ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 6, 1976 Математика

З. А. АРУШАНЯН

ГРАНИЧНАЯ ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В этой работе выясняется, какая скорость убывания данных Коши $\left\{U, \frac{\partial U}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial^{2p-1} U}{\partial t^{2p-1}}\right\}$ при приближении (вдоль границы) к фиксированной граничной точке обеспечивает обращение в тождественный нуль решения задачи Коши для полигармонического уравнения.

Для гармонических функций подобная задача была поставлена в работе [2]. Ее решение было дано в работах [1], [9]. В [1] можно найти и сведения по истории вопроса.

§ 1. Формулировка и обсуждение результатов

Обозначения: $R_+^{n+1} \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) \in R^{n+1} \,|t > 0\}$;

$$D^\delta \overset{\text{def}}{=} \{x \in R^n |\, |x| \leqslant \delta\}; \quad S^{n-1} \overset{\text{def}}{=} \{x \in R^n |\, |x| = 1\};$$

ω_{n-1} — естественная мера на единичной сфере S^{n-1}. Точку пространства R^{n+1} с координатами $(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ мы будем обозначать символом (x, t), где $x = (x_1, \cdots, x_n)$; пространство R^n мы будем отождествлять с гиперплоскостью $\{(x, t) \in R^n \,|t = 0\}$.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}; \quad \Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta.$$

Полигармоническое уравнение в этих обозначениях принимает следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)^p U(x, t) = 0 \quad (p = 1, 2, \cdots). \tag{1.1}$$

Функции, удовлетворяющие уравнению (1.1) назовем p-гармоническими.

Нам потребуется понятие правильной мажоранты (см. [1], стр. 63). Так называется неотрицательная функция v, заданная на некотором интервале $(0, \eta)$, непрерывно дифференцируемая и такая, что

$$x \cdot \frac{v'(x)}{v(x)} \uparrow +\infty \text{ при } x \downarrow +0.$$

1°. **Формулировка основного результата.** В этой формулировке будут участвовать натуральное число p, правильная мажоранта v, два непересекающихся множества T и S такие, что

$$T=\{j_0,\ j_1,\cdots,\ j_{p-1}\},\quad S=\{s_0,\ s_1,\cdots,\ s_{p-1}\},$$

причем $T\cap S=\varnothing$, $T\cup S=\{0,1,\cdots,\ 2p-1\}$ и p-открытых подмножеств сферы S^{n-1}, которые мы будем обозначать через E_s $(s\in S)$. Кроме того, нам понадобится область G с достаточно гладкой границей, содержащаяся в R^{n+1}_{+} и такая, что при некотором $\delta>0$

$$D^{\delta}\subset\partial G\cap R^{n}.$$

Теорема А. *Пусть U—p-гармоническая функция класса $C^{2p}(\overline{G})$. Если*

$$1.\quad \max_{\theta\in E_s}\left|\frac{\partial^s U}{\partial t^s}\right|(\rho\cdot\theta)=o\ (\rho^{N+1})\ \ (\rho\to 0,\ s\in S)$$

для любых $N=0,\ 1,\cdots,$

$$2.\quad \max_{\theta\in S^{n-1}}\left|\frac{\partial^j U}{\partial t^j}\right|(\rho\cdot\theta)\leqslant v\ (\rho)\ \ (\rho>0,\ j\in T)$$

для некоторой правильной мажоранты v такой, что

$$3.\quad \int\limits_0 \log v\ (t)\ dt=-\infty,$$

то

$$U\ (x,\ t)\equiv 0\ \ ((x,\ t)\in G).$$

Мы докажем более общую теорему, в которой вместо решений класса $C^{2p}(\overline{G})$ рассматриваются решения соболевского класса $H^{2p}(G)$— всех функций, обобщенные производные которых до порядка $2p$ включительно принадлежат $L^2(G)$. Функции класса $H^{2p}(G)$ и их нормальные производные до порядка $2p-1$ имеют на ∂G естественные граничные значения. Более точно

$$\frac{\partial^k U}{\partial \nu^k}\in H^{2p-k-\frac{1}{2}}(\partial G)\ \ (k=0,\ 1,\cdots,\ 2p-1).$$

Именно эти граничные данные имеются в виду в формулировке теоремы В (см. § 3, теорема о следах).

Теорема В. *Пусть U — p-гармоническая функция класса $H^{2p}(G)$. Если*

$$1.\quad \int\limits_0^{\rho}\int\limits_{E_s}\left|\frac{\partial^s U}{\partial t^s}\right|(r\cdot\theta)\ d\omega_{n-1}\ r^{n-1}\ dr=o\ (\rho^{N+1})\ \ (\rho\to 0,\ s\in S)$$

для любых $N = 0, 1, 2, \cdots,$

$$2. \qquad \int\limits_{|x|<\rho} \left| \frac{\partial^j U}{\partial t^j} \right| (x)\, dx \leqslant v(\rho) \quad (\rho > 0,\ j \in T)$$

для некоторой правильной мажоранты v *такой, что*

$$3. \qquad \int\limits_0 \log v(t)\, dt = -\infty,$$

то $U(x, t) \equiv 0$ $((x, t) \in G)$.

Доказательство этой теоремы будет дано в § 6. Там будет показано, что условие 1 можно ослабить.

Основное отличие задачи Коши для p-гармонических функций от задачи Коши для гармонических функций состоит в большем разнообразии способов разбиения множества данных на две группы, то есть способов выбора множеств $T = \{j_0, j_1, \cdots, j_{p-1}\}$ и $S = \{s_0, s_1, \cdots \cdots, s_{p-1}\}$. Для некоторых разбиений результаты получаются технически более просто. Так, например, обстоит дело для множества $T = \{0, 2, \cdots, 2p-2\}$, когда „$S$-данные" Коши довольно просто выражаются через „T-данные", или для $S = \{0, 1, \cdots, p-1\}$, когда в выражениях „$S$-данных" через „$T$-данные" присутствуют лишь потенциалы Рисса, тогда как в общем случае к этим потенциалам приходится применять дифференциальные операторы (то есть рассматривать псевдодифференциальные соотношения между S и T-данными Коши), усложняющие анализ.

Наше доказательство теоремы В состоит в установлении связи между свойствами единственности решений задачи Коши для полигармонических уравнений (1.1) и свойствами единственности псевдопотенциалов Ньютона

$$\Phi[f, w, x] = D^\alpha \left[\int\limits_{|y|<\eta} \frac{f(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}} + w(x) \right],$$

где $f \in L^1(D^\eta)$, w — вещественно-аналитическая функция, а D^α — дифференциальный оператор.

2°. План работы. Для этого мы в § 4 выводим интегро-дифференциальные соотношения, выражающие зависимость данных Коши „S-группы" от данных Коши „T-группы" на плоском куске границы области G (см. [3]). Выводу этой зависимости предшествуют подготовка некоторых простых алгебраических фактов (см. § 2, п. 1), сведения о разрешимости краевых задач для полигармонических уравнений (см. § 3, п. 3), а также некоторые хорошо известные факты о p-гармонических функциях (см. § 3, п. 1 и п. 2). Во всей работе важную роль будет играть теорема 2.1. Доказательство см. в п. 3 § 2.

Доказательство основной теоремы заканчивается в § 6, где мы в общих чертах следуем рассуждениям работы [1].

В § 7 устанавливается точность условия 3 теоремы А.

В § 5 вводится понятие слабого асимптотического ряда для обобщенной функции T вблизи нуля. Главный результат этого параграфа (теорема единственности для слабых асимптотических рядов) доказана в п. 3. Теорема 7.2—это некоторая „грубая теорема" неединственности.

На протяжении всей работы мы неоднократно будем применять хорошо известные факты теории линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Основными источниками для ссылок по этому поводу нам будут служить книги Шилова [3] и Лионса—Мадженеса [4].

§ 2. Алгебраическая часть

1°. Определение пространства $Q_p^-[\sigma]$.

Рассмотрим, следуя [3], двойственное по отношению (1.1) уравнение, которое имеет следующий вид:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-|\sigma|^2\right)^p V(\sigma,\ t)=0\ ((\sigma,\ t)\in R_+^{n+1}). \tag{1.1}^*$$

Для каждого $\sigma\in R^n$ это обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2p$. С уравнением (1.1) свяжем p-мерное подпространство $Q_p^-[\sigma]$ пространства R^{2p} (см. [3], стр. 235). Это подпространство определяется следующим образом.

Рассмотрим матрицу:

$$P=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_0|\sigma|^{2p} & 0 & \lambda_{2p-2}|\sigma|^2 & 0 \end{vmatrix}, \tag{2.1}$$

где в последней строке выписаны коэффициенты многочлена $(\lambda^2-|\sigma|^2)^p$ $(\sigma\in R^n)$. Эта матрица естественно связана с системой дифференциальных уравнений первого порядка, обычным способом сопоставляемой уравнению (1.1)*. p-кратному собственному значению $-|\sigma|$ матрицы P отвечают p линейно-независимых векторов, принадлежащих R^{2p} при каждом $\sigma\in R^n$.

Определение 2.1. $Q_p^-[\sigma]$ есть p-мерное подпространство, порожденное собственными векторами матрицы P, отвечающими собственному значению $-|\sigma|$.

Рассмотрим базисную матрицу подпространства $Q_p^-[\sigma]$ (ее столбцы суть собственные векторы матрицы P):

$$E(-|\sigma|)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ -|\sigma| & 1 & 0 & \\ (-|\sigma|)^2 & 2(-|\sigma|) & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-|\sigma|)^{2p-1} & (2p-1)(-|\sigma|)^{2p-2} & C^p_{2p-1}(-|\sigma|)^p & \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

Сформулируем теперь основной результат этого параграфа.

