ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 6, 1976 Математика

Ф. А. ТАЛАЛЯН

О СУММИРОВАНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Введение

Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $T=(T_{m,n})$ — матрица, состоящая из произвольных отображений E в себя. Тогда преобразование

$$y_m = \sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n} x_n$$

определяет метод суммирования последовательностей в E. Если предел $\lim\limits_{m\to\infty} y_m$ существует, то он называется T-пределом последовательности $\{x_n\}$ и обозначается через $T-\lim x_n$.

А. Робинсон ([1], см. также [2]) доказал, что в том случае, когда пространство E банахово и $T_{m,n}$ — непрерывные линейные отображения E в себя, для регулярности матрицы (или метода суммирования) T необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

1) $\lim\limits_{m\to\infty} T_{m,n} x = 0$ для любого $x \in E$ и $n = 1, 2, \cdots;$

2) Для любого $x \in E$ существует

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n} x \text{ и } \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}\, x = x,$$

т. е. операторы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_{m,n}$ сильно сходятся к тождественному оператору;

3) $$\sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} T_{m,i} x_i \right\| : n = 1, 2, \cdots;\ \|x_i\| \leqslant 1,\ i = 1, 2, \cdots, n \right\} < C,$$

где C не зависит от m.

В дальнейшем условия 1), 2) и 3) мы называем условиями регулярности, соответственно первым, вторым и третьим.

В настоящей работе рассматриваются следующие задачи.

Каково множество предельных точек последовательности $\{x_n\}$, если некоторая матрица T суммирует

a) все перестановки последовательности $\{x_n\}$,

b) все подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$.

Для числовых последовательностей и матриц задача b) рассмотрена в работах [3] и [4].

Начнем с одного примера. Пусть E — бесконечномерное гильбертово пространство, $\{e_n: n=1, 2, \cdots\}$ — ортонормальная система в E и T есть матрица Чезаро

$$T = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\|.$$

Пусть $\{n_k\}$ — произвольная (не обязательно возрастающая) последовательность натуральных чисел. В силу ортонормальности системы $\{e_n\}$ имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} T_{m,k}\, e_{n_k} \right\| = \left\| \frac{1}{m}(e_{n_1} + \cdots + e_{n_m}) \right\| \leqslant \frac{\sqrt{m}}{m} \to 0.$$

Следовательно матрица T суммирует все перестановки и все подпоследовательности расходящейся последовательности $\{e_n\}$.

Таким образом, в общем случае условия a) или b) не гарантируют сходимость последовательности $\{x_n\}$ и вопрос заключается в выяснении структуры множества предельных точек.

§ 1. Перестановки

Теорема 1.1. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $T_{m,n}$ — произвольные отображения E в себя такие, что матрица $T = (T_{m,n})$ удовлетворяет первому условию регулярности. Тогда, если множество T-пределов всех перестановок последовательности $\{x_n\}$ состоит из более чем одной точки, то существует перестановка, которая не суммируется матрицей T.*

Сначала докажем одну лемму.

Лемма 1.1. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $\{T_n\}$ — последовательность произвольных отображений E в себя. Положим*

$$S_m = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} T_k\, x_{n_k} \right\| \right\},$$

где sup *берется по всем перестановкам последовательности* $\{x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots\}$. *Тогда, если для любой перестановки* $\{x_{n_k}\}$ *последовательности* $\{x_n\}$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} T_k x_{n_k}$ *сходится, то*

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 0. \tag{1.1}$$

Доказательство. Сначала введем некоторые обозначения. Положим $X=\{x_n\}$, т. е. X есть фиксированная последовательность, фигурирующая в формулировке леммы. Если x есть элемент (новое обозначение для элемента) последовательности X, то через $N(x)$ обозначим номер этого элемента в X. Два элемента x' и x'' последовательности X совпадают или нет в зависимости от того справедливо или нет равенство $N(x')=N(x'')$.

Далее, если через V обозначена последовательность $\{v_1, v_2, \cdots\}$, то через V_k мы обозначим конечную последовательность $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$.

Наконец, введем одну операцию над конечными последовательностями. Если A и B — конечные последовательности, каждая из которых составлена из различных элементов X, то через AB обозначим конечную последовательность, построенную следующим образом: зачеркиваем из B все те элементы, которые встречаются в A, сохраняем порядок между оставшимися элементами и полученную последовательность приписываем справа к A. Условимся также вместо $(AB)\,C$ писать ABC.

Теперь перейдем к доказательству леммы. Допустим обратное. Пусть $m(1)<m(2)<\cdots$ — такая последовательность, что

$$S_{m(k)}>a>0,\ k=1, 2, \cdots. \tag{1.2}$$

Индукцией по i построим последовательности $\{k_i\}$, $\{X^{(i)}\}$ и $\{M_i\}$ где $\{k_i\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, каждое $X^{(i)}$ есть перестановка последовательности

$$\{x_{m(k_i)+1},\ x_{m(k_i)+2}, \cdots\}$$

и M_i — натуральные числа.

