ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 1, 1977 Математика

Ф. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

# О КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассматриваются вопросы спектрального анализа канонических дифференциальных операторов. Для исторических и библиографических справок можно обратиться к монографии [1], которая тесно примыкает к рассматриваемым здесь вопросам.

## § 1. Операторы, порожденные каноническими дифференциальными выражениями, и их спектральные функции

1°. Пусть $H$ — гильбертово пространство и $J$ — оператор со свойствами $J^* = -J$, $J^2 = -I$ ($I$ — единичный оператор в $H$). Формулой $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \mp iJ)$ определяется пара взаимно дополнительных ортопроекторов $P_{\pm}$ ($P_+ + P_- = I$), проектирующих $H$ на собственные подпространства $H_{\pm} = P_{\pm} H$ оператора $J$, отвечающие собственным значениям $\pm i$ ($J = iP_+ - iP_-$).

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$J \frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r) = f(r) \quad (0 \leqslant r < \infty), \tag{1.1}$$

где $V(r)$ и $f(r)$ — функции со значениями в $[H]$* и $H$ соответственно, измеримые и интегрируемые по Бохнеру на любом компакте, содержащемся в $[0, \infty)$. Под решением уравнения (1.1) будем понимать локально абсолютно-непрерывную функцию $x(r)$ со значениями в $H$, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду. Это условие на функцию $x(r)$, в силу гильбертовости пространства $H$, равносильно представлению

$$x(r) = x(r_0) + \int_{r_0}^{r} y(t)\, dt,$$

где $y(t)$ — локально интегрируемая функция. Таким образом, определяемое решение уравнения (1.1) является по существу решением интегрального уравнения

* Через $[H]$ обозначено кольцо ограниченных линейных операторов, действующих в $H$.

$$x(r) = x(r_0) + \int_{r_0}^{r} V(t)\,x(t)\,dt + \int_{r_0}^{r} f(t)\,dt.$$

Это уравнение однозначно разрешимо (см. [2], стр. 141). Пусть оператор-функция $V(r)$ принимает самосопряженные значения: $V^*(r) = V(r)$ и рассмотрим оператор $A_0$, определяемый дифференциальным выражением

$$J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\,x(r) \tag{1.2}$$

на многообразии $D(A_0) \subset L^2(0, \infty; H)$ финитных (на бесконечности) абсолютно-непрерывных вектор-функций $x(r)$ таких, что $x(0) = 0$ и

$$J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\,x(r) \in L^2(0, \infty; H).$$

Описание симметрических и самосопряженных расширений и спектральных функций оператора $A_0$ можно получить как частный случай из результатов работы [2]. В связи с этими вопросами см. также [3] и [4]. Для удобства приведем здесь изложение этих вопросов для рассматриваемого нами случая.

Лемма. *Пусть $f \in L^2(0, R; H)$ при каждом $R < \infty$. Тогда если*

$$\int_0^\infty (f(r), (A_0 h)(r))\,dr = 0 \tag{1.3}$$

*для всех $h \in D(A_0)$, то $f(r)$ — локально абсолютно-непрерывная функция и*

$$J\frac{df(r)}{dr} - V(r)\,f(r) = 0. \tag{1.4}$$

Доказательство. Рассмотрим операторное решение (оператор Коши) $U(r)$ задачи Коши

$$J\frac{dU(r)}{dr} - V(r)\,U(r) = 0, \quad U(0) = I.$$

Известно ([5], стр. 205), что $U(r)$ $J$-унитарный оператор

$$U^*(r)\,JU(r) = U(r)\,JU^*(r) = J \quad (-JU(r)\,JU^*(r) =$$
$$= -U(r)\,J\,U^*(r)\,J = I).$$

Финитная функция $g \in L^2(0; \infty; H)$ принадлежит области значений $R(A_0)$ оператора $A_0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty U^*(r)\,g(r)\,dr = 0. \tag{1.5}$$

Таким образом, условие (1.3) на $f(r)$ означает, что

$$\int_0^\infty (f(r),\ g(r))\,dr = 0$$

для всех тех финитных $g \in L^2(0, \infty; H)$, которые удовлетворяют условию (1.5). Положим $f_1(r) = -JU^*(r)\,Jf(r)$ $(f(r) = U(r)\,f_1(r))$ и $g_1(r) = U^*(r)\,g(r)$. Имеем $(f(r),\ g(r)) = (f_1(r),\ g_1(r))$, так что

$$\int_0^\infty (f_1(r),\ g_1(r))\,dr = 0$$

для всех тех финитных функций $g_1 \in L^2(0, \infty; H)$, для которых

$$\int_0^\infty g_1(r)\,dr = 0.$$

Отсюда для функции вида

$$g_1(r) = \begin{cases} f_1(r) - \dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^R f_1(t)\,dt = f_1(r) - f_0 & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant R \\ 0 & \text{при } r > R \end{cases}$$

получим

$$\int_0^\infty (g_1(r),\ g_1(r))\,dr = \int_0^\infty (f_1(r),\ g_1(r))\,dr - \left(f_0, \int_0^\infty g_1(r)\,dr\right) = 0.$$

Таким образом, $f_1(r) \equiv f_0$ или $f(r) = U(r)\,f_0$. Последнее и доказывает справедливость леммы.

Предложение 1.1. *Оператор $A_0$ симметрический.*

Действительно, условие $(A_0x, y) = (x, A_0y)$ $\forall\, x, y \in D(A_0)$ получается интегрированием по частям. Плотность $D(A_0)$ в $L^2(0, \infty; H)$ легко следует из леммы, ибо если $(f, h) = 0$ $\forall h \in D(A_0)$, то рассмотрев функцию $x(r)$, являющуюся решением уравнения (1.1), получим

$$\int_0^\infty (x(r),\ (A_0h)(r))\,dr = \int_0^\infty \left( J\,\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\ \ x(r),\ h(r)\right) dr =$$

$$= \int_0^\infty (f(r)\ h(r))\,dr = 0.$$

Поэтому $x(r)$ удовлетворяет уравнению (1.4) и, значит $f(r) = 0$.

Предложение 1.2. *Оператор $A_0^*$ задается дифференциаль-*

*ным выражением* (1.2) *на многообразии* $D(A_0^*)$ *локально абсолютно-непрерывных функций* $x(r)$ *из* $L^2(0, \infty; H)$ *таких, что*

$$J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\,x(r)$$

*также принадлежит* $L^2(0, \infty; H)$.

