ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 1, 1977 Математика

А. А. ВАГАРШАКЯН

ОБОБЩЕНИЕ ФАКТОРИЗАЦИОННОЙ ТЕОРЕМЫ НЕВАНЛИННЫ

Факторизационная теорема Неванлинны (см. [1], стр. 269) заключается в том, что множество мероморфных функций, определенных на единичном круге и имеющих ограниченную характеристику, совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих факторизацию

$$f(z) = z^p \frac{\pi_1(z)}{\pi_2(z)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, d\mu(\varphi) + iC\right\}, \tag{1}$$

где p — целое число, $\pi_1(z)$ и $\pi_2(z)$ — произведения Бляшке, C — действительная постоянная, а μ — функция ограниченной вариации. Это множество обозначается буквой N.

В настоящей статье введено множество мероморфных функций N_0, которое существенно шире N. Доказано, что функции $f \in N_0$ допускают представление, аналогичное факторизации (1). Основываясь на этом представлении, обобщается теорема А. Я. Хинчина, А. Островского (см. [3], стр. 118).

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, определенная на $|z| < 1$ и $0 < r < 1$. Положим

$$m_0(r, f, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\vartheta}) - a|}\, d\vartheta,$$

если a — конечное комплексное число и

$$m_0(r, f, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \ln^+ |f(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta,$$

если $a = \infty$,

Пусть a и b — различные комплексные числа, причем b — конечное число, а a может равняться бесконечности. Мы скажем, что $f \in N_{a,\,b}$, если

$$\sup_{0<r<1} (m_0(r, f, a) + m_0(r, f, b)) < \infty \tag{2}$$

и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < +\infty,$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество b-точек функции $f(z)$. Мы обозначим $N_0 = UN_{a,b}$, где сумма берется по всем допустимым парам a, b.

Заметим, что $N_{a,b} \supset N$. Действительно, пусть $f \in N$. Это означает, что f имеет ограниченную характеристику. Следовательно

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\vartheta})-b|} d\vartheta < \infty \tag{3}$$

и

$$\sum (1 - |z_k|) < \infty, \tag{4}$$

где $\{z_k\}$ — множество b-точек функции $f(z)$. Из первой основной теоремы Неванлинны (см. [1], стр. 23) следует, что

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\vartheta})-a|} d\vartheta \leqslant \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\vartheta})-b|} d\vartheta +$$

$$+ \sum \ln \frac{1}{|z_k|} + M, \tag{5}$$

где $M < \infty$. Теперь легко заметить, что из (3), (4) и (5) вытекает (2). Несколько позже мы покажем, что $N_{a,b} \setminus N \neq \varnothing$.

Теорема 1. *Класс $N_{a,b}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, которые допускают представление*

$$\frac{1}{f(z)-b} = \frac{1}{a-b} + z^{p_1} \frac{\pi_1(z)}{\pi_2(z)} \exp\left\{ z^{p_2} \pi_3(z) \exp\left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} d\mu(\varphi) + iC \right\}\right\}, \tag{6}$$

где p_1, p_2 — целые числа, $\pi_1(z)$, $\pi_2(z)$ и $\pi_3(z)$ — произведения Бляшке, C — действительное число, а μ — функция ограниченной вариации.

Доказательство. Пусть $f(z)$ допускает представление (6). Тогда, используя неравенство (см. [2], стр. 25)

$$\ln^+ \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \ln^+ |x_i| + \ln n,$$

имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\vartheta})-b|} d\vartheta \leqslant \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|b-a|} + \ln^+ 9\,|p_1| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \ln^+ \left| \frac{\pi_1(re^{i\vartheta})}{\pi_2(re^{i\vartheta})} \exp\{g(re^{i\vartheta})\} \right| d\vartheta,$$

где

$$g(z) = z^{p_2} \pi_3(z) \exp\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, d\mu(\varphi) + iC\right\}.$$

Далее

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\vartheta})-b|}\, d\vartheta \leqslant \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|b-a|} + \ln^+ 27\,|p_1| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|\pi_2(re^{i\vartheta})|}\, d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |g(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|\pi_2(re^{i\vartheta})|}\, d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |g(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta +$$

$$+ \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|b-a|} + \ln^+ 27\,|p_1|.$$

Так как функции $\pi_2(z)$ и $g(z)$ принадлежат пространству N, то из полученного неравенства следует, что

$$\sup_{0<r<1} m_0(r, f, b) < \infty.$$

Аналогично доказывается, что

$$\sup_{0<r<1} m_0(r, f, a) < \infty.$$

Следовательно, $f \in N_{a,b}$.