Положим $k_1=1$. Согласно (1.2) $S_{m(k_1)}>a$. Поэтому найдется перестановка $X^{(1)}=\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots\}$ последовательности $\{x_{m(k_1)+1}, x_{m(k_1)+2}, \cdots\}$ такая, что

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} T_{m(k_1)+n}\, x_n^{(1)}\right\|>a.$$

Возьмем M_1 настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|\sum_{n=1}^{M_1} T_{m(k_1)+n}\, x_n^{(1)}\right\|>a.$$

Пусть построены k_{l-1}, $X^{(l-1)}=\{x_1^{(l-1)}, x_2^{(l-1)},\cdots\}$ и M_{l-1}. Возьмем $k_l>k_{l-1}$ настолько большим, чтобы для любого $n=1, 2,\cdots, M_{l-1}$ выполнялось неравенство $N(x_n^{(l-1)})\leqslant m(k_l)$. Согласно (1.2) имеем $S_{m(k_l)}>a$. Поэтому найдется перестановка $X^{(l)}=\{x_1^{(l)}, x_2^{(l)},\cdots\}$ последовательности $\{x_{m(k_l)+1}, x_{m(k_l)+2},\cdots\}$ такая, что

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} T_{m(k_l)+n}\, x_n^{(l)}\right\|>a.$$

Возьмем M_l настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|\sum_{n=1}^{M_l} T_{m(k_l)+n}\, x_n^{(l)}\right\|>a. \tag{1.3}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим последовательности $\{k_l\}$, $\{X^{(l)}\}$ и $\{M_l\}$, для которых при любом l выполняется неравенство (1.3).

Теперь, используя введенные обозначения, построим следующую бесконечную последовательность

$$X_{m(k_1)}\, X_{M_1}^{(1)}\, X_{m(k_2)}\,,\ X_{M_2}^{(2)}\, X_{m(k_3)},\cdots. \tag{1.4}$$

Согласно нашему построению последовательность (1.4) представляет собой перестановку последовательности X.

Представим последовательность (1.4) в виде $\{y_1, y_2,\cdots\}$. Тогда, в силу (1.3), будем иметь

$$\left\|\sum_{n=m(k_l)+1}^{m(k_l)+M_l} T_n\, y_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{M_l} T_{m(k_l)+n}\, x_n^{(l)}\right\|>a$$

для любого $l=1, 2,\cdots$. Это значит, что ряд $\sum T_n y_n$ расходится, чего не может быть. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Предположим обратное. Пусть $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ — такие перестановки последовательности $\{x_n\}$, что

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}\, y_n=y_0,\ \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}\, z_n=z_0 \tag{1.5}$$

и $y_0\neq z_0$. Мы покажем, что тогда можно построить новую перестановку, которая не суммируется матрицей T.

Обозначим через $p(k)$ наименьшее натуральное число n, обладающее тем свойством, что для любого $i\leqslant k$ существует $j\leqslant n$ такое, что y_i и z_j представляют собой один и тот же элемент последовательности $\{x_n\}$. Меняя ролями $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$, аналогичным образом определяем величину $q(k)$.

Далее положим

$$s(m, Y, N)=\sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{N} T_{m,k}\, y_{n_k}\right\|\right\},$$

где sup берется по всем перестановкам $\{y_{n_1}, \cdots, y_{n_N}\}$ элементов $y_1, \cdots, y_N$. Аналогично определяется выражение $s(m, Z, N)$. Очевидно, при любом N имеет место

$$\lim_{m\to\infty} s(m, Y, N) = \lim_{m\to\infty} s(m, Z, N) = 0. \tag{1.6}$$

Наконец, положим

$$S(m, Y, N) = \sup\left\{\left\|\sum_{k=N+1}^{\infty} T_{m,k}\, y_{n_k}\right\|\right\},$$

где sup берется по всем перестановкам $\{y_{n_1}, y_{n_2}, \cdots\}$ последовательности $\{y_{N+1}, y_{N+2}, \cdots\}$. Аналогично определяется $S(m, Z, N)$. Применяя лемму к последовательностям $\{T_{m,n}: n = 1, 2, \cdots\}$ и $\{y_n: n = 1, 2, \cdots\}$ или к $\{T_{m,n}: n = 1, 2, \cdots\}$ и $\{z_n: n = 1, 2, \cdots\}$, получим, что при любом m имеет место

$$\lim_{N\to\infty} S(m, Y, N) = \lim_{N\to\infty} S(m, Z, N) = 0. \tag{1.7}$$

Теперь индукцией построим последовательность $n_0, m_1, n_1, m_2, n_2, \cdots$. Пусть n_0 — произвольное натуральное число, и $\{\delta_n\}$ — стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Возьмем m_1 настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$s(m_1, Z, p(n_0)) < \delta_1$$

и

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} T_{m_1,n}\, z_n - z_0\right\| < \delta_1.$$

Выбор такого числа возможен, в силу (1.5) и (1.6).

Теперь возьмем число $n_1 > p(n_0)$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$S(m_1, Z, n_1) < \delta_1.$$

Выбор такого n_1 возможен, в силу (1.7).