2°. Теорема 2.1. *Пусть* $S=\{s_0, s_1, \cdots, s_{p-1}\}$,

$$T=\{j_0, j_1, \cdots, j_{p-1}\}, \text{ где } 0< s_k,\ j_k \leqslant 2p-1$$

— некоторое разбиение множества $\{0, 1, \cdots, 2p-1\}$ *на две группы, такое, что* $S\cap T=\varnothing$.

Существует матрица $H=(h_{sj})$ $(s\in S,\ j\in T)$ *такая, что если* $b=\{b_0, b_1, \cdots, b_{2p-1}\}\in R^{2p}$ *— произвольный вектор, то*

1. $b\in Q_p^-[\sigma]$ $(\sigma\in R^n\setminus\{0\})$ *тогда и только тогда, когда*

$$|\sigma|^{-s} b_s=\sum_{j\in T} h_{sj}|\sigma|^{-j} b_j \ (s\in S), \tag{2.3}$$

2. *Все миноры матрицы* H *обратимы.*

Доказательство теоремы 2.1 будет дано в пункте 4, а сейчас мы проделаем некоторую подготовительную работу, изучив определители, возникающие при доказательстве теоремы 2.1.

3°. Рассмотрим матрицу-функцию $E^T(x)=\{a_{j,k}(x)\}$ $(j\in T,\ k=0, 1, \cdots, p-1)$, где при $j>k$

$$a_{j,k}(x)=\frac{j!}{k!\,(j-k)!}\,x^{j-k}=C_j^k\cdot x^{j-k}, \text{ а}$$

при $j\geqslant k$ $a_{j,k}(x)\equiv 0$.

Лемма 2.1. *Для любого* $T=\{j_0, j_1, \cdots, j_{p-1}\}$

1. $\det E^T(x)=h_0 x^q$, *где* $h_0\neq 0$;

2. $q=\sum\limits_{k=0}^{p-1} j_k-\dfrac{p(p-1)}{2}$.

Доказательство. Как известно определитель матрицы $(b_{j,k})$ вычисляется по формуле

$$\det(b_{j,k})=\sum_{\nu}(-1)^{|\nu|} b_{0,\nu(0)}\, b_{1,\nu(1)}\cdots b_{p-1,\nu(p-1)}, \tag{2.4}$$

где ν — элемент группы перестановок множества $\{0, 1, \cdots, p-1\}$, а ν — четность элемента ν. В нашем случае имеем:

$$b_{k,\nu(k)}=C_{j_k}^{\nu(k)}\cdot x^{j_k-\nu(k)},$$

так что каждое слагаемое в сумме (2.4) приобретает вид:

$$(-1)^{|\nu|} h_\nu\, x^{\sum\limits_0^{p-1} j_k - \sum\limits_0^{p-1} \nu(k)}.$$

Так как $\sum\limits_0^{p-1} \nu(k) = \frac{p(p-1)}{2}$, то для всей суммы имеем

$$\left[\sum_\nu (-1)^{|\nu|} h_\nu\right] x^q, \text{ где } h_0 \overset{\text{def}}{=} \sum_\nu (-1)^\nu h_\nu.$$

А теперь докажем, что $h_0 \neq 0$. Так как $h_0 = E^T(1)$, то для завершения доказательства леммы 2.1 нужно убедиться в том, что значение определителя $E^T(x)$ при $x = 1$ не равно нулю.

$$h_0 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{1!} j_0 & \frac{1}{2!} j_0(j_0-1) & \frac{1}{(p-1)!} j_0(j_0-1)\cdots(j_0-p+2) \\ 1 & \frac{1}{1!} j_1 & \frac{1}{2!} j_1(j_1-1) & \frac{1}{(p-1)!} j_1(j_1-1)\cdots(j_1-p+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{1!} j_{p-1} & \frac{1}{2!} j_{p-1}(j_{p-1}-1) & \frac{1}{(p-1)!} j_{p-1}(j_{p-1}-1)\cdots(j_{p-1}-p+2) \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_1^{p-1}\left(\frac{1}{\nu!}\right) \begin{vmatrix} 1 & j_0 & j_0(j_0-1) & j_0(j_0-1)\cdots(j_0-p+2) \\ 1 & j_1 & j_1(j_1-1) & j_1(j_1-1)\cdots(j_1-p+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & j_{p-1} & j_{p-1}(j_{p-1}-1) & j_{p-1}(j_{p-1}-1)\cdots(j_{p-1}-p+2) \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{p-1}\left(\frac{1}{\nu!}\right) W(j_0, j_1, \cdots, j_{p-1}) \neq 0.$$

где W — определитель Вандермонда.

Замечание 2.1. Пусть $T' = \{j_0, j_1, \cdots, s, \cdots, j_{p-1}\}$, где $s \in S$. Тогда

$$\frac{\det E^{T'}(x)}{\det E^T(x)} = h'_{s_j} x^{s-j}, \text{ где } h'_{s_j} \neq 0 \tag{2.5}$$

(T' это T с той разницей, что элемент j заменен элементом s). Сейчас мы сформулируем простую лемму 2.2, которая в удобных для проверки терминах дает ответ на вопрос: когда в матрице $(a_{i,j})$ $(i, j = 0, 1, \cdots, p-1)$ все миноры обратимы?

Лемма 2.2. *Пусть* $(a_{i,j})$ $(i, j=0, 1, \cdots, p-1)$*—матрица комплексных чисел. Следующие утверждения равносильны:*

1. *Все миноры матрицы* $(a_{i,j})$ *обратимы,*

2. *Если* p *координат вектора* $X = (x_0, x_1, \cdots, x_{2p-1}) \in R^{2p}$ *равны нулю и*

$$\sum_{j=0}^{p-1} a_{ij} x_j = x_{p+i} \ (i=0, 1, \cdots, p-1),$$

то $X=0$.

Это утверждение очевидно.

4°. Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\sigma \neq 0$ и $\sigma \in R^n$. По определению пространства $Q_p^-[\sigma]$ и базисной матрицы $E(-|\sigma|)$ (см. п. 1, § 2) имеем: $b = \{b_k\}_{k=0}^{2p-1} \in \{Q_p^-[\sigma]$ тогда и только тогда, когда для некоторого вектора $c \in R^p$ имеет место следующее равенство $b_i' = E(-|\sigma|)\cdot c$. А это равенство означает, что

$$b_j = E^T(-|\sigma|)\cdot c \ (j \in T),$$
$$b_s = E^S(-|\sigma|)\cdot c \ (s \in S)$$

(обозначение E^T было введено в начале п. 2 этого параграфа).

А теперь заметим, что матрица $E^T(-|\sigma|)$ при $-|\sigma|=x$ совпадает с матрицей, рассмотренной в лемме 2.1, так что она обратима и мы можем написать

$$\{b_s\} = E^S [E^T]^{-1} \{b_j\} \ (s \in S). \tag{2.6}$$

Это и есть, собственно говоря, первое утверждение теоремы 2.1 в векторной записи.

Для того чтобы получить явные выражения для координат $\{b_s\}$ $(s \in S)$, через координаты $\{b_j\}$ $(j \in T)$ заметим, что

$$\begin{vmatrix} b_{j_0} & & \\ b_{j_1} & & \\ \vdots & E^T(-|\sigma|) & \\ b_{j_{p-1}} & & \\ b_s & (-|\sigma|)^{s-1} & \ldots \end{vmatrix} = 0 \quad (s \in S).$$

Разложим этот определитель по первому столбцу, получим

$$b_s = \sum_{j \in T} (-1)^j \frac{\det E^{T'}(-|\sigma|)}{\det E^T(-|\sigma|)} b_j = \sum_{j \in T} h_{sj} |\sigma|^{s-j} b_j \ (s \in S),$$

где по определению

$$h_{sj} = (-1)^j \frac{h_0(T')}{h_0(T)} \ s \in S, j \in T).$$

Здесь мы пользовались замечанием 2.1 к лемме 2.1. Перепишем полученные соотношения в следующем виде:

$$|\sigma|^{-s} b_s = \sum_{j \in T} h_{sj} |\sigma|^{-j} b_j \ (s \in S). \tag{2.7}$$

Итак, первое утверждение теоремы 2.1 доказано. А теперь переходим к доказательству утверждения об обратимости миноров только что полученной матрицы $H=(h_{sj})$ $(s \in S, j \in T)$ в соотношении (2.7).

Напомним, что (2.7) справедливо для любых разбиений $\{T;\ S\}$ множества индексов $\{0,\ 1, \cdots, 2p-1\}$.

Предположим, что $Y=(y_0,\ y_1, \cdots,\ y_{2p-1})$ удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{j\in T} h_{sj}\, y_j = y_s \quad (s \in S)$$

и p — его координаты (индексы которых заполняют множество T^* типа T) равны нулю. Положим $S^* = \{0, 1, \cdots, 2p-1\} \setminus T^*$ и $b_k = |\sigma|^k y_k$, для $k \in T^* \cup S^*$. Тогда вектор $\{b_k\}_{k=0}^{2p-1}$, будучи решением (2.7), принадлежит $Q_p^-[\sigma]$ и его S^*-координаты выражаются по формулам типа (2.7), для S^*, T^* и $h_{sj} = h^*_{sj}$. Поэтому вектор Y — нулевой, и ссылка на лемму 2.2 завершает доказательство.

Теорема 2.1 полностью доказана.

§ 3. О полигармонических функциях

В этом параграфе мы будем иметь дело с пространством (уже упоминавшимся ранее) всех функций, все обобщенные производные которых до порядка $2p$ включительно принадлежат $L^2(G)$, где G—ограниченная область в R^{n+1} с достаточно гладкой границей.