Пусть $x(r)$ принадлежит области определения оператора $A_0^*$. Тогда существует $x^* \in L^2(0, \infty; H)$ такая, что $(x, A_0h) = (x^*, h)$ $\forall h \in D(A_0)$. Рассмотрим решение $g(r)$ уравнения

$$J\frac{dg(r)}{dr} - V(r)\,g(r) = x^*(r).$$

Так как

$$(x^*, h) = \int_0^\infty \left( J\frac{dg(r)}{dr} - V(r)\,g(r),\ h(r) \right) dr = \int_0^\infty (g(r), (A_0h)(r))\,dr,$$

то

$$\int_0^\infty (x(r) - g(r), (A_0h)(r))\,dr = 0 \quad \forall h \in D(A_0).$$

В силу леммы функция $x(r)$ вместе с $x(r) - g(r)$ локально абсолютно-непрерывна и

$$J\frac{d(x(r) - g(r))}{dr} - V(r)(x(r) - g(r)) = 0.$$

Итак, $x \in D(A_0^*)$ и

$$x^*(r) = (A_0^* x)(r) = J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\,x(r).$$

Утверждение доказано.

2°. При описании симметрических расширений оператора $A_0$ мы будем следовать методу Калкина (см. [6], стр. 390), который состоит в следующем.

Рассмотрим гильбертово пространство $D(A_0^*)$ со скалярным произведением $(x, y)_1 = (x, y) + (A_0^* x, A_0^* y)$ и в нем билинейную форму

$$\{x, y\} = i\,[(A_0^* x, y) - (x, A_0^* y)]. \tag{1.6}$$

Подпространство $D \subset D(A_0^*)$ называется симметрическим, если билинейная форма (1.6) на $D$ равна нулю: $\{x, y\} = 0$ $\forall x, y \in D$. Подпространство $D^* = \{x \in D(A_0^*) \mid \{x, y\} = 0 \ \forall y \in D\}$ называется сопряженным к подпространству $D$. Тогда любое замкнутое симметрическое расширение $A$ оператора $A_0$ получается сужением оператора $A_0^*$ на симметрическое подпространство $D \subset D(A_0^*)$. Прм этом сужение оператора $A_0^*$ на подпространство $D^*$ задает оператор $A^*$.

В нашем случае

$$\{x, y\} = i \int_0^\infty \Big[\Big( J \frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r),\ y(r)\Big) - \Big( x(r), J \frac{dy(r)}{dr} - V(r)\, y(r)\Big)\Big] dr =$$

$$= i \int_0^\infty \frac{d}{dr} (Jx(r),\ y(r))\, dr = \lim_{R \to \infty} (iJx(R),\ y(R)) - (iJx(0),\ y(0)).$$

Числовая функция $(iJx(R), y(R))$ принадлежит $L^2(0, \infty)$ и при $R \to \infty$ имеет предел. Поэтому $\lim_{R \to \infty} (iJx(R), y(R)) = 0$ и окончательно получаем

$$\{x, y\} = ((-iJ)\, x(0),\ y(0)).$$

Это делает возможным дать описание симметрических расширений оператора $A_0$ в терминах $(-iJ)$-нейтральных подпространств пространства $H^*$.

Предложение 1.3. *Произвольное замкнутое симметрическое расширение $A_p$ оператора $A_0$ дается сужением оператора $A_0^*$ на подпространство $D(A_p)$ вида*

$$D(A_p) = \{x \in D(A_0^*) \mid P_L\, x(0) = x(0)\}, \tag{1.7}$$

*где $P_L$ — ортопроектор на $(-iJ)$-нейтральное подпространство $L$ в $H$. При этом расширение $A_p$ является максимальным симметрическим (самосопряженным) в том и только в том случае, когда $(-iJ)$-нейтральное подпространство $L$ является максимальным (гипермаксимальным).*

Замечание. Проектор $P_L$ на $(-iJ)$-нейтральное подпространство $L$ можно задать в виде

$$P_L = \frac{1}{2} (K + K^* + KK^* + K^* K),$$

где $K$ — частично изометрический оператор, отображающий $H_+$ в $H_-$. При этом $K$ является угловым оператором подпространства $L$ (см. [4]). В случае, когда $K$ отображает все $H_+$ на $H_-$

$$P = \frac{1}{2} (I + K + K^*) \tag{1.8}$$

* Относительно понятий, связанных с $(-iJ)$-метрикой $(-iJ = P_+ - P_-)$ пространства $H$, см. [7].

является проектором на гипермаксимальное $(-iJ)$-нейтральное подпространство. Таким образом, для существования самосопряженного расширения оператора $A_0$ необходимым и достаточным является условие: $\dim H_+ = \dim H_-$.

Другой характеристикой проектора $P$ на $(-iJ)$-нейтральное подпространство является условие: $PJP = 0$.

При этом подпространство $L = PH$ будет гипермаксимальным тогда и только тогда, когда

$$JP + PJ = J. \tag{1.8}$$

В пояснение этого условия заметим, что оно равносильно условию $JP = QJ$ $(Q = I - P)$, которое означает, что подпространство $L = PH$ совпадает со своим $(-iJ)$-ортогональным подпространством, т. е. является гипермаксимальным.

Предложение 1.4. *Пусть ортопроектор $P$ удовлетворяет условию $PJP = 0$ и $\widetilde{A}_p$ — сужение оператора $A_0^*$ на многообразие $D(\widetilde{A}_p)$ финитных функций $x(r)$ из $D(A_0^*)$, удовлетворяющих условию: $Px(0) = x(0)$. Тогда замыканием этого оператора является оператор $A_p$, определенный на многообразии $D(A_p)$ вида* (1.7).

В самом деле, покажем что $(\widetilde{A}_p)^* = A_p^*$. Заметим, что на основании вышесказанного, $A_p^*$ есть сужение $A_0^*$ на подпространство

$$D(A_p^*) = \{y \in D(A_0^*) \mid y(0) \in H \ominus JPH\}.$$

Ясно, что если $y \in D(\widetilde{A}_p^*)$, то для всех $x \in D(\widetilde{A}_p)$ имеем

$$(\widetilde{A}_p x, y) = (x, \widetilde{A}_p^* y) = \int_0^\infty \left(x(r), \; J\frac{dy(r)}{dr} - V(r)y(r)\right)dr = (Jx(0), y(0)) +$$

$$+ \int_0^\infty \left(J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)x(r), y(r)\right)dr = (Jx(0), y(0)) + (\widetilde{A}_p x, y).$$

Таким образом, $(Jx(0), y(0)) = 0$ $\forall x \in D(\widetilde{A}_p)$, т. е. $y(0) \in H \ominus JPH$, что и требовалось доказать.

3°. Рассмотрим здесь вопрос существования спектральных оператор-функций для канонических дифференциальных операторов. Сделаем это с помощью метода М. Г. Крейна. Обоснование метода направляющих функционалов Крейна для случая гильбертовых пространств дано в [8] и [9]. В [9] для канонического дифференциального оператора построено направляющее отображение. Для наших целей удобно рассмотреть несколько отличное от введенного в [9] направляющее отображение. Предварительно сформулируем необходимые понятия и определения.

Через $V(H)$ обозначается множество оператор-функций $F(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ со значениями в $[H]$, удовлетворяющих условиям:

1) $F(0) = 0$,

2) $F(\lambda)$ — неубывающая функция: $F(\lambda) \geqslant F(\mu)$ при $\lambda > \mu$,

3) $F(\lambda)$ — непрерывна слева: $F(\lambda - 0) = F(\lambda)$.