Далее выбираем число $m_2 > m_1$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$s(m_2, Y, q(n_1)) < \delta_2$$

и

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} T_{m_2,n}\, y_n - y_0\right\| < \delta_2,$$

после чего выбираем $n_2 > q(n_1)$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$S(m_2, Y, n_2) < \delta_2.$$

Допустим построены числа m_l и n_l. Если l — нечетное число, то выбираем $m_{l+1} > m_l$ настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$s\,(m_{l+1},\ Y,\ q\,(n_l)) < \delta_{l+1} \tag{1.8}$$

и

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} T_{m_{l+1},\,n}\, y_n - y_0\right| < \delta_{l+1}, \tag{1.9}$$

после чего выбираем $n_{l+1} > q(n_l)$ так, чтобы выполнялось

$$S\,(m_{l+1},\ Y,\ n_{l+1}) < \delta_{l+1}. \tag{1.10}$$

Если же l — четное число, то, используя (1.5), (1.6) и (1.7), мы найдем числа $m_{l+1} > m_l$ и $n_{l+1} > p\,(n_l)$ такие, что выполняются неравенства

$$s\,(m_{l+1},\ Z,\ p\,(n_l)) < \delta_{l+1}, \tag{1.11}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} T_{m_{l+1},\,n}\, z_n - z_0\right| < \delta_{l+1} \tag{1.12}$$

и

$$S\,(m_{l+1},\ Z,\ n_{l+1}) < \delta_{l+1}. \tag{1.13}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим $n_0,\ m_1,\ n_1,\ m_2,\ n_2, \cdots$. Отметим, что последовательности $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ являются строго возрастающими.

Теперь положим $Y_n = \{y_1, \cdots, y_n\}$, $Z_n = \{z_1, \cdots, z_n\}$, и используя операцию над конечными последовательностями, введенную при доказательстве леммы, построим бесконечную последовательность

$$Y_{n_0}\ Z_{n_1}\ Y_{n_2}\ Z_{n_3} \cdots. \tag{1.14}$$

Очевидно (1.14) является перестановкой последовательности $\{x_n\}$. Представим (1.14) в виде

$$\{v_1,\ v_2, \cdots\}. \tag{1.15}$$

Тогда из наших построений видно, что при любом $k = 1, 2, \cdots$ последовательность (1.15) удовлетворяет следующим условиям:

$$\{v_1, \cdots, v_{q\,(n_{2k-1})}\} \text{ является перестановкой } \{y_1, \cdots, y_{q\,(n_{2k-1})}\}, \tag{1.16}$$

$$\{v_1, \cdots, v_{p\,(n_{2k})}\} \text{ является перестановкой } \{z_1, \cdots, z_{p\,(n_{2k})}\}, \tag{1.17}$$

$$v_n = y_n \text{ при } q\,(n_{2k-1}) + 1 \leqslant n \leqslant n_{2k}, \tag{1.18}$$

$$v_n = z_n \text{ при } p\,(n_{2k}) + 1 \leqslant n \leqslant n_{2k+1}, \tag{1.19}$$

$$\{v_n\colon n \geqslant n_{2k} + 1\} \text{ является перестановкой } \{y_n\colon n > n_{2k} + 1\}, \tag{1.20}$$

$$\{v_n\colon n \geqslant n_{2k-1} + 1\} \text{ является перестановкой } \{z_n\colon n \geqslant n_{2k-1} + 1\}. \tag{1.21}$$

Теперь докажем, что последовательность (1.15) не суммируется матрицей T. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{m_{2k},\,n}\, v_n = \sum_{n=1}^{q\,(n_{2k-1})} T_{m_{2k},\,n}\, v_n + \sum_{n=q\,(n_{2k-1})+1}^{n_{2k}} T_{m_{2k},\,n}\, v_n +$$

$$+\sum_{n=n_{2k}+1}^{\infty} T_{m_{2k},n} v_n. \tag{1.22}$$

В силу (1.16), (1.8), (1.20) и (1.10) имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{q(n_{2k-1})} T_{m_{2k},n} v_n \right\| \leqslant s(m_{2k}, Y, q(n_{2k-1})) < \delta_{2k}, \tag{1.23}$$

$$\left\| \sum_{n=n_{2k}+1}^{\infty} T_{m_{2k},n} v_n \right\| \leqslant S(m_{2k}, Y, n_{2k}) < \delta_{2k}. \tag{1.24}$$

Далее из (1.18) получим

$$\sum_{n=q(n_{2k-1})+1}^{n_{2k}} T_{m_{2k},n} v_n = \sum_{n=q(n_{2k-1})+1}^{n_{2k}} T_{m_{2k},n} y_n,$$

откуда, в силу (1.8), (1.9) и (1.10), имеем

$$\left\| \sum_{n=q(n_{2k-1})+1}^{n_{2k}} T_{m_{2k},n} v_n - y_0 \right\| < 3\delta_{2k}. \tag{1.25}$$

Наконец, из (1.22), (1.23), (1.24) и (1.25) следует

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_{2k},n} v_n - y_0 \right\| < 5\delta_{2k}. \tag{1.26}$$

Точно так же, используя условия (1.11), (1.12), (1.13), (1.17), (1.19) и (1.21), получим

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_{2k+1},n} v_n - z_0 \right\| < 5\delta_{2k+1}. \tag{1.27}$$

Так как $y_0 \neq z_0$, то из (1.26) и (1.27) следует, что последовательность $\{v_1, v_2, \cdots\}$ не суммируется матрицей T, что и требовалось.