Мы неоднократно будем использовать, без подробных пояснений, известные факты о гладкости сужений функций класса $H^{2p}(G)$ на гиперповерхности и о граничных значениях этих функций и их производных (см. [4], стр. 219, теорема 8.1). В частности, нам понадобится следующая теорема (см. [4], гл. 1, теорема 8.3).

Т е о р е м а о с л е д а х. Предположим, что G — конечная область с достаточно гладкой границей или $G = R^{n+1}_+$. Тогда отображение

$$U \to \left\{ \frac{\partial^j U}{\partial \nu^j} \,\middle|\, j = 0,\ 1, \cdots, m-1 \right\}, \tag{3.1}$$

где $\dfrac{\partial^j}{\partial \nu^j}$ — нормальная производная к ∂G порядка j, продолжается по непрерывности до линейного непрерывного отображения, обозначаемого снова через (3.1), действующего из $H^m(G)$ в

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial G).$$

1°. Ф о р м у л а Г р и н а д л я п о л и г а р м о н и ч е с к о г о о п е р а т о р а. Пусть G — область с достаточно гладкой границей, а функции U и V класса $C^\infty(\overline{G})$. Для U, V и Δ известна следующая формула Грина:

$$\int_G U\Delta V - \Delta U\cdot V = \int_{\partial G} U\frac{\partial V}{\partial \nu} - \frac{\partial U}{\partial \nu} V. \tag{3.2}$$

Заменяя в (3.2) U на $\Delta^i U$, а V на $\Delta^{p-i-1} V$ и суммируя по i от нуля до $p-1$, получаем следующий вариант формулы Грина для полигармонического оператора Δ^p $(p=1, 2, \cdots)$

$$\int\limits_G U\Delta^p V - \Delta^p U \cdot V = \int\limits_{\partial G} \sum_{i=0}^{p-1} \Delta^i U \frac{\partial \Delta^{p-i-1} V}{\partial \nu} - \Delta^{p-i-1} V \frac{\partial \Delta^i U}{\partial \nu}. \quad (3.3)$$

Так как $C^\infty(\overline{G})$ плотно в $H^{2p}(G)$, то по теореме о следах формула (3.3) справедлива для функций U и V, принадлежащих классу $H^{2p}(G)$.

Следующую теорему мы иногда будем называть „грубой теоремой единственности" решений задачи Коши для полигармонического уравнения.

2°. „Грубая теорема единственности".

Теорема 3.1. *Предположим, что U—p-гармоническая функция класса $H^{2p}(G)$, где $G \subset R^n$ — область с достаточно гладкой границей.*

Если существует такой открытый кусок $B \subset \partial G$ границы G, что $\left.\frac{\partial^k U}{\partial \nu^k}\right|_B \equiv 0$ $(k=0, 1, \cdots, 2p-1)$, то $U \equiv 0$ в G $\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right.$ означает дифференцирование по нормали к $\left.\partial G\right)$.

Доказательство. Для любого натурального числа k обозначим через $J_k(\rho)$ фундаментальную функцию оператора Δ^k (в R^n), так что $\Delta^p J_p(|x-y|) = \delta(x)$ $(x, y \in R^n)$, а $\Delta^s J_k(\rho) = J_{k-s}(\rho)$. Применяя формулу Грина (3.3) для полигармонической функции U, принадлежащей классу $H^{2p}(G)$ и $V = J_p$, получим следующее представление для $U(x)$ через граничные значения U и ее производных до порядка $2p-1$

$$\int\limits_{\partial G} F(x, y)\, ds = \begin{cases} U(x) & (x \in G) \\ 0 & (x \in R^n \setminus \overline{G}), \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$F(x, y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{p-1} \left\{ \Delta^i U \frac{\partial}{\partial \nu} J_{i+1}(|x-y|) - \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta^i U) J_{i+1}(|x-y|) \right\}.$$

Но по условию теоремы $\int\limits_{\partial G} F = \int\limits_{\partial G \setminus B} F$, следовательно, $\int\limits_{\partial G \setminus B} F$ определяет p-гармоническую функцию в $R^n \setminus (\partial G \setminus B)$. Но вне G $\int\limits_{\partial G} F$ равен нулю, следовательно из (3.4) следует, что $U \equiv 0$ в G.

3°. В этом пункте мы, опираясь на хорошо известные методы (см. [3], гл. IV), подготовим необходимые для дальнейшего сведения о разрешимости краевых задач для полигармонических уравнений:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)^p U(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in R^{n+1}). \quad (3.5)$$

С уравнением (3.5) свяжем семейство обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра σ, где $\sigma \in R^n$, возникающее после формального преобразования Фурье уравнения (3.5) по переменной $x \in R^n$;

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - |\sigma|^2\right)^p V(\sigma, t) = 0 \quad (t > 0, \ \sigma \in R^n). \tag{3.6}$$

Заменим, при каждом $\sigma \in R^n$ это уравнение порядка $2p$ системой $2p$ уравнений первого порядка. Решение этой системы с начальным вектором $V(\sigma) = \{v_k(\sigma)\}_0^{2p-1}$ имеет вид:

$$V(\sigma, t) = e^{tP(\sigma)} V(\sigma) \tag{3.7}$$

(определение матрицы $P(\sigma)$ см. в начале § 2, (2.1)).

В этом параграфе мы будем использовать пространства $H^s(R^n)$ $(s>0)$ (см. 4, гл. 1, п. 7.1). Напомним, что при $s \in (-\infty, +\infty)$,

$$H^s(R^n) = \{f \mid f \in L^2(R^n), \ (1+|\sigma|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(R^n)\},$$

где $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f.

Теорема 3.2. *Пусть вектор-функция*

$$V: R^n \to R^{2p}, \ \textit{где} \ V = \{v_k\}_{k=0}^{2p-1}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1. $V(\sigma) \in Q_p^-[\sigma]$ *для почти всех* $\sigma \in R^n$,

2. $(1+|\sigma|^2)^p |\sigma|^{-l-\frac{1}{2}} v_l \in L^2(R^n)$.

Тогда, если $V(\sigma, t) = e^{tP(\sigma)} V(\sigma)$, *где* $V = \{V_k\}_{k=0}^{2p-1}$, *то*

а) $$\int_0^\infty dt \int_{R^n} |V_n|^2 (\sigma, t)(1+|\sigma|^2)^{2p-k} d\sigma < +\infty$$

для любого $k=0, 1, \cdots, 2p-1$
и

в) $$\lim_{t \to +0} \int_{R^n} |V_k(\sigma, t) - v_k(\sigma)|^2 (1+|\sigma|^2)^{2p-k-\frac{1}{2}} d\sigma = 0.$$

Замечание к теореме 3.2. Пусть T и S имеют тот же смысл, что и в теореме 2.1. Если для вектор-функции $\{v_j'\}$ $(j \in T)$ имеет место условие 2'. $(1+|\sigma|^2)^p |\sigma|^{-j-\frac{1}{2}} v_j' \in L^2(R^n)$, где $j \in T$, то ее можно „дополнить" до вектор-функции $\{v_k\}$, $(k \in T \cup S)$ таким образом, чтобы для нее были выполнены условия 1 и 2 теоремы 3.2. Для этого достаточно определить $\{v_s\}$ $(s \in S)$ с помощью соотношений

(2.3) теоремы 2.1, обеспечивающих включение „расширенной" вектор-функции в $Q_p^-[\sigma]$. Условие 2 следует из 2′.

Доказательство теоремы 3.2. Сначала выясним, как действует оператор $e^{tP(\sigma)}$ в подпространстве $Q_p^-[\sigma]$ пространства R_σ^{2p}. Так как спектр матрицы $P(\sigma)$ в $Q_p^-[\sigma]$ совпадает с p-кратным корнем $-|\sigma|$ многочлена $\lambda \to \det[P(\sigma)+\lambda I]$, то $e^{tP(\sigma)}$ можно представить в виде $R[P(\sigma)]$, где R — произвольный многочлен, такой, что при $\lambda = -|\sigma|$

$$R(-|\sigma|) = e^{-t|\sigma|};\ R'(-|\sigma|) = t\,e^{-t|\sigma|};\cdots;R^{(p-1)}(-|\sigma|) = t^{p-1}\,e^{-t|\sigma|}.$$

Ясно, что в качестве такого многочлена можно брать

$$R(\lambda) = e^{-t|\sigma|}\left\{1+\frac{t}{1!}(\lambda+|\sigma|)+\cdots+\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}(\lambda+|\sigma|)^{p-1}\right\}.$$

Следовательно

$$e^{tP(\sigma)}\Big|_{Q_p^-[\sigma]} = e^{-t|\sigma|}\left\{I+\frac{t}{1!}[P+|\sigma|I]+\cdots+\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}[P+|\sigma|I]^{p-1}\right\}. \quad (3.8)$$

Теперь из условия 1 теоремы 3.2 следует:

$$V(\sigma,t) = e^{tP(\sigma)}\Big|_{Q_p^-[\sigma]}\cdot v(\sigma) = e^{-t|\sigma|}\left\{\sum_{s=0}^{p-1}\frac{t^s}{s!}[P+|\sigma|I]^s\,V(\sigma)\right\} =$$

$$= e^{-t|\sigma|}\left\{\sum_{s=0}^{p-1}\frac{1}{s!}(t|\sigma|)^s\,V^s(\sigma)\right\}\ (P=P(\sigma)),$$

где по определению положено $V^s(\sigma) = \dfrac{P(\sigma)+|\sigma|I}{|\sigma|}V^{s-1}(\sigma)$. Далее

$$V_k(\sigma,t) = e^{-t|\sigma|}\left[\sum_{s=0}^{p-1}\frac{1}{s!}(t|\sigma|)^s\,v_k^s(\sigma)\right]\ (V^s = \{v_k^s\}_{k=0}^{2p-1}). \quad (3.9)$$

