержится: „большое“ число оборотов при „малой“ длине ∂F_r (условие регулярной исчерпаемости) означает, что дуги ∂F_r должны сжиматься вокруг точки a.

Теоремы I′ и II′ содержат в качестве следствия некоторые высказывания из дифференциальной геометрии в целом.

Рассмотрим гладкую поверхность M в R^3, сферическое изображение K (см. [2]) которой, отображенное с помощью преобразования подобия на риманову сферу—F, есть поверхность наложения, удовлетворяющая условиям теоремы I′ (рассмотрение поверхностей с такими ограничениями, по-видимому, впервые встречается у Л. Альфорса в связи с появлением его теории поверхностей наложения).

a-точкой поверхности M назовем точку, образ которой на F при стереографическом отображении последнего на плоскость, проектируется в точку a. Очевидно все нормали a-точек поверхности M одинаково направлены (a-направлены). Дугам γ_a поверхности F соответствуют некоторые дуги $\gamma_a(M) \subset \partial M$.

Величина $\nu(F, a)$ интерпретируется на поверхности как количество „оборотов“ нормалей к поверхности, в точках дуг $\gamma_a(M)$, вокруг a-направления. Учитывая это геометрическое содержание величины $\nu(F, a)$, обозначим ее в терминах поверхности через $\nu(M, a)$. Заметив, что $S(M)$ — площадь сферического образа поверхности M, равна $4\pi A(F)$, $L(M)$ — длина сферического образа поверхности M, равна $4\pi L(F)$, число a-точек поверхности M: $n(M, a) = n(F, a)$, получим аналоги теорем I′ и II′, в которых все величины наглядно описываются в терминах поверхности M.

Теорема 1*. *Пусть M—гладкая поверхность в R^3, сферический образ которой есть поверхность наложения, удовлетворяющая условиям теоремы I′. Тогда для любого a-направления имеем*

$$\nu(M, a) + n(M, a) = \frac{S(M)}{4\pi} + hL(M),$$

где $|h| < h(a) = \text{const}.$

Теорема II*. *Пусть M — гладкая поверхность в R^3, удовлетворяющая условиям теоремы* I*.

Тогда для любого конечного числа q попарно различных a_i $(i = 1, 2, \cdots, q)$ направлений имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{q} \nu(M, a_i) \leqslant \frac{S(M)}{2\pi} + hL(M),$$

где $|h| < h\,(a_1, a_2, \cdots, a_q) = \text{const}$.

Если теперь предположить, что полную поверхность M можно исчерпать последовательностью подповерхностей M_k так, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \frac{L(M_k)}{S(M_k)} = 0$$

(условие аналогичное условию регулярной исчерпываемости поверхностей наложения), то по аналогии можно ввести понятие дефекта a-направления

$$\bar{\delta}(M, a) = \lim_{k\to\infty} \frac{\nu(M_k, a)}{S(M_k)}$$

и соотношения дефектов

$$\sum_{(i)} \bar{\delta}(M, a_i) \leqslant \frac{1}{2\pi}.$$

Все эти условия выполняются, например, когда третья квадратичная форма поверхности M удовлетворяет сформулированным в [1] на стр. 363 условиям.

Доказательство теоремы I следует из двух лемм.

Лемма 1. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < R \leqslant \infty$ функция* $w(z) \not\equiv \text{const}$. *Тогда для всех $a \in \overline{\mathbf{C}}$ и $r \in (0, R)$ имеем*

$$n(r, a) - A(r) = \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_1(r, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln |w - a|\, d\varphi + hL(r) \tag{1}$$

при $a \neq \infty$,

$$n(r, \infty) - A(r) = \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_2(r, 0)} \frac{\partial}{\partial r} \ln |w|\, d\varphi + hL(r), \tag{2}$$

где

$$\Delta_1(r, a) = \{z : |z| = r,\ |w(z) - a| < 1\},\ \Delta_2(r, a) = \{z : |z| = r,\ |w(z) - a| \geqslant 1\},$$

$$|h| < h(a) = \text{const}.$$

Доказательство. При доказательстве (1) исходим из равенства

$$n(r, a) - A(r) = \frac{r}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi.$$

Имеем

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi = \frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln |w-a|\, d\varphi -$$

$$-\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \sqrt{1+|w|^2}\, d\varphi + \frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(r,\, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi.$$