Каждая функция $F(\lambda)$ из семейства $V(H)$ порождает гильбертово пространство $L^2_F(-\infty, \infty; H)$ вектор-функций со значениями в $H$, где скалярное произведение задается формулой

$$(f, g)_F = \int_{-\infty}^{\infty} (F(d\lambda) f(\lambda), g(\lambda)).$$

Определение 1.1. Функция $F \in V(H)$ называется спектральной функцией оператора $A$, действующего в гильбертовом пространстве $H_1$, если существует изометрическое отображение пространства $H_1$ в $L^2_F(-\infty, \infty; H)$ такое, что оператор $A$ переходит в оператор умножения на независимую переменную в $L^2_F(-\infty, \infty; H)$.

Определение 1.2. Пусть $\mathbf{G}$ — некоторое линейное пространство и $A$ — линейный оператор, действующий в $\mathbf{G}$, и пусть $H$ — гильбертово пространство. Отображение $\Phi$: $\mathbf{G} \times R \to H$ называется направляющим отображением для оператора $A$, если

1) $\Phi(f, \lambda)$ при каждом фиксированном $\lambda \in R$ линейно относительно $f \in \mathbf{G}$,

2) $\Phi(f, \lambda)$ при каждом фиксированном $f \in \mathbf{G}$ — голоморфная вектор-функция по $\lambda$ со значениями в $H$,

3) Уравнение $(A - \lambda I) g = f$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\Phi(f, \lambda) = 0$.

В работе [9] (теорема 1) доказано, что в случае, когда $\mathbf{G}$ — евклидово пространство и $A$ — симметрический оператор, обладающий направляющим отображением, удовлетворяющим определенному свойству, то существует функция $F \in V(H)$ такая, что

$$(f, g)_G = \int_{-\infty}^{\infty} (F(d\lambda) \Phi(f, \lambda), \Phi(g, \lambda)). \tag{1.9}$$

Последнее, в силу равенства $\Phi(Af, \lambda) = \lambda \Phi(f, \lambda)$, означает, что $F(\lambda)$ является спектральной функцией оператора $A$.

Рассмотрим в качестве $\mathbf{G}$ многообразие финитных функций из $L^2(0, \infty; H)$ и оператор $\widetilde{A}_p$ в нем. Тогда формулой

$$\Phi(f, \lambda) = QJ \int_0^{\infty} U^*(r, \lambda) f(r)\, dr,$$

где $U(r, \lambda)$ — операторное решение задачи Коши:

$$J \frac{dU(r, \lambda)}{dr} - V(r) U(r, \lambda) = \lambda U(r, \lambda); \; U(0, \lambda) = I, \tag{1.10}$$

определяется направляющее отображение $\Phi$: $\mathbf{G} \times R \to QH$ для оператора $\tilde{A}_p$.

Проверим лишь условие 3) определения 1.2. Положим для некоторого финитного $f \in L^2(0, \infty; H)$

$$g(r) = U(r, \lambda) J \int\limits_r^\infty U^*(t, \lambda) f(t)\, dt.$$

Легко убедиться, что $g(r)$ — финитная абсолютно-непрерывная функция удовлетворяющая уравнению

$$J \frac{dg(r)}{dr} - V(r) g(r) - \lambda g(r) = f(r).$$

Таким образом, для принадлежности функции $g(r)$ многообразию, $D(\tilde{A}_p)$ необходимо и достаточно, чтобы $Pg(0) = g(0)$. Но поскольку

$$g(0) = J \int\limits_0^\infty U^*(t, \lambda) f(t)\, dt = (PJ + QJ) \int\limits_0^\infty U^*(t, \lambda) f(t)\, dt,$$

то последнее условие равносильно условию $\Phi(f, \lambda) = 0$.

Замечание. В случае, когда ортопроектор $P$ удовлетворяет условию (1.8′), отображение $\Phi(f, \lambda)$ можно записать в виде

$$\Phi(f, \lambda) = P \int\limits_0^\infty U^*(r, \lambda) f(r)\, dr.$$

Кроме того, в этом случае замыкание оператора $\tilde{A}_p$ является самосопряженным и на основании теоремы 3 работы [5] можно утверждать, что тождеством (1.9) порождается унитарное отображение пространства $L^2(0, \infty; H)$ на пространство $L^2_\rho(-\infty, \infty; PH)$.

## § 2. Свойства спектральных функций канонических дифференциальных операторов, и обратная задача спектрального анализа

Результаты этого параграфа являются обобщениями работ [10] и [11].

1°. При исследовании свойств спектральных функций канонических дифференциальных операторов, не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением эрмитовых потенциалов $V(r)$, удовлетворяющих условию $J$-эрмитовости: $JV(r) = -V(r)J$ (см. [12], стр. 466). Зафиксируем ортопроектор $P$, удовлетворяющий условию (1.8) и через $A_V$ обозначим здесь рассматриваемый в § 1 оператор $\tilde{A}_p$. При $V(r) \equiv 0$ этот оператор обозначим через $A_0$. Введем оператор-функцию $\Phi_V(r, \lambda) = U_V(r, \lambda) P$, где $U_V(r, \lambda)$ — операторное решение задачи Коши:

$$J \frac{dU_V(r, \lambda)}{dr} - V(r) U_V(r, \lambda) = \lambda U_V(r, \lambda); \; U_V(0, \lambda) = I.$$

При $V(r) \equiv 0$ имеем $\Phi_0(r, \lambda) = U_0(r, \lambda) P = (P_+ e^{-i\lambda r} + P_- e^{i\lambda r}) P$. Рассмотрим оператор $I + \mathbf{K}$ вида

$$(I + \mathbf{K}) f(r) = f(r) + \int_0^r K(r, t) f(t) dt, \tag{2.1}$$

где ядро $K(r, t)$ удовлетворяет при каждом $R < \infty$ условию

$$\sup_{0<t<R} \int_t^R \| K(r, t) \| dr < \infty; \; \sup_{0<r<R} \int_0^r \| K(r, t) \| dt < \infty. \tag{2.2}$$

В силу этого условия $I + \mathbf{K}$ является ограниченным оператором в пространстве $L^2(0, R; H)$ при каждом $R < \infty$.