Используя явное выражение матрицы $P(\sigma)$ (см. (2.1)), индукцией по s покажем, что

$$|\sigma|^{-k}\,v_k^s(\sigma) = \sum_{e=0}^{2p-1}\alpha_{k,e}^s\,|\sigma|^{-e}\,v_e(\sigma)\ (k=0,1,\cdots,2p-1), \quad (3.10)$$

где $s=0,1,\cdots,p-1$, а $\alpha_{k,e}^s$ не зависит от σ. В самом деле, из определения V^s следует, что

$$v_k^s(\sigma) = \left(\frac{P(\sigma)+|\sigma|I}{|\sigma|}V^{s-1}(\sigma)\right)_k.$$

Но из (2.1) следует, что

$$\frac{P(\sigma)+|\sigma|I}{|\sigma|} = (C_{s,m}\,|\sigma|^{s-m}),$$

где $s, m = 0, 1, \cdots, 2p-1$, а $C_{s,m}$ не зависит от σ. Поэтому

$$v_k^{s+1}(\sigma) = \sum_{m=0}^{2p-1} C_{k,m} |\sigma|^{k-m} v_m^s(\sigma) = \sum_{m=0}^{2s-1} C_{m,k} |\sigma|^{k-m} \times$$

$$\times |\sigma|^m \sum_{e=0}^{2p-1} a_{k,e}^s |\sigma|^{-e} v_e(\sigma) = |\sigma|^k \sum_{e=0}^{2p-1} a_{k,e}^{s+1} \cdot |\sigma|^{-e} v_e(\sigma),$$

где

$$a_{k,e}^{s+1} = \sum_{m=0}^{2p-1} a_{k,e}^s C_{k,m}.$$

Наконец, учитывая (3.9), получим для $k = 0, 1, \cdots, 2p-1$

$$J_k \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt \int_{R^n} |V_k|^2(\sigma, t)(1+|\sigma|^2)^{2p-k} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty dt \int_{R^n} \left| \sum_{s=0}^{p-1} e^{-t|\sigma|} \frac{(t|\sigma|)^s}{s!} v_k^s(\sigma) \right|^2 (1+|\sigma|^2)^{2p-k} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p(p-1)}{2} \sum_{s=0}^{p-1} \int_{R^n} \left[\int_0^\infty e^{-2t|\sigma|} \frac{(t|\sigma|)^{2s}}{s!^2} d(t|\sigma|) \right] |(1+|\sigma|^2)^{\frac{2p-k}{2}} |\sigma|^{-\frac{1}{2}} v_k^s(\sigma)|^2 d\sigma =$$

$$= \sum_{s=0}^{p-1} d_s \int_{R^n} |(1+|\sigma|^2)^{\frac{2p-k}{2}} |\sigma|^{-\frac{1}{2}} v_k^s(\sigma)|^2 d\sigma \left(d_s = \frac{p(p-1)}{2s!^2} \int_0^\infty e^{-2t} t^{2s} dt \right).$$

Далее, учитывая равенство (3.10), получим

$$\int_{R^n} |(1+|\sigma|^2)^{\frac{2p-k}{2}} |\sigma|^{-\frac{1}{2}} v_k^s(\sigma)|^2 d\sigma \leqslant \sum_{e=0}^{2p-1} d_{k,e}^s \int_{R^n} |(1+|\sigma|^2)^{\frac{2p-k}{2}} |\sigma|^{k-e-\frac{1}{2}} v_e(\sigma)|^2 d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{e=0}^{2p-1} d_{k,e}^s \int_{R^n} |(1+|\sigma|^2)^p |\sigma|^{-e-\frac{1}{2}} v_e(\sigma)|^2 d\sigma < +\infty$$

по условию 2 теоремы 3.2. Следовательно, $J_k < +\infty$ и утверждение а) нашей теоремы доказано.

Переходим к доказательству утверждения в).

Учитывая (3.8) и (3.9), получим

$$V(\sigma, t) - V(\sigma) = (e^{tP(\sigma)} - I) V(\sigma) = (e^{-t|\sigma|} - 1) V(\sigma) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{p-1} e^{-t|\sigma|} \frac{(t|\sigma|)^s}{s!} \left[\frac{P(\sigma) + |\sigma| I}{|\sigma|} \right]^s V(\sigma).$$

Следовательно

$$V_k(\sigma,t)-v_k(\sigma)=(e^{-t|\sigma|}-1)\,v_k(\sigma)+\sum_{s=0}^{p-1}e^{-t|\sigma|}\frac{(t|\sigma|)^s}{s!}\,v_k^s(\sigma). \tag{3.11}$$

Далее обозначим через $N_t(\sigma)$ подынтегральное выражение в утверждении в) теоремы 3.2, и покажем, что предельный переход под знаком интеграла допустим по теореме Лебега о мажорированной сходимости.

Из равенства (3.9) следует, что $N_t(\sigma)$ почти всюду стремится к нулю, когда $t\to+0$. С другой стороны, при всех $t>0$ для $N_t(\sigma)$ имеем следующую оценку:

$$|N_t(\sigma)|\leqslant p\,\Big\{(e^{-t|\sigma|}-1)|v_k|^2(\sigma)+\sum_{s=0}^{p-1}e^{-2t|\sigma|}\frac{(t|\sigma|)^{2s}}{s!^2}|v_k^s|^2(1+|\sigma|^2)^{2p-k-\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant c_1\Big[|v_k|^2(\sigma)+\sum_{s=0}^{p-1}|v_k^s|^2(\sigma)\Big](1+|\sigma|^2)^{2p-\nu-\frac{1}{2}}\leqslant c_2|v_k|^2(\sigma)(1+|\sigma|^2)^{2p-k-\frac{1}{2}}+$$

$$+c_2\left[\sum_{e=0}^{2p-1}(1+|\sigma|^2)^{\frac{1}{2}\left(2p-k-\frac{1}{2}\right)}|\sigma|^k\,|\sigma|^{-e}\,|v_e(\sigma)|\right]^2\leqslant c_2(1+|\sigma|^2)^{2p-k-\frac{1}{2}}|v_k|^2(\sigma)+$$

$$+c_2\sum_{e=0}^{2p-1}\Big[(1+|\sigma|^2)^p\,|\sigma|^{-e-\frac{1}{2}}|v_e|(\sigma)\Big]^2\overset{\text{def}}{=}F(\sigma)\in L^1(R^n).$$

Мы воспользовались равенством (3.10), последнее включение следует из условия 2 теоремы 3.2. Доказательство теоремы 3.2 закончено.

4°. Введем теперь следующий класс p-гармонических функций в полупространстве R_+^{n+1}. Напомним, что $H^{2p}(R_+^{n+1})$ состоит из всевозможных функций, принадлежащих вместе со своими обобщенными производными до порядка $2p$ включительно классу $L^2(R_+^{n+1})$.

Определение 3.1. Решение U уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)^p U(x,t)=0\quad((x,t)\in R_+^{n+1}), \tag{3.12}$$

принадлежащее классу $H^{2p}(R_+^{n+1})$, назовем регулярным решением.

Пусть $u_0, u_1,\cdots, u_{2p-1}$ — набор функций, заданных в R^n, причем $u_l\in H^{2p-l-\frac{1}{2}}(R^n)$ $(l=0,1,\cdots,2p-1)$. Следующая теорема показывает, при каких условиях, наложенных на эти функции, существует регулярное решение, l-тая нормальная производная которого совпадает на $\partial R_+^{n+1}=R^n$ с функцией u_l. В формулировке этой теоремы символом $[U]_t$, где U — функция в R_+^{n+1}, а $t>0$, будем обозначать функцию, заданную в R^n следующим образом:

$$[U]_t(x)=U(x,t)\quad(x\in R^n,\ t>0).$$

Теорема 3.3. *Пусть вектор-функция* $b = \{b_k\}_0^{2p-1}$, *где* $b_k(\sigma) = \hat{u}_k(\sigma)$ $(\sigma \in R^n)$ *удовлетворяет условиям* 1 *и* 2 *теоремы* 3.2. *Тогда существует регулярное решение* U *р-гармонического уравнения* (3.12) *такое, что*

$$\lim_{t\to+0}\left\|\left[\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right]_t - u_k\right\|_{H^{2p-k-\frac{1}{2}}(R^n)} = 0 \ (k=0, 1, \cdots, 2p-1). \qquad (3.13)$$

Доказательство. В качестве решения U следует взять обратное преобразование Фурье функции V (см. 3.7)), построенной при доказательстве теоремы 3.2. При этом из той же теоремы имеем:

$$J_k \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt \int_{R^n} |V_k|^2 (\sigma, t)\,(1+|\sigma|^2)^{2p-k}\, d\sigma < +\infty. \qquad (3.14)$$

Но так как $V(\sigma, t)$ удовлетворяет уравнению $(1.1)^\wedge$, то

$$V_{2p}(\sigma, t) = \sum_{k=0}^{2p-1} \alpha_k\, |\sigma|^{2p-k}\, V_k(\sigma, t),$$

где α_k — постоянные числа, следовательно из (3.14) следует, что $J_{2p} < +\infty$, так что

$$\|U\|_{H^{2p}(R^{n+1}_+)} \leqslant c \sum_{k=0}^{2p} J_k < +\infty$$

(см. [4], гл. 1, теорема 1.3). А это по определению 3.1 значит, что U — регулярное решение.

Утверждение (3.13) теоремы 3.3 совпадает с утверждением в) теоремы 3.2.