Теперь предположим $f \in N_{a,b}$. Без потери общности можно считать $a=\infty$, $b=0$. Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полюсы, а $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ — нули функции $f(z)$. Введем обозначение

$$\varphi_\rho(z) = z^{p_1} \frac{\prod\limits_{|w_k|<\rho} \dfrac{\rho(w_k - z)}{\rho^2 - \overline{w}_k z} \dfrac{|w_k|}{w_k}}{\prod\limits_{|z_k|<\rho} \dfrac{\rho(z_k - z)}{\rho^2 - \overline{z}_k z} \dfrac{|z_k|}{z_k}}\, f(z),$$

где p_1 — целое число выбрано так, чтобы $\varphi_\rho(0) \neq 0, \infty$. В дальнейшем мы предположим, что $p_1 = 0$, так как в противном случае вместо функции $f(z)$ можно было рассматривать функцию $z^{p_1} f(z)$. Функция $\varphi_\rho(z)$ не имеет нулей и полюсов в круге $|z| < \rho$. Следовательно, $\ln|\ln \varphi_\rho(z)|$ — субгармоническая функция. Это, в частности, означает, что

$$\ln|\ln \varphi_\rho(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\ln \varphi_\rho(\rho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta. \tag{7}$$

Подставляя выражение для функции $\varphi_\rho(z)$ в (7), получим

$$\ln|\ln|f(0)|| + \sum_{|w_k|<\rho} \ln\frac{|w_k|}{\rho} + \sum_{|z_k|<\rho} \ln\frac{\rho}{|z_k|}| \leqslant \ln|\ln|\varphi_\rho(0)|| \leqslant$$

$$\leqslant \ln|\ln\varphi_\rho(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\ln\varphi_\rho(\rho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|\ln|\varphi_\rho(\rho e^{i\vartheta})| + 2\pi|\,d\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|\ln|\varphi_\rho(\rho e^{i\vartheta})||\,d\vartheta + \ln 4\pi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|\ln|f(\rho e^{i\vartheta})||\,d\vartheta + \ln 4\pi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\ln^+|f(\rho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\ln^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\vartheta})|}\,d\vartheta + \ln 8\pi =$$

$$= m_0(\rho, f, \infty) + m_0(\rho, f, 0) + \ln 8\pi.$$

Так как $f \in N_{\infty, 0}$, то по определению $N_{\infty, 0}$ мы имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |w_k|) < \infty$$

или, что то же самое

$$\prod_{k=1}^{\infty} |w_k| > 0.$$

Следовательно

$$\ln|\ln|f(0)|| + \sum_{k=1}^{\infty} \ln|w_k| + \sum_{|z_k|<\rho} \ln\frac{\rho}{|z_k|}| \leqslant m_0(\rho, f, \infty) +$$

$$+ m_0(\rho, f, 0) + \ln 8\pi,$$

откуда имеем

$$\sup_{0<\rho<1}\left(\sum_{|z_k|<\rho} \ln\frac{\rho}{|z_k|}\right) < \infty,$$

и потому (см. [1], стр. 260) $\sum(1 - |z_k|) < \infty$.

Теперь рассмотрим функцию

$$g(z) = f(z)\frac{\pi_1(z)}{\pi_2(z)},$$

где $\pi_1(z)$ и $\pi_2(z)$ — произведения Бляшке с нулями $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно. Функция $g(z)$ не имеет нулей и полюсов, следовательно $\ln g(z)$ — аналитическая на $|z|<1$. Докажем, что $\ln g(z) \in N$. Мы имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |\ln g(\rho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |\ln|\, g(\rho e^{i\vartheta})||\, d\vartheta + \ln 4\pi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |\ln| f(\rho e^{i\vartheta})||\, d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \ln \frac{1}{|\pi_2(\rho e^{i\vartheta})|}\, d\vartheta + \ln 8\pi \leqslant$$

$$\leqslant m_0(\rho, f, \infty) + m_0(\rho, f, 0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|\pi_2(\rho e^{i\vartheta})|}\, d\vartheta + \ln 16\pi. \tag{8}$$

Так как $\pi_2(z) \in N$, то из полученного неравенства следует, что $\ln g(z) \in N$. Теперь, используя факторизационную теорему Неванлинны, нетрудно получить требуемое представление для функции $f(z)$.