Предложение 2.1. *Пусть*

$$\Phi(r, \lambda) = \Phi_0(r, \lambda) + \int_0^r K(r, t) \Phi_0(t, \lambda) dt, \tag{2.3}$$

*тогда* $\Phi(r, \lambda) = \Phi_V(r, \lambda)$ *в том, и только в том случае, когда слагаемые*

$$K_1(r, t) = \frac{1}{2} (K(r, t) - J K(r, t) J); \; K_2(r, t) = \frac{1}{2} (K(r, t) + J K(r, t) J)$$

*в разложении ядра* $K(r, t)$ *на перестановочную и антиперестановочную с* $J$ *части удовлетворяют системе*

$$\left\{ \begin{aligned} K_1(r, t) &= -\frac{1}{2} J V\left(\frac{r-t}{2}\right) J_0 - J \int_{\frac{r-t}{2}}^{r-t} V(\tau) K_1(\tau, r - t - \tau) d\tau \, J_0 - \\ &\quad - J \int_{r-t}^{r} V(\tau) K_2(\tau, \tau + t - r) d\tau, \\ K_2(r, t) &= -\frac{1}{2} J V\left(\frac{r+t}{2}\right) - J \int_{\frac{r+t}{2}}^{r} V(\tau) K_1(\tau, r + t - \tau) d\tau. \end{aligned} \right. \tag{2.4}$$

Здесь $J_0 = 2P - I$ $(J_0 = P - Q; \; Q = I - P)$.

Доказательство. Если $\Phi(r, \lambda) = \Phi_V(r, \lambda)$, то удовлетворяется уравнение

$$\Phi(r, \lambda) = \Phi_0(r, \lambda) - \int_0^r U_0(r - s, \lambda) J V(s) \Phi(s, \lambda) ds. \tag{2.5}$$

Поэтому

$$\int_0^r K(r,t)\,\Phi_0(t,\lambda)\,dt = -\int_0^r U(r-s,\lambda)\,JV(s)\Big[\Phi_0(s,\lambda) + \int_0^s K(s,\tau)\,\Phi_0(\tau,\lambda)\,d\tau\Big]\,ds. \tag{2.6}$$

Учитывая, что $K_1(r,t)\,U_0(t,\lambda) = U_0(t,\lambda)\,K_1(r,t)$ и $K_2(r,t)\,U_0(t,\lambda) = U_0^*(t,\lambda)\,K_2(r,t)$, после соответствующих преобразований получаем

$$\int_0^r K(r,t)\,\Phi_0(t,\lambda)\,dt = \int_0^r U_0(t,\lambda)\,K_1(r,t)\,dt\,P + \int_0^r U_0^*(t,\lambda)\,K_2(r,t)\,dt\,P,$$

$$\int_0^r U_0(r-s,\lambda)\,JV(s)\,\Phi_0(s,\lambda)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^r U_0(s,\lambda)\,JV\left(\frac{r-s}{2}\right)ds\,P + \frac{1}{2}\int_0^r U_0^*(s,\lambda)\,JV\left(\frac{r+s}{2}\right)ds\,P,$$

$$\int_0^r U_0(r-s,\lambda)\,JV(s)\left(\int_0^r K(s,\tau)\,\Phi_0(\tau,\lambda)\,d\tau\right)ds = \int_0^r U_0^*(\tau,\lambda)\left(\int_{\frac{r+\tau}{2}}^{\tau} JV(s)\,K_1(s, r+\tau-s)\,ds\right)d\tau\,P +$$

$$+ \int_0^r U_0(\tau,\lambda)\left(\int_{\frac{r-\tau}{2}}^{r-\tau} JV(s)\,K_1(s, r-\tau-s)\,ds\right)d\tau\,P + \int_0^r U_0^*(\tau,\lambda)\left(\int_{r-\tau}^{r} JV(s)\,K_2(s, \tau+s-r)\,ds\right)d\tau\,P.$$

Приравняв теперь в равенстве (2.6) члены при $U_0(t,\lambda)$ и $U_0^*(t,\lambda)$, получим систему

$$K_1(r,t)\,P = -\frac{1}{2}\,JV\left(\frac{r-t}{2}\right)P - J\int_{\frac{r-t}{2}}^{r-t} V(\tau)\,K_1(\tau, r-t-\tau)\,d\tau\,P - J\int_{r-t}^{r} V(\tau)\,K_2(\tau, t+r-\tau)\,d\tau\,P,$$

$$K_2(r,t)\,P = -\frac{1}{2}\,JV\left(\frac{r+t}{2}\right)P - J\int\limits_{\frac{r+t}{2}}^{r} V(\tau)\,K_1(\tau,\ r+t-\tau)\,d\tau\ P.$$

Заметим теперь, что если через $T_1$ и $T_2$ обозначены перестановочная и антиперестановочная с $J$ части оператора $T$, то

$$(T_i\ P)_j = \frac{1}{2}\,T_i\ J_0 \text{ и } (T_i P)_i = \frac{1}{2}\,T_i \quad (i,\ j=1,\ 2).$$

Поэтому полученная система равносильна системе (2.4). Обратно, если $K_i\ (r,\ t)(i=1,\ 2)$ удовлетворяют системе (2.4), то обращая приведенные рассуждения, убедимся, что $\Phi\ (r,\ t)$, определенная формулой (2.3), удовлетворяет уравнению (2.5). Таким образом, можно сказать, что система (2.4) определяет оператор преобразования (2.1).

Наряду с системой (2.4) рассмотрим систему

$$\left\{\begin{aligned} L_1(r,\ t) &= \frac{1}{2}\,JV\left(\frac{r-t}{2}\right)J_0 + J\int\limits_0^{\frac{r-t}{2}} L_1(r-t-\tau,\ \tau)\,V(\tau)\,d\tau\ J_0\ + \\ &\quad + J\int\limits_0^{t} L_2(r-t+\tau,\ \tau)\,V(\tau)\,d\tau, \\ L_2(r,\ t) &= \frac{1}{2}\,JV\left(\frac{r+t}{2}\right) + J\int\limits_{t}^{\frac{r+t}{2}} L_1(r+t-\tau,\ \tau)\,V(\tau)\,d\tau, \end{aligned}\right. \qquad (2.7$$

и оператор $I + \mathbf{L}$ вида

$$(I+\mathbf{L})\,f(r) = f(r) + \int\limits_0^{r} L(r,\ t)\,f(t)\,dt,$$

где $L(r,\ t) = L_1(r,\ t) + L_2(r,\ t)$.