§ 4. Связь между данными Коши для функции, полигармонической в полушаре

Цель настоящего параграфа—установить некоторые интегро-дифференциальные соотношения между данными Коши p-гармонической функции на плоском куске границы верхнего полушара в R^{n+1}_+. Обозначения:

$$K^\delta_\pm = \{(x, t) \in R^{n+1}_\pm \,|\, |x|^2 + t^2 < \delta^2\};$$

$$K^\delta = \{(x, t) \in R^{n+1} \,|\, |x|^2 + t^2 < \delta^2\};\ K^\delta = K^\delta_- \cup D^\delta \cup K^\delta_+,\ H^{2p}(K^\delta_\pm)$$

и $H^{2p-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ — пространства типа Соболева, о которых говорилось в начале § 3 (см. [5], стр. 48).

1°. Об одном представлении полигармонической функции класса $H^{2p}(K^\delta_+)$.

Теорема 4.1. *Пусть U — p-гармоническая функция класса $H^{2p}(K_+^{\delta})$. Тогда существуют функции U' и W, заданные, соответственно, в R_+^{n+1} и в K^{δ} и такие, что*

а). $U(x, t)=(U'+W)(x, t)\ ((x, t)\in K_+^{\delta})$;

в). *U' — регулярное решение уравнения* (3.12) (*см.* § 3, *опр.* 1);

с). $\Delta_t^p W(x, t)=0\ ((x, t)\in K^{\delta})$.

Сначала мы опишем один способ продолжения функций с нулевыми мультимоментами.

Лемма 4.1. *Пусть $\psi\in H^s(D^{2\eta})$, где $s>0$; $D^{2\eta}$ — n-мерный открытый шар с центром в начале и радиусом 2η; q — натуральное число. Тогда существует функция ψ^* со следующими свойствами:*

1. $\psi^*\in H^s(R^n)$, $\psi^*(x)\equiv 0$ *для* $|x|>3\eta$;

2. $\psi^*(x)=\psi(x)$ *для* $|x|\leqslant\eta$;

3. $\int\limits_{R^n}\psi^*(x)\,x^{\alpha}\,dx=0\ (|\alpha|\leqslant q)$ *для любого* α, *где* $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ — *мультииндекс*; $|\alpha|=\sum\limits_{l=1}^{n}\alpha_l$.

Доказательство. Пусть $\gamma\in C^{\infty}(R^n)$ такая, что $\gamma\equiv 0$ при $|x|\leqslant\eta$ и $\gamma\equiv 0$ при $|x|\geqslant 3\eta$. Ясно, что (см. [4]) $\varphi\overset{\text{def}}{=}\gamma\psi\in H^s(R^n)$. Рассмотрим пространство основных функций D с носителями в кольце $2\eta\leqslant|x|\leqslant 3\eta$ и сопряженное с ним пространство K. Далее, пусть для $|\alpha|\leqslant q$ $c_{\alpha}\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{R^n}\psi(x)\,x^{\alpha}\,dx$. Мы будем отождествлять функцию f, непрерывную в кольце $D^{3\eta}\setminus\bar{D}^{2\eta}$, с элементом множества

$$K\left(\varphi\to\int f\cdot\varphi\quad(\varphi\in D)\right).$$

Так как система функций $\{x^{\alpha}\}_{|\alpha|<q}$ линейно независимая в K, то найдутся элементы $g_{\beta}\in D$ такие, что $x^{\alpha}(g_{\beta})=\delta^{\alpha,\beta}$. Положим

$$g_0=\sum_{|\alpha|<q}c_{\beta}\,g_{\beta}\quad(g_0\in D),$$

тогда в качестве ψ^* можно брать $\varphi-g_0$. Действительно, во-первых, $\varphi-g_0\in H^s(R^n)$, так как $\varphi\in H^s(R^n)$, а $g_0\in D$; во-вторых, на D^{η} $\varphi-g_0\equiv\psi$ и наконец свойство 3 проверяется непосредственно:

$$\int\limits_{R^n}(\varphi-g_0)(x)\,x^{\alpha}\,dx=\int\limits_{R^n}\varphi(x)\,x^{\alpha}\,dx-\sum_{|\beta|<q}c_{\beta}\,x^{\alpha}(g_{\beta})=c_{\alpha}-c_{\alpha}=0.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем мы сохраним за символом ψ^* тот же смысл, что и в формулировке этой леммы. А теперь переходим к доказательству теоремы 4.1. Функцию U' определим, как регулярное решение уравнения (1.1), для которого $\frac{\partial^{2k} U'(x, 0)}{\partial t^{2k}} = \frac{\partial^{2k} U(x, 0)}{\partial t^{2k}}$ при $x \in D^{\delta}$ (в смысле теоремы 3.3). Разность $W = U - U'$ по „принципу симметрии" с использованием формулы Грина, окажется p-гармонически продолжимой в нижний полушар. Перейдем к точному изложению. Функции

$$\psi_{2k}(x) = \frac{\partial^{2k} U(x, 0)}{\partial t^{2k}} \; (k = 0, 1, \cdots, p-1)$$

принадлежат классу $H^{2p-k-\frac{1}{2}}(D^{\delta})$ (см. теорему о следах). Поэтому их можно продолжить до функций класса $H^{2p-k-\frac{1}{2}}(R^n)$ (см. [5], теорема 9.1). Продолженные функции попрежнему обозначим через ψ_{2k}. Применим лемму 4.1 к каждому из них (с $\eta = 2\delta$) и „исправим" их так, чтобы получить финитные функции $\overset{\bullet}{\psi}_{2k}$ класса $H^{2p-k-\frac{1}{2}}(R^n)$, совпадающие с ψ_{2k} в D^{δ}, и такие, что

$$\int\limits_{R^n} \psi^*(x)\, x^{\alpha}\, dx = 0$$

при любом α с $|\alpha| \leqslant q$. Тогда

$$(1+|\sigma|^2)^p\, |\sigma|^{-2k-\frac{1}{2}}\; \hat{\overset{\bullet}{\psi}}_{2k} \in L^2(R^n) \; (k = 0, 1, \cdots, p-1). \qquad (4.1)$$

В самом деле, функции $\hat{\overset{\bullet}{\psi}}_{2k}$ аналитичны, как преобразования Фурье финитных функций, поэтому

$$[D^{\alpha}\, \hat{\overset{\bullet}{\psi}}_{2k}](0) = \int\limits_{R^n} \overset{\bullet}{\psi}_{2k}(x)\, x^{\alpha}\, dx = 0 \quad (|\alpha| \leqslant q),$$

так что

$$\hat{\overset{\bullet}{\psi}}_{2k}(\sigma) = O\left(|\sigma|^{2p-1}\right)(|\sigma| \to 0). \qquad (4.2)$$

Из (4.2) и из того, что $\overset{\bullet}{\psi}_{2k} \in H^{2p-2k-\frac{1}{2}}(R^n)$ следует (4.1). Положим теперь $v_{2k}(\sigma) = \hat{\overset{\bullet}{\psi}}_{2k}(\sigma)$ $(k = 0, 1, \cdots, p-1)$ и воспользуемся замечанием к теореме 3.2. Это замечание позволяет найти функции $v_k(\sigma)$ $(k = 0, 1, \cdots, 2p-1)$ так, чтобы вектор-финкция $V = \{v_k\}_0^{2p-1}$ удовлетворяла условию теоремы 3.2. По теореме 3.3 существует функция U', являющаяся регулярным решением p-гармонического уравнения в R_+^{n+1} и такая, что

$$\lim_{t\to+0}\left\|\left[\frac{\partial^{2k}U'}{\partial t^{2k}}\right]_t-\dot{u}_{2k}\right\|_{H^{2p-2k-\frac{1}{2}}(R^n)}=0. \tag{4.3}$$

Если $W(x, t)=(U-U')(x, t)$ для $(x, t)\in K_+^\delta$, то во-первых, имеет место утверждение a) теоремы 4.1, но так как U' — функция класса $H^{2p}(R_+^{n+1})$, то $W\in H^{2p}(K_+^\delta)$ и справедливо также утверждение в) нашей теоремы. Осталось доказать утверждение c) о полигармонической продолжимости W через плоский кусок границы K_+^δ (на K_-^δ).

Так как по построению четных данных для решения U' имеем

$$\frac{\partial^{2k}U'(x,0)}{\partial t^{2k}}=\frac{\partial^{2k}U(x,0)}{\partial t^{2k}} \text{ на } D^\delta, \text{ то } \frac{\partial^{2k}W(x,0)}{\partial t^{2k}}\equiv 0$$

на D^δ. Из теоремы о следах следует, что

$$D_x^\alpha\frac{\partial^{2k}W(x,0)}{\partial t^{2k}}\equiv 0 \text{ на } D^\delta \ (|\alpha|\leqslant 2p-2k-1). \tag{4.4}$$

Воспользуемся „полигармонической формулой Грина" (3.3):

$$\int\limits_{K_+^\delta} U\Delta_t^p V-\Delta_t^p U\cdot V=\int\limits_{\partial K_+^\delta}\{E(U, V)-F(U, V)\}, \tag{4.5}$$

где

$$E\overset{\text{def}}{=}\sum_{l=0}^{p-1}\Delta_t^l U\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta^{p-l-1}V);\quad F\overset{\text{def}}{=}\sum_{l=0}^{p-1}\Delta_t^{p-l-1}V\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_t^l U),$$

а функции U и V из класса $H^{2p}(K_+^\delta)$. Положим $U=W(x, t)$ и $V=J_p(x, t;\ x_0, t_0)$ (J_p — фундаментальное решение уравнения $\Delta_t^p U=0$ с полюсом в точке $(x_0, t_0)\in K_+^\delta$).