Теорема 1.2. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $T = (T_{m,n})$ — матрица, состоящая из непрерывных линейных отображений E в себя, удовлетворящая первым двум условиям регулярности. Если все перестановки последовательности $\{x_n\}$ T-суммируемы, то*

1) *T-пределы всех перестановок равны $T - \lim x_n$,*

2) *последовательность $\{x_n\}$ либо не имеет предельных точек, либо имеет единственную предельную точку $T - \lim x_n$.*

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 1.2. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{T_n\}$ — последовательность непрерывных линейных операторов, отображающих E в себя такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = 0 \quad \textit{для любого} \; x \in E \tag{1.28}$$

и $\{x_n\}$—последовательность точек E, имеющая предельную точку $x_0 \in E$. Положим

$$S_N = \sup\left\{\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{N+n} x_n' \right\| : \{x_n'\} \in \sigma_N \right\},$$

где σ_N — множество всех последовательностей, получающихся из $\{x_n\}$ удалением каких-либо N элементов и перестановкой оставшихся элементов. Тогда, если для любой перестановки $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n y_n$ сходится, то

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 0.$$

Доказательство. Предположим обратное. Тогда существует число $a > 0$ такое, что

$$S_N > a \text{ при бесконечно многих значениях } N. \tag{1.29}$$

Исходя из (1.29) мы построим такую перестановку $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n y_n$ расходится.

Возьмем число N_1 таким, чтобы имело место $S_{N_1} > a$. Тогда найдется последовательность $\{x_n^{(1)}\} \in \sigma_{N_1}$ и натуральное число n_1 такие, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_1} T_{N_1+n} x_n^{(1)} \right\| > a.$$

Положим $y_{N_1+n} = x_n^{(1)}$, $n = 1, 2, \cdots, n_1$, и пусть $y_{N_1+n_1+1}$ есть первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех y_n, $N_1+1 < n \leqslant N_1+n_1$. Таким образом, имеем

$$\left\| \sum_{n=N_1+1}^{N_1+n_1} T_n y_n \right\| > a. \tag{1.30}$$

Далее, в силу условия (1.28) и предположения (1.29), существует такое $N_2 > N_1 + n_1$, что выполняются следующие условия:

$$S_{N_2} > a, \tag{1.31}$$

$$\|T_m y_n\| < \frac{a}{4(n_1+1)}, \quad m > N_2, \quad N_1 + 1 \leqslant n < N_1 + n_1 + 1, \tag{1.32}$$

$$\| T_m x_0\| < \frac{a}{8(n_1+1)}, \quad m > N_2. \tag{1.33}$$

В силу (1.31) найдется последовательность $\{x_n^{(2)}\} \in \sigma_{N_2}$ и натуральное число n_2 такие, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_2} T_{N_2+n} x_n^{(2)} \right\| > a. \tag{1.34}$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Никакой элемент y_n, $N_1 + 1 \leqslant n \leqslant N_1 + n_1 + 1$ не встречается среди элементов $x_n^{(2)}$, $n = 1, 2, \cdots, n_2$. Тогда полагаем $y_{N_2+n} = x_n^{(2)}$, $n = 1, 2, \cdots, n_2$ и в качестве $y_{N_2+n_2+1}$ берем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех

$$y_n,\ N_1 + 1 \leqslant n \leqslant N_1 + n_1 + 1,\ N_2 + 1 \leqslant n \leqslant N_2 + n_2.$$

2) Пусть

$$y_{m(2,1,p)} = x_{k(2,1,p)}^{(2)},\ p = 1, 2, \cdots, l(2, 1),\ l(2, 1) \leqslant n_1 + 1, \tag{1.35}$$

где $m(2, 1, p)$ — попарно различные числа, удовлетворяющие неравенству $N_1 + 1 \leqslant m(2, 1, p) \leqslant N_1 + n_1 + 1$, а $k(2, 1, p)$ — попарно различные числа, удовлетворяющие неравенству $1 \leqslant k(2, 1, p) \leqslant n_2$. Возьмем попарно различные элементы $x_{l(2,1,p)}$, $p = 1, 2, \cdots, l(2, 1)$ последовательности $\{x_n\}$ так, чтобы каждое $x_{l(2,1,p)}$ было отлично от всех y_n, $N_1 + 1 \leqslant n \leqslant N_1 + n_1 + 1$, $x_n^{(2)}$, $n = 1, 2, \cdots, n_2$ и чтобы выполнялись неравенства

$$\| T_m (x_{l(2,1,p)} - x_0) \| < \frac{a}{8(n_1 + 1)}, \tag{1.36}$$

$$m = N_2 + k(2, 1, p),\ p = 1, 2, \cdots, l(2, 1).$$

Теперь заменим в последовательности $\{x_1^{(2)}, \cdots, x_{n_2}^{(2)}\}$ все $x_{k(2,1,p)}^{(2)}$ на соответствующие $x_{l(2,1,p)}$, $p = 1, 2, \cdots, l(2, 1)$ и элементы полученной указанным способом последовательности обозначим через $y_{N_2+1}, \cdots, y_{N_2+n_2}$. Наконец, в качестве $y_{N_2+n_2+1}$ возьмем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех y_n, $N_1 + 1 \leqslant n \leqslant N_1 + n_1 + 1$, $N_2 + 1 \leqslant n \leqslant N_2 + n_2$.