Замечание 1. Из оценки (8) следует, что если $\dfrac{1}{f(z)}$ — аналитическая функция, принадлежащая $N_{\infty, 0}$, то полная вариация функции μ, фигурирующая в представлении (6), допускает оценку

$$|\mu| \leqslant \sup_{0<r<1} (m_0(r, f, \infty) + m_0(r, f, 0)) + \ln 16\pi.$$

Следствие 1. Из представления функции $f \in N_{a, b}$ следует, что она почти всюду на единичной окружности имеет некасательные граничные значения.

Следствие 2. Так как $\dfrac{i}{1+z} \in N$, то из теоремы 1 следует, что $\exp\left\{\dfrac{i}{1+z}\right\} \in N_{\infty, 0}$. Однако $\exp\left\{\dfrac{i}{1+z}\right\} \overline{\in} N$, потому что множество $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\exp\left\{\dfrac{i}{1+z_k}\right\} = 1$, не удовлетворяет условию Бляшке, т. е. $\sum (1-|z_k|) = \infty$.

Теорема 2. *Пусть дана последовательность $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ функций, аналитических в круге $|z| < 1$, удовлетворяющих условиям*

1) *Существует такое $C > 0$, что*

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \ln^+ |f_n(\rho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqslant C \tag{9}$$

и

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|f_n(\rho e^{i\vartheta}) - b|}\, d\vartheta \leqslant C, \tag{10}$$

где b — фиксированное комплексное число.

2) *На множестве $E \subset \{z / |z| = 1\}$ положительной меры последовательность $\{f_n(e^{i\vartheta})\}_{n=1}^{\infty}$ угловых граничных значений функций $f_n(z)$ сходится по мере.*

Тогда последовательность $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится внутри круга $|z| < 1$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z),$$

причем на множестве E последовательность $\{f_n(e^{i\vartheta})\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере $kf(e^{i\vartheta})$ — угловым граничным значениям предельной функции $f(z)$.

Вышеприведенная теорема совпадает с теоремой А. Я. Хинчина — А. Островского, если в условии 1) вместо двойного логарифма под интегралом написать только один логарифм. При этом оказывается, что из условия (9), написанного с одним логарифмом, следует (10).

Доказательство. Так как $f_n(z)$ — аналитическая функция, то из (9) и (10) следует, что $\dfrac{1}{f_n(z)} \in N_{1/b,\,0}$. Из замечания 1 вытекает, что множество $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ компактно. Существование угловых граничных значений почти всюду на единичной окружности для функции $f_n(z)$ вытекает из следствия 1. В остальном доказательство совпадает с доказательством, проведенным в книге [3] теоремы А. Я. Хинчина — А. Островского, только во всех формулах вместо $\ln^+$ нужно писать $\ln^+ \ln^+$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 24.XI.1975

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Նեվանլիննայի ֆակտորիզացիոն թեորեմի ընդհանրացումը (*ամփոփում*)

Հոդվածում մտցվում է մերոմորֆ ֆունկցիաների N_0 դասը, որը չափես լայն է N դասից։ Ապացուցվում է, որ N_0-ին պատկանող ֆունկցիան թույլ է տալիս ներկայացում, որը հանդիսանում է ֆակտորիզացիայի անալոգը։ Հիմնվելով այդ ներկայացման վրա ընդհանրացվում է Ա. Խինչինի և Ա. Օստրովսկու թեորեմը։

A. A. VAGARSHAKIAN. *A generalization of Nevanlinna's factorization theorem* (summary)

In this paper the new class N_0 of meromorphic functions essentialy richer than N is introduced. It is proved, that any $f \in N_0$ permits representation analogous to the factorization. Using this representation the theorem of *A.* Hinchin and *A.* Ostrovski is generalizated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *У. Хейман.* Мероморфные функции, Изд. „Мир", М., 1966.
2. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, Изд. „Наука", М., 1970.
3. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М. — Л., ГИТТЛ, 1950.