При $(x_0, t_0)\in K_+^\delta$, учитывая, что $\partial K_+^\delta=D^\delta\cup(\partial K_+^\delta\setminus D^\delta)$, получим

$$W(x_0, t_0)=\sum_{l=0}^{p-1}\int\limits_{D^\delta} J_{l+1}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_t^l W)+\frac{\partial}{\partial t}J_{l+1}(\Delta_t^l W)+Q(x_0, t_0),$$

$$0\equiv\sum_{l=0}^{p-1}\int\limits_{D^\delta} J_{l+1}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_t^l W)-\frac{\partial}{\partial t}J_{l+1}(\Delta_t^l W)+Q(x_0-t_0).$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее равенство, получим

$$W(x, t)=2\sum_{i=0}^{p-1}\int\limits_{|y|<\delta}\frac{\partial}{\partial t}J_{l+1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)W(y, 0)\,dy+\tilde{Q}(x, t)$$

для любого $(x, t)\in K_+^\delta$, где $\tilde{Q}$ — продолжима с сохранением полигармоничности на весь шар K^δ. Далее, все интегралы в правой части последнего равенства равны нулю, так как при любом $i=0, 1,\cdots$ $\cdots, p-1$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)^l W(y,0)=\sum_{k=0}^{l} c_l^k \Delta^{l-k}\frac{\partial^{2k} W(y,0)}{\partial t^{2k}}\equiv 0 \text{ на } D^\delta,$$

в силу равенства (4.4). Итак, $W(x, t) = \bar{Q}(x, t)$ для $(x, t) \in K_-^\delta$ и утверждение с) теоремы 4.1 также доказано. Тем самым, теорема 4.1 полностью доказана.

А теперь переходим к формулировке основного результата этого параграфа.

2°. Пусть $\{T; S\}$ — какое-нибудь разбиение множества $\{0, 1, \cdots, 2p-1\}$ на два p-элементных подмножества. Положим $T = T_1 \cup T_2$; $S = S_1 \cup S_2$, где T_1, T_2, S_1, S_2 определяются следующим образом:

если $j \in T_1$, то $j = 2j'-1$, а если $j \in T_2$, то $j = 2j'$;

если $s \in S_1$, то $s = 2s'-1$, а если $s \in S_2$, то $s = 2s'$.

Теорема 4.2. *Пусть $U \in H^{2p}(K_+^\delta)$ — полигармоническая функция. По определению положим*

$$u_k(x) = \frac{\partial^k U(x,0)}{\partial t^k} \quad (k=0, 1, \cdots, 2p-1).$$

Существуют семейство функции w^j $(j \in T)$ и вещественная матрица $H = (h_{sj})$ $(s \in S,\ j \in T)$ такие, что для $x \in D^\delta$ имеем:

1. $$\left[\Delta^{p-s'} u_s - \sum_{j\in T_1} h_{sj}\Delta^{p-j'} u_j\right](x)=\sum_{j\in T_2} h_{sj}\Delta^{p-j'}\times$$
$$\times\left[\int\limits_{|y|<\delta}\frac{u_j(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}+w^j(x)\right] \quad (s\in S_1),$$

2. $$\left[\Delta^{p-s'} u_s - \sum_{j\in T_2} h_{sj}\Delta^{p-j'} u_j\right](x)=\sum_{j\in T_1} h_{sj}\Delta^{p-j'+1}\times$$
$$\times\left[\int\limits_{|y|<\delta}\frac{u_j(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}+w^j(x)\right] \quad (s\in S_2),$$

3. *w^j $(j \in T)$ — вещественно-аналитическая в D^δ,*
4. *все миноры матрицы H обратимы.*

Доказательство. Пусть функция u принадлежит $H^{2p}(K_+^\delta)$. Пользуясь теоремой 4.1, представим ее в виде $U = U' + W$, где U' — регулярное решение уравнения $\Delta_t^p U = 0$ в R_+^{n+1}, а W — полигармоническая функция класса $H^{2p}(K^\delta)$. Из регулярности U' следует, что производные этой функции по t на R^n связаны соотношениями (2.3) теоремы 2.1. Обозначим через v_k' преобразование Фурье функции $u_k'(x) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial^k U'(x,0)}{\partial t^k}$, перепишем уравнения (2.3) в следующем виде:

$$1)^{*}\ |\sigma|^{-2s'}\,v_s'(\sigma)=\sum_{j\in T_2}h_{sj}\,|\sigma|^{-2j'}\,\frac{v_j'(\sigma)}{|\sigma|}+\sum_{j\in T_1}h_{sj}\,|\sigma|^{-2j'}\,v_j'(\sigma)\ (s\in S_1),$$

$$2)^{*}\ |\sigma|^{-2s'}\,v_s'(\sigma)=\sum_{j\in T_2}h_{sj}\,|\sigma|^{-2j'}\,v_j'(\sigma)+\sum_{j\in T_1}h_{sj}\,|\sigma|^{-2(j'-1)}\,\frac{v_j'(\sigma)}{|\sigma|}.$$

Умножая эти соотношения на $|\sigma|^{2p}$ и производя обратное преобразование Фурье, получим

$$1)\ \Delta^{p-s'}u_s'(x)-\sum_{j\in T_1}h_{sj}\,\Delta^{p-j'}u_j'(x)=\sum_{j\in T_2}h_{sj}\,\Delta^{p-j'}\int\limits_{R^n}\frac{u_j'(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}\ (s\in S_1),$$

$$2)\ \Delta^{p-s'}u_s'(x)-\sum_{j\in T_2}h_{sj}\,\Delta^{p-j'}u_j'(x)=\sum_{j\in T_1}h_{sj}\,\Delta^{p-j'+1}\int\limits_{R^n}\frac{u_j'(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}\ (s\in S_2).$$

Эти равенства можно обосновать так. Функции $|\sigma|^{-1}v_j'(\sigma)$, как это видно из доказательства теоремы 4.1 § 4, можно считать принадлежащими $L^2(R^n)$. Если бы функции u_j' принадлежали классу $S(R^n)$ быстро убывающих бесконечно-дифференцируемых функц ий, то преобразование Фурье функций

$$x\to\int\limits_{R^n}\frac{u_j'(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}\ (x\in R^n),\ (j\in T)$$

совпало бы с $|\sigma|^{-1}v_j'(\sigma)$ (см. [5], стр. 138).

Включения $v_j'\in L^2(R^n)$, $|\sigma|^{-1}v_j'\in L^2(R^n)$ позволяют применить этот результат и к нашим функциям u_j'. Из того, что $U'(x,t)=$ $=U(x,t)-W(x,t)$ при $(x,t)\in K_+^\delta$, следуют равенства

$$u_k'(x)=u_k(x)-w_k(x)\ (x\in D^\delta,\ k=0,1,\cdots,2p-1).$$

При $x\in D^\delta$ соотношения связи 1) и 2) преобразуем следующим образом:

$$\sum_{j\in T_1}h_{sj}\,\Delta^{p-j'}u_j'=\sum_{j\in T_1}h_{sj}\,\Delta^{p-j'}(u_j-w_j)=\sum_{j\in T_1}h_{sj}\,\Delta^{p-j'}u_j+\tilde{Q}_s,$$

где $\tilde{Q}_s\ (s\in S)$ вещественно-аналитичны;

$$\int\limits_{R^n}\frac{u_j'(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}=\int\limits_{R^n\setminus D^\delta}\frac{u_j'(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}+\int\limits_{D^\delta}\frac{u_j(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}-$$

$$-\int\limits_{D^\delta}\frac{w_j(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}=\int\limits_{D^\delta}\frac{u_j(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}+\tilde{Q}_j(x),$$

где $\tilde{Q}_j$ также вещественно-аналитичны, так как $\int\limits_{D^\delta}\frac{w_j(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}$ — такая функция по теореме Леви (см. [8], стр. 61), а $\int\limits_{R^n \setminus D^\delta} \frac{u_j'(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}$ аналитична в D^δ очевидным образом.

Остальные выражения в 1) и 2) преобразуются таким же образом. Для завершения доказательства теоремы 4.2 остается определить $w^j(x)$ $(j \in T,\ x \in D^\delta)$ из следующей системы уравнений:

$$\sum_{j \in T_1} h_j\ \Delta^{p-j'}\ w^j(x) = Q_s(x) \quad (s \in S_1,\ x \in D^\delta),$$

$$\sum_{j \in T_2} h_{sj}\, \Delta^{p-j'+1}\ w^j(x) = Q_s(x) \quad (s \in S_2,\ x \in D^\delta).$$

Здесь Q_s $(s \in S)$ — некоторые аналитические функции, получающиеся после описанных выше преобразований.

Эта система уравнений разрешима относительно $\Delta^{p-j'}\ w^j(x)$, когда $j \in T_2$ и $\Delta^{p-j'+1}\ w^j(x)$, когда $j \in T_1$, так как матрица (h_{sj}) $(s \in S_1,\ j \in T_2)$ и матрица (h_{sj}) $(s \in S_2,\ j \in T_1)$ обратимы по утверждению 2 теоремы 2.1.

Остается решить следующие неоднородные полигармонические уравнения:

$$\Delta^{p-j'}\ w^j(x) = f_{2j'}(x) \quad \text{и} \quad \Delta^{p-j'+1}\ w^j(x) = f_{2j'-1}(x)$$

с аналитическими в D^δ правыми частями. Аналитичность решений этих уравнений в D^δ может быть непосредственно выведена из аналитичности фундаментального решения и уже упомянутой теоремы Леви.

§ 5. Слабый асимптотический ряд для обобщенной функции

1°. Некоторые локальные оценки обобщенных функций.