Тогда в любом случае мы будем иметь

$$\left\| \sum_{n=N_2+1}^{N_2+n_2} T_n y_n \right\| > \frac{a}{2}. \tag{1.37}$$

Действительно, в случае 1) неравенство (1.37) совпадает с неравенством (1.34). Пусть имеет место случай 2). Разобьем суммы, фигурирующие в неравенствах (1.34) и (1.37), на две части

$$\sum_{n=1}^{n_2} T_{N_2+n} x_n^{(2)} = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant n_2 \\ n \neq k(2,1,p)}} T_{N_2+n} x_n^{(2)} + \sum_{p=1}^{l(2,1)} T_{N_2+k(2,1,p)} x_{k(2,1,p)}^{(2)}, \tag{1.38}$$

$$\sum_{n=N_2+1}^{N_2+n_2} T_n y_n = \sum_{\substack{1 \leq n \leq n_2 \\ n \neq k(2,1,p)}} T_{N_2+n} x_n^{(2)} + \sum_{p=1}^{l(2,1)} T_{N_2+k(2,1,p)} x_{l(2,1,p)}. \tag{1.39}$$

Из (1.32) и (1.35) имеем

$$\left\| \sum_{p=1}^{l(2,1)} T_{N_2+k(2,1,p)} x^{(2)}_{k(2,1,p)} \right\| < \frac{a}{4}. \tag{1.40}$$

Из (1.33) и (1.36) выводим

$$\left\| \sum_{p=1}^{l(2,1)} T_{N_2+k(2,1,p)} \, x_{l(2,1,p)} \right\| < \frac{a}{4}. \tag{1.41}$$

Из (1.38), (1.39), (1.40) и (1.41) имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_2} T_{N_2+n} \, x_n^{(2)} - \sum_{n=N_2+1}^{N_2+n_2} T_n y_n \right\| < \frac{a}{2}. \tag{1.42}$$

Наконец, из (1.34) и (1.42) получим (1.37).

Пусть выбраны числа $N_1, n_1, N_2, n_2, \cdots, N_{i-1}, n_{i-1}$ и элементы

$$y_n, \; N_j+1 \leqslant n \leqslant N_j+n_j+1, \; j=1, 2, \cdots, i-1.$$

Возьмем число $N_i > N_{i-1} + n_{i-1}$ настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$S_{N_i} > a, \tag{1.43}$$

$$\|T_m y_n\| < \frac{a}{4(n_1 + \cdots + n_{i-1} + i - 1)}, \tag{1.44}$$

$$m > N_i, \; N_j + 1 \leqslant n \leqslant N_j + n_j + 1, \; j = 1, 2, \cdots, i-1,$$

$$\|T_m x_0\| < \frac{a}{8(n_1 + \cdots + n_{i-1} + i - 1)}, \; m > N_i. \tag{1.45}$$

В силу (1.43) найдется последовательность $\{x_n^{(i)}\} \in \sigma_{N_i}$ и натуральное число n_i такие, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_i} T_{N_i+n} \, x_n^{(i)} \right\| > a. \tag{1.46}$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Никакой элемент y_n, $N_j+1 \leqslant n \leqslant N_j + n_j + 1$, $j=1, 2, \cdots, i-1$ не встречается среди элементов $x_n^{(i)}$, $n=1, 2, \cdots, n_i$. Тогда полагаем $y_{N_i+n} = x_n^{(i)}$, $n = 1, 2, \cdots, n_i$ и в качестве $y_{N_i+n_i+1}$ берем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех

$$y_n, \; N_j+1 \leqslant n \leqslant N_j + n_j + 1, \; j = 1, 2, \cdots, i-1, \; N_i + 1 \leqslant n \leqslant N_i + n_i.$$

2) Пусть

$$y_{m(i,j(q),p)} = x^{(i)}_{n(i,j(q),p)}, \tag{1.47}$$

$$q=1,\,2,\cdots,\; r\,(i);\; r\,(i)\leqslant i-1;\; p=1,\,2,\cdots,\; l\,(i,\,j\,(q));$$
$$l\,(i,j\,(q))<n_{j\,(q)}+1,$$

где $j\,(q)$ — попарно различные числа, удовлетворяющие наравенству $1\leqslant j\,(q)\leqslant i-1$, $m\,(i,\,j\,(q),\,p)$ — попарно различные числа, удовлетворяющие соответствующим неравенствам $N_{j\,(q)}+1\leqslant m\,(i,\,j\,(q),\,p)\leqslant$ $< N_{j\,(q)}+n_{j\,(q)}+1$, $p=1,\,2,\cdots,\, l\,(i,\,j\,(q))$, и наконец $k\,(i,\,j\,(q),\,p)$ — попарно различные числа, удовлетворяющие неравенству

$$1\leqslant k\,(i,\,j\,(q),\,p)\leqslant n_i,\; q=1,\,2,\cdots,\, r\,(i),\; p=1,\,2,\cdots,\, l\,(i,\,j\,(q)).$$