Оценим второй интеграл в правой части

$$\left|\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \sqrt{1+|w|^2}\, d\varphi\right| \leqslant \frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\, a)} \frac{|w|\,|w'|}{1+|w|^2}\, d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+|a|}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\, a)} \frac{|w'|}{1+|w|^2}\, r\, d\varphi \leqslant h(a)\, L(r). \tag{3}$$

Для доказательства (1) нужно показать, что

$$\left|\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(r,\, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi\right| \leqslant h(a)\, L(r). \tag{4}$$

Имеем

$$\left|\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{[(w-a)(\overline{w-a})]'_r}{|w-a|^2} - \frac{(w\bar{w})'_r}{1+|w|^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{(w\bar{w})'_r\,(1+|w|^2-|w-a|^2)}{|w-a|^2\,(1+|w|^2)} - \frac{w'_r\,\bar{a} + \bar{w}'_r\, a}{|w-a|^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3\,|a|\,|w|^2 + (1+|a|^2)\,|w| + |a|}{|w-a|^2} \cdot \frac{|w'|}{1+|w|^2}.$$

При $|w-a| > 1$ последнее выражение меньше, чем $h(a)\dfrac{|w'|}{1+|w|^2}$ (где $h(a)$ ограничено), откуда следует (4).

Для $a = \infty$ имеем

$$n(r, a) - A(r) = \frac{r}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi = \frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(r,\, 0)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{|w|}\, d\varphi +$$

$$+\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\, 0)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{1+|w^2|}}\, d\varphi + \frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(r,\, 0)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w|}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi.$$

Оценивая последние два интеграла аналогично (3) и (4), получим (2).

Лемма 2. *При условиях леммы 2 имеет место равенство*

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\,a)}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=-\nu(r,\,a)+hL(r),\tag{5}$$

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(r,\,0)}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w|\,d\varphi=\nu(r,\,a)+hL(r),\tag{6}$$

где $|h|\leqslant h(a)=\mathrm{const}$.

Доказательство. Разобьем часть границы F_r, лежащую над $|w-a|<1$, на дуги следующих видов.

1. Дуги γ_a^0 — это связные части дуги γ_a, на которых приращение $\arg(w(z)-a)=2\pi[\nu_{\gamma_a}]$, $|[\nu_{\gamma_a}]|\geqslant 1$, притом для $\forall\gamma\subset\gamma_a\setminus\gamma_a^0$, $|\Delta_\gamma\arg(w(z)-a)|<2\pi$.

2. Дуги γ_a', $\gamma_a'\in\{\partial F_r\cap\{|w-a|\leqslant 1\}\}\setminus\{\cup\gamma_a^0\}$, и имеющие длину $\geqslant\frac{1}{2}$.

3. Дуги γ_a'', $\gamma_a''\subset\{\partial F_r\cap\{|w-a|\leqslant 1\}\}\setminus\{\cup\gamma_a^0\}$, и имеющие длину $<\frac{1}{2}$.

Это разбиение является полным и можно записать

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\,a)}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=\frac{r}{2\pi}\left|\int\limits_{(\Delta\gamma_a^0)}+\int\limits_{(\Delta\gamma_a')}+\int\limits_{(\Delta\gamma_a'')}\left(\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi\right)\right|,\tag{7}$$

где (Δx) — подмножества $\Delta_1(r,\,a)$, образы которых лежат на x. Для первого интеграла в правой части по определению имеем

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a^0)}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a^0)}d\arg(w-a)=-\nu(r,\,a).\tag{8}$$

Каждая из дуг вида γ_a' может иметь вклад в $\int d\arg(w-a)$ не более чем 2π, в противном случае дуга γ_a' содержала бы в себе дуги вида γ_a^0. Обозначим через l_a' (l_a'') длину некоторой дуги вида γ_a' (γ_a''), и учитывая, что $l_a'\geqslant\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a')}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a')}d\arg(w-a)\leqslant 2\sum_{(\gamma_a')}l_a'.\tag{9}$$

Если $\int\limits_{(\Delta\gamma_a'')} d\arg(w-a)=2\pi\alpha$, то $l_a''\geqslant\pi\alpha$ (дуги γ_a'' лежат целиком в области $1/2\leqslant|w-a|\leqslant 1$ и видны из точки под углом не меньшим $2\pi\alpha$). Отсюда