Определение 5.1. Пусть N — целое число. Будем говорить, что набор $\{\varphi_\rho\}$ $(\rho > 0)$ функций класса $C^\infty(R^n)$ образует N-семейство, если

1. $\operatorname{supp}(\varphi_\rho) \subset \{x \in R^n \mid \rho \leqslant |x| \leqslant 3\rho\}$, при любом $\rho > 0$

и

2. $[D^\alpha \varphi_\rho](x) = O(\rho^{N-|\alpha|})$ $(x \in R^n)$ для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. Заметим, что $\{D^\alpha \varphi_\rho\}$ $(\rho > 0)$ есть $N + |\alpha|$-семейство, если $\{\varphi_\rho\}$ $(\rho > 0)$ есть N-семейство.

Определение 5.2. Пусть T — обобщенная функция в $R^n \setminus \{0\}$ (в смысле Шварца). Будем писать

$$T(x) = O(|x|^{N+1}) \quad (|x| \to 0), \text{ если}$$

$$\frac{1}{\rho^n} < T,\ \varphi_\rho > = O(\rho) \quad (\rho \to 0) \text{ каково бы ни было } N\text{-семейство } \{\varphi_\rho\}.$$

Это определение согласуется с обычным пониманием символа O, как показывает следующее простое предложение.

Лемма 5.1. *Если f-функция, непрерывная в $R^n\setminus\{0\}$ и*

1. $\max\limits_{\rho<|x|<3\rho} |f(x)| = O(\rho^{N+1})\ (\rho\to 0)$,

или если функция f — локально-суммируема в $R^n\setminus\{0\}$ и

2. $$\frac{1}{\rho^n}\int\limits_{\rho<|x|<3\rho} |f|(x)\,dx = O(\rho^{N+1})\ (\rho\to 0),$$

то $f(x) = O(|x|^{N+1})\ (|x|\to 0)$ в смысле определения 5.2.

Для доказательства леммы 5.1 нужно воспользоваться утверждением 2 определения 5.1 лишь при $|\alpha|=0$. Однако доказательство следующего утверждения использует 2 в полном объеме.

Лемма 5.2. *Если T—обобщенная функция в $R^n\setminus\{0\}$ и*

$$T(x) = O(|x|^{N+1}),\ \text{то}\ [D^\alpha T](x) = O(|x|^{N-|\alpha|+1})\ (|x|\to 0),$$

каков бы ни был мультииндекс α.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_\rho\}$ — какое-нибудь $N-|\alpha|$-семейство. Тогда

$$\frac{1}{\rho^n}\langle D^\alpha T, \varphi_\rho\rangle = \frac{1}{\rho^n}\langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi_\rho\rangle = O(\rho),$$

так как $\{D^\alpha \varphi_\rho\}$ есть N-семейство. Доказательство закончено.

2°. Мы здесь рассмотрим асимптотические разложения специального вида, нужные нам для дальнейшего. Можно было бы распространить вводимые в этом пункте понятия и на ряды более общего вида.

Определение 5.3. Пусть T— обобщенная функция в $R^n/\{0\}$, $\left\{c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)\right\}$ $(k=-q, -q+1,\cdots)$ — последовательность функций класса $C^\infty(R^n)$. Предположим, что при любом $N=-q, -q+1,\cdots$

$$T(x) - \sum_{k=-q}^{N} |x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right) = O(|x|^{N+1})\ (|x|\to 0)$$

в смысле определения 5.2. Тогда мы будем говорить, что

$$\sum_{k=-q}^{\infty} |x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

есть слабый асимптотический ряд функции T вблизи нуля.

Следующая лемма показывает, что слабые асимптотические ряды можно дифференцировать почленно.

Лемма 5.3. *Пусть* $\sum\limits_{k=-q}^{\infty} |x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$ *— слабый асимптотиче-*

ский ряд обобщенной функции T вблизи нуля; α — мультииндекс. Тогда $\sum\limits_{k=-q}^{\infty} D^{\alpha}\left[|x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)\right]$ есть слабый асимптотический ряд для $D^{\alpha} T$ вблизи нуля, точнее:

$$1.\ D^{\alpha}\left[|x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)\right] = |x|^{k-|\alpha|}\,\tilde{c}_{k-|\alpha|}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

где $\{\tilde{c}_p\}_{p=-|\alpha|}^{\infty}$ — некоторая последовательность функций класса $C^{\infty}(S^{n-1})$ для $p = -q-|\alpha|, -q-|\alpha|+1, \cdots$ и

$$2.\ \frac{1}{\rho^n}\left\langle D^{\alpha} T - \sum_{k=-q-|\alpha|}^{N} |x|^k \tilde{c}_k\left(\frac{x}{|x|}\right),\ \varphi_\rho\right\rangle = O(\rho),$$

каковы бы не были $N = -q-|\alpha|, \cdots$ и N-семейство $\{\varphi_\rho\}$.

Доказательство. Существование функций $\tilde{c}_p$ следует из того, что производная порядка $|\alpha|$ от однородной функции порядка k есть однородная функция порядка $k-|\alpha|$. Пункт 2 есть непосредственное следствие леммы 5.2.

3°. Теорема единственности для слабых асимптотических рядов. Начнем с явного указания некоторого конкретного N-семейства. Положим

$$\varphi_\rho(|x|) = k\exp\left\{-\frac{\rho^2}{\rho^2-(|x|-2\rho)^2}\right\} \text{ при } \big||x|-2\rho\big| < \rho \text{ и}$$

$$\varphi_\rho(|x|) \equiv 0 \text{ при } \big||x|-2\rho\big| \geqslant \rho, \quad \text{где}$$

$$k^{-1} = \int_1^3 t^{n-1}\exp\left\{-\frac{1}{1-(t-2)^2}\right\} dt.$$

Ясно, что $\varphi_\rho \in C^{\infty}(R^n)$ $(\rho > 0)$ и

a) $\operatorname{supp}(\varphi_\rho) \subset \{x \in R^n \mid \rho \leqslant |x| \leqslant 3\rho\}$,

в) $\frac{1}{\rho^n}\int\limits_0^{\infty} \varphi_\rho(r)\, r^{n-1} dr = 1$ для любого $\rho > 0$,

c) $[D^{\alpha}\varphi_\rho](x) = O(\rho^{-|\alpha|})$ (см. [7], стр. 55).

Определение 5.4. Пусть E — относительное открытое подмножество сферы S^{n-1}. Обозначим через χ_E произвольную функцию класса $C^{\infty}(S^{n-1})$, компактный носитель которой содержится в E.

Теорема 5.1. *Пусть $\sum\limits_{k=-q}^{\infty} |x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$ — слабый асимптотический ряд обобщенной функции T вблизи нуля. Предположим, что $T(x)$ быстро стремится к нулю при $|x| \to 0$ вдоль конуса с основанием E и вершиной в точке $x = 0$. Точнее*

$$\chi_E\left(\frac{x}{|x|}\right) T(x) = O\left(|x|^{N+1}\right) \quad \text{при любом } N = 0,\ 1, \cdots,$$

и для любой функции χ_E, *описанной в определении* 5.4.

Тогда $c_k\left(\frac{x}{|x|}\right) \equiv 0$ *для* $\frac{x}{|x|} \in E$ $(k = -q, -q+1, \cdots)$.

Доказательство. Пусть Y — какая-нибудь сферическая функция. Положим

$$\varphi^*_{\rho, N}(x) = \frac{\varphi_\rho(|x|)}{|x|^N}\, Y\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Легко проверяется, что $\{\varphi^*_{\rho, N}\}$ есть N-семейство в смысле определения 5.1. Доказательство теоремы проведем по индукции относительно N. При $N = -q$ имеем

$$\frac{1}{\rho^n} < T - |x|^{-q}\, c_{-q}\left(\frac{x}{|x|}\right),\ \chi_E\, \varphi^*_{\rho, -q} > = O(\rho)$$

(мы воспользовались тем, что $\{\chi_E\, \varphi^*_{\rho, N}\}$ — также N-семейство); далее

$$\frac{1}{\rho^n}\int\limits_{R^n} c_{-q}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-q}\, \frac{\varphi_\rho(|x|)}{|x|^{-q}}\, Y\left(\frac{x}{|x|}\right) \chi_E\left(\frac{x}{|x|}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\rho^n} < T,\ \chi_E\, \varphi^*_{\rho, -q} > + O(\rho).$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\rho^n} < T,\ \chi_E\, \varphi^*_{\rho, -q} > = O(\rho),$$

запишем последний интеграл как повторный

$$\frac{1}{\rho^n}\int\limits_0^\infty \varphi_\rho(r)\, r^{n-1}\, dr \int\limits_{S^{n-1}} \chi_E(\omega)\, c_{-q}(\omega)\, Y(\omega)\, d\omega_{n-1} = O(\rho)$$

$\left(r = |x|,\ \omega = \frac{x}{|x|};\ d\omega_{n-1}\right.$ — естественная мера на $\left.S^{n-1}\right)$. Из свойства в) функций $r \to \varphi_\rho(r)$ следует, что

$$\int\limits_{S^{n-1}} Y(\omega)\, [\chi_E\, c_{-q}](\omega)\, d\omega_{n-1} = 0.$$

Произвол в выборе функций χ_E и Y позволяет заключить, что $c_{-q}(\omega) = 0$ при любом $\omega \in E$. Индукционный переход обосновывается аналогично. Если известно, что

$$c_{-q}(\omega) = c_{-q+1}(\omega) = \cdots = c_{N-1}(\omega) = 0 \text{ на } E, \text{ то}$$

$$\frac{1}{\rho^n} < T - |x|^N\, c_N\left(\frac{x}{|x|}\right),\ \chi_E\, \varphi^*_{\rho, N} > = O(\rho),$$

и так как по условию теоремы

$$\frac{1}{\rho^n} < T, \chi_E \varphi^*_{\rho, \Lambda} > = O(\rho),$$

то рассуждая также как выше, заключаем, что $c_N(\omega) = 0$ $(\omega \in E)$. Теорема доказана.