Возьмем попарно различные элементы $x_{i\,(i,\,j\,(q),\,p)}$, $q=1,\,2,\cdots$ $\cdots,\, r\,(i)$, $p=1,\,2,\cdots,\; l\,(i,\,j\,(q))$ последовательности $\{x_n\}$ так, чтобы каждое $x_{i\,(i,\,j\,(q),\,p)}$ было отлично от всех y_n, $N_j+1\leqslant n<N_j+n_j+1$, $j=1,\,2,\cdots,\; i-1$; $x_n^{(i)}$, $n=1,\,2,\cdots,\; n_i$ и чтобы выполнялись неравенства

$$\|T_m\,(x_{i\,(i,\,j\,(q),\,p)}-x_0)\|<\frac{a}{8\,(n_1+\cdots+n_{i-1}+i-1)},\tag{1.48}$$
$$m=N_i+k\,(i,\,j\,(q),\,p),\; q=1,2,\cdots,\; r\,(i),\;\; p=1,\,2,\cdots,\; l\,(i,\,j\,(q)).$$

Теперь заменим в последовательности $x_1^{(i)},\,\cdots,\; x_{n_i}^{(i)}$ каждое $x_{k\,(i,\,j\,(q),\,p)}^{(i)}$ соответствующим $x_{i\,(i,\,j\,(q),\,p)}$, и элементы последовательности, полученной после такой замены, обозначим через $y_{N_i+1},\cdots,\, y_{N_i+n_i}$.

Наконец, в качестве $y_{N_i+n_i+1}$ возьмем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех элементов

y_n, $N_j+1\leqslant n\leqslant N_j+n_j+1$, $j=1,\,2,\;\cdots,\; i-1$, $N_i+1\leqslant n\leqslant N_i+n_i$.

Тогда в любом случае будем иметь

$$\left\|\sum_{n=N_i+1}^{N_i+n_i} T_n\,y_n\right\|>\frac{a}{2}\cdot\tag{1.49}$$

Действительно, в случае 1) неравенство (1.49) совпадает с неравенством (1.46). Пусть имеет место случай 2). Перепишем суммы, фигурирующие в неравенствах (1.46) и (1.49), в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{n_i} T_{N_i+n}x_n^{(i)}=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant n_i\\ n\neq k\,(i,\,j\,(q),\,p)}} T_{N_i+n}\;x_n^{(i)}+\sum_{q=1}^{r\,(i)}\;\sum_{p=1}^{l\,(i,\,j\,(q))}\; T_{N_i+k\,(i,\,j\,(q),\,p)}\;x_{k\,(i,\,j\,(q),\,p)}^{(i)},\tag{1.50}$$

$$\sum_{n=N_i+1}^{N_i+n_i} T_n\,y_n=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant n_i\\ n\neq k\,(i,\,j\,(q),\,p)}} T_{N_i+n}\;x_n^{(i)}+\sum_{q=1}^{r\,(i)}\;\sum_{p=1}^{l\,(i,\,j\,(q))}\; T_{N_i+k\,(i,\,j\,(q),\,p)}\;x_{i\,(i,\,j\,(q),\,p)}.\tag{1.51}$$

Из (1.44) и (1.47) имеем

$$\left\| \sum_{q=1}^{r(l)} \sum_{p=1}^{l(l,j(q))} T_{N_l+k(l,j(q),p)} x^{(l)}_{k(l,j(q),p)} \right\| < \frac{a}{4}. \tag{1.52}$$

Из (1.45) и (1.48) получим

$$\left\| \sum_{q=1}^{r(l)} \sum_{p=1}^{l(l,j(q))} T_{N_l+k(l,j(q),p)} x_{l(l,j(q),p)} \right\| < \frac{a}{4}. \tag{1.53}$$

Из (1.50), (1.51), (1.52) и (1.53) имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_l} T_{N_l+n} x_n^{(l)} - \sum_{n=N_l+1}^{N_l+n_l} T_n y_n \right\| < \frac{a}{2}. \tag{1.54}$$

Наконец, из (1.46) и (1.54) получим (1.49).

Продолжив указанный процесс неограниченно, мы построим последовательность отрезков $[N_l+1, N_l+n_l]$ натурального ряда, причем каждому $n \in U[N_l+1, N_l+n_l]$ сопоставлен некоторый элемент y_n последовательности $\{x_n\}$. Из построения видно, что различным числам соответствуют различные элементы. Далее, из неравенств $N_i > N_{i-1} + n_{i-1}$, $i=1, 2, \cdots$ видно, что бесконечно много натуральных чисел не входят в множество $U[N_i+1, N_i+n_i]$ и, что множество элементов, не соответствующих никаким $n \in U[N_i+1, N_i+n_i]$, бесконечно (оно содержит все $y_{N_i+n_i+1}$, $i=1, 2, \cdots$). Заполним всеми этими элементами все свободные места в натуральном ряде. В результате мы получим перестановку $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$, для которой при любом i выполняется (1.49), чего не может быть. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Утверждение 1) содержится в теореме 1.1. Докажем утверждение 2). Пусть x_0 является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$. В силу 1) достаточно доказать, что T-предел некоторой перестановки последовательности $\{x_n\}$ равен x_0.