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a'')}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a'')}d\arg(w-a)\leqslant\sum_{(\gamma_a'')}\alpha\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{(\gamma_a'')}l_a''. \tag{10}$$

Из (7), (8), (9), (10) получим

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\,a)}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=-\nu(r,\,a)+hl,$$

где $|h|$ ограничена, l — общая длина дуг вида γ_a' и γ_a''. Учитывая, что $l<h(a)\,L(r)$, где $h(a)=\mathrm{const}$, получим доказательство (5). Доказательство (6) аналогично.

Теорема I следует из лемм 1 и 2.

Выведем теперь из теоремы I теорему I′. Пусть F — конечная, односвязная, с гладким краем поверхность наложения. По основной теореме конформных отображений поверхность F^* есть образ круга $|z|\leqslant 1$ при отображении некоторой мероморфной функцией $f(z)$. При этом выполняются равенства

$$n(1,\,a,\,f)=n(F,\,a),\quad \nu(1,\,a,\,f)=\nu(F,\,a),$$

$$A(1,\,f)=A(F),\quad L(1,\,f)=L(F).$$

Применив теорему I к функции $f(z)$ с $r=1$, получим теорему I′. Теоремы II и II′ вытекают из теорем I и I′ и второй основной теоремы Л. Альфорса.

З а м е ч а н и е 1. Из (1) вытекает интерпретация принципа аргумента

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r}d\arg(w-a)=n(r,\,a)-n(r,\,\infty)=\nu(r,\,\infty)-\nu(r,\,a)+hL(r).$$

С другой стороны, в терминах $\nu(r,\,a)$ уже сам принцип аргумента, по существу, является аналогом первой основной теоремы, поскольку последнее равенство можно переписать так

$$n(r,\,a)+\nu(r,\,a)=n(r,\,\infty)+\nu(r,\,\infty)+hL(r).$$

З а м е ч а н и е 2. Лемма 1 представляет, по-видимому, самостоятельный интерес. Например, продифференцировав тождество Картана ([1], стр. 179, формула 15) по $d\ln t$ и, применив лемму 1, сразу получаем вывод аналога тождества Картана (не зависящий от теории поверхностей наложения) в виде

$$A(r)=\int_0^{2\pi} n(r, e^{i\theta})\,d\theta + hL(r).$$

В заключение выражаю благодарность члену-корреспонденту АН Арм.ССР Н. У. Аракеляну и А. А. Гольдбергу за ценные обсуждения работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.V.1976

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ. Դեֆեկտային արժեքները և վերադրման մակերևույթների կառուցվածքը *(ամփոփում)*

$|z|<R\leq\infty$ *շրջանում մերոմորֆ* $w(z)$ *ֆունկցիայի համար մտցվում է և ուսումնասիրվում* $\nu(r, a)$ *մի մեծություն, որը սահմանվում է* $w(z)$ *ֆունկցիայով արտապատկերելուց* $|z|\leq r<R$ *շրջանի եզրի պատկերի կառուցվածքի տերմիններով։ Ստացված են մերոմորֆ ֆունկցիաների բաշխման տեսության հիմնական թեորեմների անալոգները, որոնց մեջ* $\nu(r, a)$ *մեծությունը կատարում է նույն դերը, ինչպես* $m(r, a)$ *մեծությունը Ռ. Նևանլիննայի տեսության մեջ։ Բերվում են կիրառություններ վերադրման մակերևույթների և դիֆերենցիալ երկրաչափության մեջ։*

G. A. BARSEGHIAN. *Defficent values and the structure of covering surfaces* (summary)

For a function $w(z)$ meromorphic in $|z|<R\leq\infty$ we introduce and investigate a certain quantity $\nu(r, a)$ defined in terms of the boundary structure of the image of $|z|\leq r<R$ under the mapping $w(z)$.

The analogues of the basic theorems of the distribution theory of meromorphic functions are obtained in which $\nu(r, a)$ plays the same role as the function $m(r, a)$ in the theory of R. Nevanlinna. Applications to the covering surfaces and differential geometry are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Изд. ОНТИ, 1941.
2. *П. К. Рашевский.* Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, М., 1956.