Существование и единственность решений систем (2.4) и (2.7) в классе оператор-функций, удовлетворяющих условиям (2.2), доказывается методом последовательных приближений. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 2.1. *Пусть оператор-функция $K(r,\ t)$, удовлетворяющая условиям (2.2), такова, что*

$$J\,\frac{d}{dr}\int\limits_0^{\infty} K(r,\ t)\,f(t)\,dt = \int\limits_0^{\infty} K(r,\ t)\,J\,\frac{df(t)}{dt}\,dt \qquad (2.8)$$

*для всех финитных абсолютно непрерывных функций $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(0)=0$. Тогда $K(r,\ t) = K_1(r-t) + K_2(r+t)$, где $JK_1(r) = K_1(r)\,J$, $JK_2(r) = -K_2(r)\,J$.*

Доказательство. Рассмотрим функции $f(t)$ вида

$$f(t) = \begin{cases} \int_t^R g(s)\, ds & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant R \\ 0 & \text{при } R < t < \infty, \end{cases}$$

где функция $g(s)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^R g(s)\, ds = 0.$$

Тогда из (2.8) интегрированием по $r$ от 0 до $\tau$ $(0 \leqslant \tau \leqslant R)$ получим

$$\int_0^R \left[ \int_0^s (JK(\tau, t) - JK(0, t))\, dt \right] g(s)\, ds = -\int_0^R \left( \int_0^\tau K(r, s)\, J\, dr \right) g(s)\, ds$$

или, положив

$$B(\tau, s) = \int_0^s (JK(\tau, t) - JK(0, t))\, dt + \int_0^\tau K(r, s)\, J dr,$$

получим

$$\int_0^R B(\tau, s)\, g(s)\, ds = 0 \quad \forall g \text{ таких, что } \int_0^R g(s)\, ds = 0.$$

Рассмотрим

$$g(s) = B^*(\tau, s)\, h - \frac{1}{R} \int_0^R B^*(\tau, s)\, h\, ds = B^*(\tau, s)\, h - h_0 \quad (h \in H).$$

Имеем

$$\int_0^R (B^*(\tau, s)\, h - h_0,\ B^*(\tau, s)\, h)\, ds = 0 \quad \forall h \in H.$$

Отсюда

$$\int_0^R \| B^*(\tau, s)\, h \|^2\, ds = \frac{1}{R} \left\| \int_0^R B^*(\tau, s)\, h ds \right\|^2,$$

поэтому

$$B^*(\tau, s)\, h = \frac{1}{R} \int_0^R B^*(\tau, s)\, h ds \quad \forall h \in H.$$

Таким образом, $B(\tau, s)$ не зависит от $s$ и $B(\tau, s) = B(\tau, 0)$. Получили равенство

$$\int_0^s JK(\tau, t)\,dt + \int_0^\tau K(r, s)\,J dr = \int_0^s JK(0, t)\,dt + \int_0^\tau K(r, 0)\,J dr.$$

Приравнивая перестановочную и антиперестановочную с $J$ части в этом равенстве, получим

$$\int_0^s K_1(\tau, t)\,dt + \int_0^\tau K_1(r, s)\,dr = \int_0^s K_1(0, t)\,dt + \int_0^\tau K_1(r, 0)\,dr,$$

$$\int_0^s K_2(\tau, t)\,dt - \int_0^\tau K_2(r, s)\,dr = \int_0^s K_2(0, t)\,dt - \int_0^\tau K_2(r, 0)\,dr.$$

Эти соотношения доказывают утверждение леммы.

Предложение 2.2. *Операторы $I + \mathbf{K}$ и $I + \mathbf{L}$, рассматриваемые в пространстве $L^2(0, R;\ H)$ $(R < \infty)$, взаимно обратные.*

Для доказательства заметим сначала, что операторы $I + \mathbf{K}$ и $I + \mathbf{L}$ множество $\mathbf{C}$ локально абсолютно-непрерывных функций $f$, удовлетворяющих в нуле условию $Pf(0) = f(0)$, отображают в себя же. При этом справедливы тождества

$$(I + \mathbf{K})\,J\,\frac{df(r)}{dr} = \left(J\,\frac{d}{dr} - V(r)\right)(I + \mathbf{K})\,f(r) \tag{2.9}$$

$$\forall f \in \mathbf{C}.$$

$$(I + \mathbf{L})\left(J\,\frac{df(r)}{dr} - V(r)\,f(r)\right) = J\,\frac{d}{dr}\,(I + \mathbf{L})\,f(r) \tag{2.9'}$$

В этом легко убедиться, подставляя значения $K_i(r, t)$ и $L_i(r, t)$ $(i = 1, 2)$ из (2.4) и (2.7) в выражения $(I + \mathbf{K})\,f$ и $(I + \mathbf{L})\,f$ и вычисляя обе части тождеств (2.9) и (2.9′). Рассмотрим оператор $I + \mathbf{M} = (I + \mathbf{L})(I + \mathbf{K})$. Ядро $M(r, t)$ оператора $\mathbf{M}$ имеет вид

$$M(r,t) = \begin{cases} L(r, t) + K(r, t) + \displaystyle\int_t^r L(r, s)\,K(s, t)\,ds & \text{при } 0 \le t \le r \\ 0 & \text{при } r < t < \infty. \end{cases}$$

Поскольку, как легко видеть из систем (2.4) и (2.7), ядра $K(r, t)$, $L(r, t)$ удовлетворяют соотношению $K(r, 0)\,Q = L(r, 0)\,Q = 0$, то и $M(r, 0)\,Q = 0$. Далее, из (2.9) и (2.9′) следует, что

$$(I + \mathbf{M})\,J\,\frac{df(r)}{dr} = J\,\frac{d}{dr}\,(I + \mathbf{M})\,f(r), \quad \forall f \in \mathbf{C}.$$

На основании леммы 2.1 можем утверждать, что

$M(r, t) = M_1(r-t) + M_2(r+t)(JM_1(r) = M_1(r)J;\ JM_2(r) = -M_2(r)J)$.

Из вышеприведенных свойств $M(r, t)$ следует, что

$$M_1(-t) = M_2(r) = 0\ (t > 0) \text{ и } M_2(r)Q = 0\ (r > 0).$$

Последнее означает, что и $M_2(r) = 0$ $(r > 0)$. Таким образом, $(I + \mathbf{L})(I + \mathbf{K}) = I$ и утверждение доказано.

Рассмотрим операторы $I + \mathbf{K}^*$ и $I + \mathbf{L}^*$, действующие на множестве финитных функций из $L^2(0, \infty; H)$ по формулам

$$(I + \mathbf{K}^*) f(r) = f(r) + \int_r^\infty K^*(t, r) f(t)\, dt,$$

$$(I + \mathbf{L}^*) f(r) = f(r) + \int_r^\infty L^*(t, r) f(t)\, dt.$$

В пространстве $L^2(0, R; H)$ они являются сопряженными к операторам $I + \mathbf{K}$ и $I + \mathbf{L}$. Как и выше непосредственно проверяется, что операторы $I + \mathbf{K}^*$ и $I + \mathbf{L}^*$ множество $\mathbf{C}_0$ финитных абсолютно-непрерывных функций $f$, удовлетворяющих в нуле условию $Pf(0) = f(0)$, отображают на себя и справедливы тождества

$$(I+\mathbf{K}^*)\left(J\frac{df(r)}{dr} - V(r) f(r)\right) = J\frac{d}{dr}(I + \mathbf{K}^*) f(r) \tag{2.10}$$

$$\forall f \in \mathbf{C}_0$$

$$(I + \mathbf{L}^*)\, J\frac{df(r)}{dr} = \left(J\frac{d}{dr} - V(r)\right)(I + \mathbf{L}^*) f(r). \tag{2.10'}$$