Обозначим

$$S(m, N) = \sup \left\{ \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} T_{m,n} x'_n \right\| : \{x'_n\} \in \sigma_N \right\}.$$

Из второго условия регулярности следует, что при любом m последовательность операторов $\{T_{m,n};\ n=1, 2, \cdots\}$ удовлетворяет условию (1.28). Поэтому, в силу леммы имеем

$$\lim_{N\to\infty} S(m, N) = 0, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{1.55}$$

Опишем процесс построения требуемой перестановки. Пусть $\delta_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$. В силу второго условия регулярности существует натуральное число m_1 такое, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_1,n} x_0 - x_0 \right\| < \delta_1.$$

Возьмем N_1 настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_1-1} T_{m_1, n} x_0 - x_0 \right\| < \delta_1 \tag{1.56}$$

и

$$S(m_1, N_1 - 1) < \delta_1. \tag{1.57}$$

Теперь возьмем попарно различные элементы $y_1, \cdots, y_{N_1-1}$ последовательности $\{x_n\}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\| T_{m_1, n} (y_n - x_0) \| < \frac{\delta_1}{N_1 - 1}, \quad n = 1, 2, \cdots, N_1 - 1. \tag{1.58}$$

Наконец, в качестве y_{N_1} возьмем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех y_n, $n = 1, 2, \cdots, N_1 - 1$. Пусть выбраны элементы $y_1, \cdots, y_{N_{i-1}}$. Возьмем $m_i > m_{i-1}$ настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_{i-1}} T_{m_i, n} y_n \right\| < \delta_i, \tag{1.59}$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_{i-1}} T_{m_i, n} x_0 \right\| < \delta_i, \tag{1.60}$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_i, n} x_0 - x_0 \right\| < \delta_i. \tag{1.61}$$

Далее, возьмем $N_i > N_{i-1} + 1$ настолько большим, чтобы имело место

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_i-1} T_{m_i, n} x_0 - x_0 \right\| < \delta_i \tag{1.62}$$

и

$$S(m_i, N_i - 1) < \delta_i. \tag{1.63}$$

Теперь возьмем попарно различные элементы $y_{N_{i-1}+1}, \cdots, y_{N_i-1}$ последовательности $\{x_n\}$ так, чтобы каждое y_n, $N_{i-1} + 1 \leqslant n \leqslant N_i - 1$ было отлично от каждого y_n, $1 \leqslant n \leqslant N_{i-1}$ и чтобы выполнялись неравенства

$$\| T_{m_i, n} (y_n - x_0) \| < \frac{\delta_i}{N_i - N_{i-1}}, \quad N_{i-1} + 1 < n \leqslant N_i - 1. \tag{1.64}$$

Наконец, в качестве y_{N_i} возьмем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех y_n, $n = 1, 2, \cdots, N_i - 1$.

Продолжив этот процесс неограниченно, мы построим перестановку $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$ и две последовательности натуральных чисел $\{m_i\}$ и $\{N_i\}$ такие, что при любом i выполняются неравенства (1.59)—(1.64).

Из (1.61) и (1.62) имеем

$$\left\| \sum_{n=N_l}^{\infty} T_{m_l, n} x_0 \right\| < 2\delta_l. \tag{1.65}$$

Из (1.60), (1.61) и (1.65) имеем

$$\left\| \sum_{n=N_{l-1}+1}^{N_l-1} T_{m_l, n} x_0 - x_0 \right\| < 4\delta_l. \tag{1.66}$$

Далее, в силу (1.64) и (1.66), будем иметь

$$\left\| \sum_{n=N_{l-1}+1}^{N_l-1} T_{m_l, n} y_n - x_0 \right\| < 5\delta_l. \tag{1.67}$$

Наконец, из (1.59), (1.63) и (1.67) получим

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_l, n} y_n - x_0 \right\| \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{N_l-1} T_{m_l, n} y_n \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{n=N_{l-1}+1}^{N_l-1} T_{m_l, n} y_n - x_0 \right\| + \left\| \sum_{n=N_l}^{\infty} T_{m_l, n} y_n \right\| < \delta_l + 5\delta_l + \delta_l = 7\delta_l. \tag{1.68}$$

Так как по условию все перестановки суммируемы, то из (1.68) будем иметь

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{m, n}\, y_n = x_0,$$

что и требовалось. Теорема 1.2 доказана.

§ 2. Подпоследовательности

Теорема 2.1. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $T = (T_{m,n})$ — матрица, состоящая из непрерывных линейных отображений E в себя, удовлетворяющая первому условию регулярности. Если все последовательности $\{\varepsilon_n x_n, \varepsilon_n = \pm 1\}$ T-суммируемы, то для любого выбора $\varepsilon_n = \pm 1$ справедливо равенство*

$$T - \lim \varepsilon_n x_n = 0.$$

Предварительно докажем одну лемму.

Лемма 2.1. *Пусть E — нормированное линейное пространство и $\{x_n\}$ — последовательность точек E. Если ряд $\sum \varepsilon_n x_n$ сходится при любом выборе чисел $\varepsilon_n = \pm 1$, то*

$$\lim_{N\to\infty} \sup \left\{ \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n x_n \right\| : \varepsilon_n = \pm 1 \right\} = 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Предположим обратное, тогда существует последовательность $N_1 < N_2 < \cdots$ такая, что

$$\sup\left\{\left\|\sum_{n=N_k}^{\infty} \varepsilon_n x_n\right\| : \varepsilon_n = \pm 1\right\} > a > 0, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{2.2}$$

В силу (2.2) возьмем такие ε_n, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|\sum_{n=N_1}^{\infty} \varepsilon_n x_n\right\| > a. \tag{2,3}$$