Положим $I + \mathbf{H} = (I + \mathbf{L})(I + \mathbf{L}^*)$. Ядро $H(r, t)$ оператора $\mathbf{H}$ имеет вид

$$H(r, t) = \begin{cases} L(r, t) + \int_0^t L(r, s) L^*(t, s)\, ds & \text{при } r \geqslant t \\ L^*(t, r) + \int_0^r L(r, s) L^*(t, s)\, ds & \text{при } r < t. \end{cases}$$

Из соотношений (1.9′) и (2.10′) следует, что

$$(I + \mathbf{H})\, J\frac{df(r)}{dr} = J\frac{d}{dr}(I + \mathbf{H}) f(r) \quad \forall f \in \mathbf{C}_0.$$

Поэтому в силу леммы 2.1

$$H(r, t) = H_1(r-t) + H_2(r+t)(JH_1(r) = H_1(r)J;\ JH_2(r) = -H_2(r)J). \tag{2.11}$$

Учитывая теперь свойства $H^*(r, t) = H(t, r)$ и $H(r, 0)\, Q = 0$ ядра $H(r, t)$, получим

$$H_2(r) = H_1(r) J_0;\ H_1^*(r) = H_1(-r) = J_0 H_1(r) J_0\ (J_0 = P - Q;\ r > 0). \tag{2.12}$$

2°. Перейдем к рассмотрению свойств спектральной функции $\Sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ оператора $A_V$. На основании § 1 для всех финитных функций $f$, $g$ из $L^2(0, \infty; H)$ выполняется равенство

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(f, \lambda), \Sigma(d\lambda)\, \Phi(g, \lambda)), \tag{2.13}$$

где

$$\Phi(f, \lambda) = P \int_0^\infty U^*(r, \lambda) f(r)\, dr = \int_0^\infty \Phi^*(r, \lambda) f(r)\, dr.$$

В силу (2.2) для $\Phi(f, \lambda)$ получим представление

$$\Phi(f, \lambda) = \int_0^\infty \left( \Phi_0^*(r, \lambda) + \int_0^r \Phi_0^*(s, \lambda) K^*(r, s)\, ds \right) f(r)\, dr =$$

$$= \int_0^\infty \Phi_0^*(s, \lambda) \left( f(s) + \int_s^\infty K^*(r, s) f(s)\, ds \right) = \int_0^\infty \Phi_0^*(s, \lambda)\, (I + \mathbf{K}^*) f(s)\, ds.$$

Положим $(I + \mathbf{K}^*) f(r) = f_0(r)$ и $(I + \mathbf{K}^*)\, g(r) = g_0(r)$, тогда

$$(I + \mathbf{L}^*) f_0(r) = f(r) \text{ и } (I + \mathbf{L}^*)\, g_0(r) = g(r).$$

Соотношение (2.13) запишется в виде

$$((I + \mathbf{H}) f_0, g_0) = ((I + \mathbf{L}^*) f_0, (I + \mathbf{L}^*)\, g_0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_0(f_0, \lambda), \Sigma(d\lambda)\, \Phi_0(g_0, \lambda)),$$

где

$$\Phi_0(f_0, \lambda) = \int_0^\infty \Phi_0^*(r, \lambda) f_0(r)\, dr.$$

Отобразим теперь пространство $L^2(0, \infty; H)$ на пространство $L^2(-\infty, \infty; H_+)$ следующим образом. Пусть $K$ — изометрическое отображение $H_+$ на $H_-$, участвующее в представлении (1.8) проектора $P$. Элементу $f \in L^2(0, \infty; H)$ поставим в соответствие элемент $\tilde{f} \in L^2(-\infty, \infty; H_+)$ по формуле

$$\tilde{f}(r) = \begin{cases} P_+ f(r) & \text{при } r > 0 \\ K^* f(-r) & \text{при } r < 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Легко проверить, что это — изометрическое отображение и что при этом отображении интегральный оператор

$$\mathbf{M} f(r) = \int_0^\infty M(r, t) f(t)\, dt$$

переходит в оператор

$$\widetilde{\mathbf{M}} \widetilde{f}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{M}(r, t) \widetilde{f}(t)\, dt,$$

в котором ядро $\widetilde{M}(r, t)$ $(-\infty < r, t < \infty)$ задается формулой

$$\widetilde{M}(r, t) = \begin{cases} P_+ M(\ \ r, \ \ \ t) P_+ & \text{при} \quad r, \quad t > 0 \\ P_- M(\ \ r, -t) K & \text{при} + r, -t > 0 \\ K^* M(-r, \ \ \ t) P_+ & \text{при} - r, \quad t > 0 \\ K^* M(-r, -t) K & \text{при} - r, -t > 0. \end{cases}$$

Поэтому в силу (2.11) и (2.12) оператор $I + \mathbf{H}$ перейдет в оператор

$$(I + \widetilde{\mathbf{H}}) \widetilde{f}(r) = \widetilde{f}(r) + \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{H}(r - t) \widetilde{f}(t)\, dt, \tag{2.15}$$

где $\widetilde{H}(r) = P_+ H_1(r) P_+ \ (-\infty < r < \infty)$. Отметим, что в силу (2.12) оператор-функция $\widetilde{H}(r)$ эрмитова: $\widetilde{H}(-r) = \widetilde{H}^*(r)$. С другой стороны

$$\int_0^\infty \Phi_0^*(r, \lambda) f(r)\, dr = P \int_0^\infty (P_+ e^{i\lambda r} + P_- e^{-i\lambda r}) f(r)\, dr = PP_+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r} \widetilde{f}(r)\, dr.$$

Таким образом, соотношение (2.13) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{f}(r), \widetilde{g}(r))\, dr + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{H}(r-t) \widetilde{f}(t), \widetilde{g}(r))\, dt\, dr =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r} \widetilde{f}(r)\, dr, \Sigma_1(d\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r} \widetilde{g}(r)\, dr \right), \tag{2.16}$$

где $\Sigma_1(\lambda) = P_+ P\Sigma(\lambda) PP_+$*. Последнее соотношение вместе с тем фактом, что оператор $I + \widetilde{\mathbf{H}}$ в каждом из пространств $L^2(0, R; H)$ $(R < \infty)$ допускает факторизацию вида

---

* $2\Sigma_1(\lambda)$ является образом оператора $\Sigma(\lambda)$ при изоморфном соответствии пространств $H_+$ и $PH$, задаваемом отображениями $\sqrt{2}\, PP_+$ и $\sqrt{2}\, P_+ P$.

$$I+\widetilde{\mathbf{H}}=(I+\widetilde{\mathbf{K}})^{-1}(I+\widehat{\mathbf{K}}^*)^{-1}, \tag{2.17}$$

где оператор $\widetilde{\mathbf{K}}$ действует по формуле

$$\widetilde{\mathbf{K}}\widetilde{f}(r)=\int_{-|r|}^{|r|}\widetilde{K}(r,t)\widetilde{f}(t)\,dt,$$

дают возможность выявить необходимые условия на спектральную функцию $\Sigma_1(\lambda)$.