Так как ряд $\sum \varepsilon_n x_n$ сходится, то из (2.3) следует существование числа $k(1)$ такого, что

$$\left\|\sum_{n=N_1}^{N_{k(1)}-1} \varepsilon_n x_n\right\| > a.$$

Далее, в силу (2.2) имеем

$$\sup\left\{\left\|\sum_{n=N_{k(1)}}^{\infty} \varepsilon_n x_n\right\| : \varepsilon_n = \pm 1\right\} > a,$$

откуда, при подходящем выборе ε_n, будем иметь

$$\left\|\sum_{n=N_{k(1)}}^{\infty} \varepsilon_n x_n\right\| > a. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует существование числа $k(2)$ такого, что

$$\left\|\sum_{n=N_{k(1)}}^{N_{k(2)}-1} \varepsilon_n x_n\right\| > a.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим такую последовательность знаков ε_n, что ряд $\sum \varepsilon_n x_n$ расходится. Из полученного противоречия вытекает справедливость (2.1).

Доказательство теоремы 2.1. Предположим обратное. Существует такая последовательность знаков ε_n, что

$$T - \lim \varepsilon_n x_n = x_0 \neq 0.$$

Очевидно можно считать $\varepsilon_n = 1$, $n = 1, 2, \cdots$. Таким образом, имеем

$$T - \lim x_n = x_0 \neq 0. \tag{2.5}$$

Построим индукцией две последовательности натуральных чисел $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ и $m_1 < m_2 < \cdots$ следующим образом. Возьмем произвольное число n_0 и стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}$.

Применяя первое условие регулярности и (2.5), выберем число m_k настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{n=1}^{n_{k-1}} \| T_{m_k, n} x_n \| < \delta_k \tag{2.6}$$

и

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_k, n} \ x_n - x_0 \right\| < \delta_k. \tag{2.7}$$

Далее, применяя лемму 2.1, возьмем число n_k настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{n=n_k+1}^{\infty} \varepsilon_n T_{m_k, n} x_n \right\| : \varepsilon_n = \pm 1 \right\} < \delta_k. \tag{2.8}$$

Продолжая указанный процесс неограниченно, мы построим требуемые последовательности $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$.

Теперь положим $\varepsilon_i = (-1)^k$ при $n_{k-1} + 1 \leqslant i \leqslant n_k$. Тогда из (2.6), (2.7) и (2.8) легко следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_k, n} \varepsilon_n x_n = (-1)^k x_0. \tag{2.9}$$

Предположение $x_0 \neq 0$ и (2.9) противоречат условиям теоремы 2.1. Итак $x_0 = 0$, что и требовалось.

Теорема 2.2. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $T = (T_{m, n})$ — регулярная матрица, состоящая из линейных отображений E в себя. Если все подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$ T-суммируемы, то множество предельных точек последовательности $\{x_n\}$ состоит из не более чем одной точки.*

Доказательство. Пусть x' и x'' — две предельные точки последовательности $\{x_n\}$. Выберем две подпоследовательности $\{x_{p(k)}\}$ и $\{x_{q(k)}\}$ так, чтобы ни один элемент $\{x_n\}$ не входил в $\{x_{p(k)}\}$ и $\{x_{q(k)}\}$ одновременно и чтобы $\lim_{k \to \infty} x_{p(k)} = x'$, $\lim_{k \to \infty} x_{q(k)} = x''$. Из того, что все подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$ T-суммируемы, следует, что при любом выборе знаков ε_k последовательность $\varepsilon_k (x_{p(k)} - x_{q(k)})$ T-суммируема (см. [5], стр. 401). Следовательно, в силу теоремы 2.1 имеем

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{m, k} (x_{p(k)} - x_{q(k)}) = 0. \tag{2.10}$$

С другой стороны, в силу регулярности матрицы T имеем

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{m, k} (x_{p(k)} - x_{q(k)}) = x' - x''. \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) следует, что $x' = x''$. Теорема 2.2 доказана.

Ереванский государственный университет

Поступила 9.II.1976

Ֆ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Նորմավորված տարածություններում հաջորդականությունների գումարման մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկված են գումարման մեթոդներ, որոնք տրվում են գծային օպերատորներից կազմված մատրիցներով։ Պարզված է թե ինչ կառուցվածք կարող է ունենալ հաջորդականության սահմանային կետերի բազմությունը, եթե նրա բոլոր տեղափոխությունները կամ բոլոր ենթահաջորդականությունները գումարվում են տվյալ մեթոդով։

F. A. TALALIAN. *Summation of sequences in normal spaces* (summary)

Methods of summation determined by matricies consisting of linear operators are considered. The structure of the set of limiting points of the sequences for whith all transpositions or subsequences are summable by the given method is clariferd.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Robinson.* On functional transformations and summability, Proc. London Math. Soc. (2), vol. 52, 1950, 132—160.
2. *G. G. Lorentz* and *M. S. Macphail.* Unbounded operators and a theorem of A. Robinson, Trans. Roy. Soc., Canada, vol. 46. series 3, 1952, 33—37.
3. *R. C. Buck.* A note on subsequences, Bull. Amer. Math. Soc., 49, 1943, 898—899.
4. *R. C. Buck.* An addendum to "A note on sybsequences", Proc. Amer. Math. Soc., 7, 1956, 1074—1075.
5. *Р. Кук.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., 1960.