Определим оператор-функцию $\Pi(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ формулой

$$\Pi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}tI+\displaystyle\int_0^t\widetilde{H}(s)(t-s)\,ds & \text{при } t\geqslant 0\\ -\dfrac{1}{2}tI+\displaystyle\int_t^0\widetilde{H}(s)(t-s)\,ds & \text{при } t<0.\end{cases}$$

Из (2.16) при $\widetilde{f}(r)=\widetilde{g}(r)=\chi_\tau(r)\,h$, где $h\in H_t$, а $\chi_\tau(r)$ — характеристическая функция множества $[-\tau,\tau]$, получим

$$2(\operatorname{Re}\Pi(2\tau)\,h,h)=2\tau(h,h)+\int\!\!\int_{-\tau}^{\tau}(\widetilde{H}(r-t)\,h,h)\,dt\,dr=$$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2\lambda\tau}{\lambda^2}(\Sigma_1(d\lambda)\,h,h).$$

Отсюда

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}(\operatorname{Re}\Pi(2\tau)\,h,h)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin 2\lambda\varepsilon}{2\lambda\varepsilon}\right)\frac{(\Sigma_1(d\lambda)\,h,h)}{\lambda^2}.$$

Зафиксируем $\varepsilon$ и выберем $N$ так, что при $|\lambda|>N$ имеет место $1-\dfrac{\sin 2\lambda\varepsilon}{2\lambda\varepsilon}>\dfrac{1}{2}$. Получим

$$\int_{|\lambda|>N}\frac{(\Sigma_1(d\lambda)\,h,h)}{1+\lambda^2}\leqslant\int_{|\lambda|>N}\frac{(\Sigma_1(d\lambda)\,h,h)}{\lambda^2}\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin 2\lambda\varepsilon}{2\lambda\varepsilon}\right)\frac{(\Sigma_1(d\lambda)\,h,h)}{\lambda^2}<\infty.$$

Поэтому спектральная функция $\Sigma_1(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Sigma_1(d\lambda)\, h, h)}{1+\lambda^2} < \infty .$$

Далее, для финитных непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\tilde{f}(r)$ и $\tilde{g}(r)$ имеем

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int (\Pi(r-t)\tilde{f}'(t), \tilde{g}'(r))\, dt dr = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}(r), \tilde{g}(r))\, dr +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int (\breve{H}(r-t), \tilde{f}(t), \tilde{g}(r))\, dt dr = \int_{-\infty}^{\infty}\Big( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r}\tilde{f}(r)\, dr,\ \Sigma_1(d\lambda)\ \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r}\tilde{g}(r)\, dr \Big) = \int_{-\infty}^{\infty}\Big( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r}\tilde{f}'(r)\, dr,\ \frac{\Sigma_1(d\lambda)}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r}\tilde{g}'(r)\, dr \Big).$$

Выбрав $\tilde{f}_n(r)$, стремящуюся к $\delta(r)\,h$ и $\tilde{g}'(r) = \varphi(r)\,h$, где $h \in H_+$, $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, а $\varphi(r)$ — финитная числовая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} t\varphi(t)\, dt = 0,$$

получим

$$-\int_{-\infty}^{\infty} (\Pi(r)\, h, h)\, \varphi(r)\, dr = \int_{-\infty}^{\infty}\Big( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda r}\varphi(r)\, dr \Big)\frac{(\Sigma_1(d\lambda)\, h, h)}{\lambda^2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[ \int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{-i\lambda r} - 1 + \frac{i\lambda r}{1+\lambda^2}\Big)\varphi(r)\, dr\Big]\frac{(\Sigma_1(d\lambda)\, h, h)}{\lambda^2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[ \int_{-\infty}^{\infty}\Big( e^{-i\lambda r} - 1 + \frac{i\lambda r}{1+\lambda^2}\Big)\frac{(\Sigma_1(d\lambda)\, h, h)}{\lambda^2}\Big]\varphi(r)\, dr.$$

Отсюда

$$\Pi(r) = A + Br - \int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{-i\lambda r} - 1 + \frac{i\lambda r}{1+\lambda^2}\Big)\frac{(\Sigma_1(d\lambda)\, h, h)}{\lambda^2}.$$

Учитывая, что $\Pi^*(r) = \Pi(-r)$ и $\Pi(0) = 0$, окончательно получим

$$\Pi(r) = iBr - \int_{-\infty}^{\infty}\Big( e^{-i\lambda r} - 1 + \frac{i\lambda r}{1+\lambda^2}\Big)\frac{(\Sigma_1(d\lambda)\, h, h)}{\lambda^2},$$

где $B$ — эрмитов оператор.

Теорема. *Оператор-функция $\Sigma_1(\lambda) \in V(H_+)$ является спектральной функцией оператора $A_V$ в том и только в том случае, если:*

1) *Оператор-функция $\Sigma_1(\lambda)$ удовлетворяет условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Sigma_1(d\lambda)\,h,\,h)}{1+\lambda^2} < \infty \quad \forall h \in H_+.$$

2) *Оператор-функция*

$$\Omega(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{i\lambda r}{1+\lambda^2} - e^{-i\lambda r}\right) \frac{d\left(\Sigma_1(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi} I\right)}{\lambda^2}$$

*имеет производную вида*

$$\Omega'(r) = \Omega'(0) + \int_0^r \widetilde{H}(s)\,ds,$$

*где $\widetilde{H}(s)$ — локально суммируемая эрмитова оператор-функция.*

3) *Оператор* (2.15) *допускает факторизацию* (2.17) *в каждом из пространств $L^2(-R, R; H_+)$ $(R < \infty)$.*

Доказательство. Необходимость условий непосредственно следует из вышеприведенных рассмотрений. Достаточность доказывается путем восстановления потенциала $V(r)$ оператора $A_V$ по функции $\Sigma_1(\lambda)$, удовлетворяющей условиям 1)—3), так чтобы $\Sigma_1(\lambda)$ являлась спектральной функцией оператора $A_V$.

Рассмотрим уравнения

$$\widetilde{K}_R(r, t) + \widetilde{H}(r-t) + \int_{-R}^{R} \widetilde{K}_R(r, s)\,\widetilde{H}(s-t)\,ds = 0,$$

$$\widetilde{K}_R(r, t) + \widetilde{H}(r-t) + \int_{-R}^{R} \widetilde{H}(r-s)\,\widetilde{K}_R(s, t)\,ds = 0.$$

Существование и единственность решений этих уравнений, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{-R<t<R} \int_{-R}^{R} \|\widetilde{K}_R(r, t)\|\,dr < \infty; \quad \sup_{-R<r<R} \int_{-R}^{R} \|\widetilde{K}(r, t)\|\,dt < \infty,$$

следует из условия 3) теоремы. Положив $\Gamma_{2R}(r, t) = \widetilde{K}_R(r-R, t-R)$ $(0 \leqslant r,\ t \leqslant 2R)$, приведем эти уравнения к виду

$$\Gamma_{2R}(r, t) + \widetilde{H}(r-t) + \int_0^{2R} \Gamma_{2R}(r, s)\,\widetilde{H}(s-t)\,ds = 0, \tag{2.18}$$

$$\Gamma_{2R}(r,t)+\widetilde{H}(r-t)+\int\limits_0^{2R}\widetilde{H}(r-s)\,\Gamma_{2R}(s,t)\,ds=0.$$

Перейдя в этих уравнениях к сопряженным и положив $F_{2R}(r,t)=$ $=\Gamma_{2R}(2R-t,\ 2R-r)$, получим

$$F_{2R}(r,t)+\widetilde{H}^*(r-t)+\int\limits_0^{2R}F_{2R}(r,s)\,\widetilde{H}^*(s-t)\,ds=0, \qquad (2.18')$$

$$F_{2R}(r,t)+\widetilde{H}^*(r-t)+\int\limits_0^{2R}\widetilde{H}^*(r-s)\,F_{2R}(s,t)\,ds=0.$$

Из однозначной разрешимости (2.18) и (2.18′) следуют формулы дифференцирования $\Gamma_R(r,t)$ и $F_R(r,t)$ по параметру $R$

$$\frac{\partial\Gamma_R(r,t)}{\partial R}=\Gamma_R(r,R)\,\Gamma_R(R,t);\quad \frac{\partial F_R(r,t)}{\partial R}=F_R(r,R)\,F_R(R,t). \qquad (2.19)$$

Введем функции

$$\mathrm{E}_*(r,\lambda)=e^{-i\lambda r}\left(I+\int\limits_0^{2r}F_{2r}(s,0)\,e^{i\lambda s}\,ds\right)=e^{-i\lambda r}I+\int\limits_{-r}^{r}\widetilde{K}_r(r,s)\,e^{-i\lambda s}\,ds$$

$$(r\geqslant 0) \qquad (2.20)$$

$$\mathrm{E}(r,\lambda)=e^{i\lambda r}\left(I+\int\limits_0^{2r}\Gamma_{2r}(0,s)\,e^{-i\lambda s}\,ds\right)=e^{i\lambda r}I+\int\limits_{-r}^{r}\widetilde{K}_r(-r,s)\,e^{-i\lambda s}\,ds.$$

Легко проверить, используя (2.19), что

$$\frac{d\mathrm{E}_*(r,\lambda)}{dr}=-i\lambda\mathrm{E}_*(r,\lambda)+2\Gamma_{2r}(0,2r)\,\mathrm{E}(r,\lambda),$$

$$\frac{d\mathrm{E}(r,\lambda)}{dr}=i\lambda\mathrm{E}(r,\lambda)+2F_{2r}(2r,0)\,\mathrm{E}_*(r,\lambda). \qquad (2.21)$$

Положим

$$\Phi(r,\lambda)=\mathrm{E}_*(r,\lambda)+\mathrm{E}_*(r,\lambda)K^*+K\mathrm{E}(r,\lambda)+K\mathrm{E}(r,\lambda)K^*,$$

где $K$ — изометрический оператор, определяющий ортопроектор $P$ по формуле (1.8). Соотношения (2.20) и (2.21) примут вид

$$\Phi(r,\lambda)=\Phi_0(r,\lambda)+\int\limits_0^{r}K(r,t)\,\Phi_0(t,\lambda)\,dt,$$

$$\frac{d\Phi(r,\lambda)}{dr}\ \lambda\Phi(r,\lambda)+V(r)\,\Phi(r,\lambda),$$

где $V(r)=2\Gamma_{2r}(0,2r)\,K^{*}+2K\Gamma_{2r}(0,2r)$. Теорема доказана.

Замечание: Множество операторов, порожденных дифференциальными выражениями (1.2) с $J$-эрмитовыми и самосопряженными потенциалами и граничными условиями (1.7)—(1.8), разбивается на классы унитарно эквивалентных операторов, которым соответствует одна и та же спектральная функция $\Sigma_1(\lambda)$.

Между этими классами и эрмитовыми оператор-функциями $\widetilde{H}(r)$, удовлетворяющими условию 3) теоремы, существует взаимнооднозначное соответствие. При этом операторы из класса, соответствующего $\widetilde{H}(r)$, унитарно эквивалентны оператору $i\frac{d}{dr}$, действующему в гильбертовом пространстве, получающемся замыканием множества финитных вектор-функций из $L^2(-\infty,\infty;H_+)$ по норме, порожденной скалярным произведением $(\widetilde{f},\widetilde{g})_1=((1+\widetilde{H})\widetilde{f},\widetilde{g})$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 18.VI.1976

Ֆ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ. Հիլբերտյան տարածությունում կանոնիկ դիֆերենցիալ օպերատորների վերաբերյալ *(ամփոփում)*

*Դիտարկվում է* $L^2(0,\infty,H)$ *տարածությունում (1.2) դիֆերենցիալ արտահայտությամբ ծնված օպերատոր։ Ապացուցվում է այդպիսի օպերատորների համար սպեկտրալ օպերատոր-ֆունկցիայի գոյությունը և նշվում է անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի* $\Sigma(\lambda)$ *չնվազող օպերատոր-ֆունկցիան լինի (1.2) արտահայտությամբ ծնված ինքնահամալուծ օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիա։*

F. E. MELIK-ADAMIAN. *On canonical differentional operators in Hilbert space* (summary)

The paper gives the soulution of direct and inverse problems of spectral analyses for canonical differentional operators.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Марченко.* Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, „Наукова Думка", Киев, 1972.
2. *В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук.* О граничных задачах для дифференциального уравнения первого порядка с операторными коэффициентами и разложение по собственным функциям этого уравнения, ДАН СССР, 208, № 6, 1973.
3. *В. М. Адамян.* К теории канонических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 178, № 1, 1968.
4. *Ф. С. Рофе-Бекетов.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, ДАН СССР, 184, № 5, 1969.

5. *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн.* Устойчивость решений дифференциальных операторов в банаховом пространстве, Изд. „Наука", М., 1970.
6. *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц.* Линейные операторы, Изд. „Мир", 1966.
7. *М. Г. Крейн.* Введение в геометрию индефинитных $J$-пространств и теорию операторов в этих пространствах, Вторая летняя математическая школа, „Наукова Думка", 1965.
8. *Ф. С. Рофе-Бекетов.* Труды V Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применениям, Баку, 1961.
9. *H. Langer.* Über die Methode der richtenden Funktionale von M. G. Krein, Acta Mathematica Academica Scientiarum, Hungaricae, XXI, 1970.
10. *М. Г. Крейн.* Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности, ДАН СССР, 105, № 4, 1955.
11. *Ф. Э. Мелик-Адамян.* К теории матричных акселерант и спектральных матриц-функций канонических дифференциальных систем, ДАН Арм.ССР, XLV, № 4, 1967.
12. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве, Изд. „Наука", М., 1967.