§ 6. Доказательство основной теоремы

1°. Однородные решения полигармонических уравнений.

Лемма 6.1. *Пусть m, s — натуральные числа, $m > 2s$. Пусть далее функция c_m принадлежит классу $C^\infty(S^{n-1})$. Если*

$$\Delta^s \left[|x|^m c_m \left(\frac{x}{|x|} \right) \right] = 0 \quad \text{для} \quad x \in R^n, \text{ то}$$

$$c_m(\omega) = \sum_{k=0}^{s} Y_{m-2s}(\omega) \quad (\omega \in S^{n-1}),$$

где Y_j — n-мерная сферическая функция порядка j.

Доказательство. По теореме Альманзи всякое решение U уравнения $\Delta^s U = 0$ в R^n представимо в виде

$$U(x) = \sum_{k=0}^{s} |x|^{2k} U_k(x) \quad (x \in R^n),$$

где U_k — функция, гармоническая в R^n (см. [6], стр. 531). Поэтому для функции c_m, удовлетворяющей условию леммы, справедливо следующее представление:

$$|x|^m c_m \left(\frac{x}{|x|} \right) = \sum_{k=0}^{s} |x|^{2k} U_k(x),$$

где все функции U_k гармонические в R^n, следовательно

$$U_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} |x|^l Y_l^k(\omega) \left(x \in R^n, \omega = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1} \right),$$

где Y^k — n-мерная сферическая функция порядка l. Значит при каждом $\omega \in S^{n-1}$

$$|x|^m c_m \left(\frac{x}{|x|} \right) = \sum_{k=0}^{s} |x|^{2k} \sum_{l=0}^{\infty} |x|^l Y_l^k(\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{s} |x|^{l+2k} \times$$

$$\times Y_l^k(\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} |x|^l \sum_{k:\, l-2k \geq 0} Y_l^n(\omega).$$

Следовательно,

$$c_m(\omega) = \sum_{k:\ m-2k>0}^{s} Y_{m-2k}(\omega).$$

Лемма доказана.

2°. Теорема единственности для псевдопотенциалов Ньютона.

В этом пункте мы докажем теорему единственности для потенциалов Ньютона в D^η, близкую по духу к теореме 1 статьи [1]. Наше доказательство будет использовать некоторые факты, полученные в [1].

Теорема 6.1. *Пусть $f \in L^1(R^n)$, w — функция вещественно-аналитическая в замкнутом круге $\overline{D}^\eta$; E — относительно открытое подмножество сферы S^{n-1}; v — правильная мажоранта такая, что $\int_0 \log v(t)\,dt = -\infty$; s — натуральное число;*

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{:=} \Delta^s \left\{ \int_{|y|<\eta} \frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}} + w(x) \right\} (x \in R^n).$$

Если

1. $\int_{|y|<\rho} |f|(y)\,dy \leqslant v(\rho) \quad (0<\rho<\eta)$,

2. $\left[\chi_E\left(\frac{x}{|x|}\right)\Phi(x) \right] = O(|x|^{N+1}) \quad (|x| \to 0,\ N = 0, 1, \cdots)$

для любой функции χ_E, описанной в определении 5.4, то существует $\eta' < \eta$ такое, что $f(y) = 0$ при почти всех $y \in D^{\eta'}$, а

$$\operatorname{supp}(\Phi) \subset \{x \in R^n | \eta' \leqslant |x|\}.$$

(Определение правильной мажоранты см. в п. 1° § 1).

Доказательство. Из условия 1 теоремы 6.1 следует, что

$$\frac{1}{\rho^n} \int_{|x|<\rho} \left| \int_{|y|<\eta} \frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}} - \sum_{m=0}^{N} |x|^m c_m\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| dx = O(\rho^{N+1}) \tag{6.1}$$

для $N = 0, 1, 2, \cdots$, где

$$c_m\left(\frac{x}{|x|}\right) = \int_{|y|<\eta} \frac{P_m^{(n+1)}(\cos(x, y))}{|y|^{m+n-1}} f(y)\,dy, \tag{6.2}$$

а $P_m^{(n+1)}$ — многочлены Гегенбауера. Вывод этого соотношения дан в работе [1] (см. § 5, лемма 1). Из аналитичности функций w в шаре $\overline{D}^\eta$ следует существование последовательности $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ функций, вещественно-аналитических на S^{n-1} и числа $\eta' < \eta$ таких, что

$$w(x) = \sum_{m=0}^{\infty} |x|^m w_k\left(\frac{x}{|x|}\right) \tag{6.3}$$

равномерно в $D^{\eta'}$ и

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,[\max_{\omega\in S^{n-1}}|w_k(\omega)|]^{1/k}\leqslant\frac{1}{\eta'}\quad(\eta'>0). \tag{6.4}$$

Сумму $\int\limits_{|y|<\eta}\frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}+w(x)$ обозначим через $T(x)$. Из определения слабого асимптотического ряда (см. леммы 5.1 и 5.2) следует, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Delta^s\left\{|x|^m\,(c_m+w_m)\left(\frac{x}{|x|}\right)\right\}$$

есть слабый асимптотический ряд для функции $\Phi=\Delta^s\,T$ вблизи нуля. По лемме этот ряд имеет вид

$$\sum_{m=-2s}^{\infty}|x|^m\,\tilde{a}_m\left(\frac{x}{|x|}\right)(a_m=c_m+w_m\ \text{на}\ S^{n-1}).$$

Из теоремы единственности слабо асимптотических рядов 5.1 и из условия быстрого стремления к нулю функции Φ вдоль множества E следует, что

$$\tilde{a}_m(\omega)=0\ \text{при любом}\ \omega\in E\ \text{и}\ m>-2s.$$

Функции $\tilde{a}_m$, очевидно, вещественно-аналитичны на сфере S^{n-1}, так как таковы и c_m и w_m. Поэтому $\tilde{a}_m(\omega)=0$ при любом $\omega\in S^{n-1}$ и $m>-2s$, значит, $\Delta^s\left[|x|^{m+2s}\,a_{m+2s}\left(\frac{x}{|x|}\right)\right]=0$ (см. лемму 5.3) при любом $x\in R^n$. По лемме 6.1

$$a_m(\omega)=\sum_{k=0}^{s}Y_{m-2k}(\omega)\ (m\geqslant 2s;\ \omega\in S^{n-1}),$$

где Y_j — n-мерная сферическая функция порядка j, то есть

$$c_m(\omega)=w_m(\omega)+\sum_{k=0}^{s}Y_{m-2k}(\omega).$$

Умножим последнее тождество на какую-нибудь n-мерную сферическую функцию Y и проинтегрируем по S^{n-1} относительно естественной меры $d\omega_{n-1}$. При достаточно большом m: $m>M(Y)$ получим

$$d_m(Y)\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_{S^{n-1}}c_m(\omega)\,Y(\omega)\,d\omega_{n-1}=\int\limits_{S^{n-1}}w_m(\omega)\,Y(\omega)\,d\omega_{n-1},$$

так как функция Y ортогональна $\sum\limits_{k=0}^{s}Y_{m-2k}$, если m достаточно велико. Из только что полученного равенства и из оценки (6.4) для w_m получаем такую же оценку для $d_m(Y)$. А именно

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\,[d_m(Y)]^{1/m} \leqslant \frac{1}{\eta'}.$$

Повторяя рассуждения, проведенные на стр. 91 и 92 статьи [1], мы выводим теперь из этой оценки, что $f(y)=0$ при почти всех $y \in D^{\eta'}$. А это означает, что Φ—аналитическая в $D^{\eta'}$, следовательно $\Phi \equiv 0$ в $D^{\eta'}$.

Теорема доказана.

3°. Доказательство теоремы В. (формулировка этой теоремы была дана в п. 1°, § 1).

Если $U(x, t)$—решение p-гармонического уравнения в полушаре K_+^δ, принадлежащее классу $H^{2p}(K_+^\delta)$, то по теореме 4.1 данные u_s $(s \in S)$ выражаются через данные u_j $(j \in T)$ на D^δ следующими равенствами:

$$\Phi_s(x) = \sum_{j\in T_1} h_{sj}\, \Delta^{n_j}\left[\int\limits_{|y|<\delta} \frac{u_j(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}} + w^j(x)\right] \quad (s \in S_2), \tag{6.5}$$

$$\Phi_s(x) = \sum_{j\in T_2} h_{sj}\, \Delta^{n_j}\left[\int\limits_{|y|<\delta} \frac{u_j(y)\,dy}{(x-y)^{n-1}} + w^j(x)\right] \quad (s \in S_1), \tag{6.6}$$

где $n_j = p - \dfrac{j}{2}$, когда $j \in T_2$ и $n_j = p - \dfrac{j+1}{2}$, когда $j \in T_1$,

$$\text{а}\quad \Phi_s(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^s u_s(x) - \sum_{j\in T} \tilde{h}_{sj}\, \Delta^{n_j} u_j(x). \tag{6.7}$$

Из условий 1 и 2 теоремы В, применяя леммы 5.1 и 5.2, получим (в смысле определения 5.2) из (6.7)

$$\chi_{E_s}\left(\frac{x}{|x|}\right) \Phi_s(x) = O\left(|x|^{N+1}\right) \quad (s \in S),\ N = 0, 1, \cdots. \tag{6.8}$$

Далее, пусть

$$\sum_{m=0}^{\infty} |x|^m\, c_m^j\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad (j \in T),$$

где

$$c_m^j\left(\frac{x}{|x|}\right) = \int\limits_{|y|<\eta} \frac{P_m^{(n+1)}(\cos(x, y))}{|y|^{m+n-1}}\, u_j(y)\,dy,$$

асимптотический ряд функции u_j $(j \in T)$ вблизи нуля. Ясно, что (см. (6.5))

$$\sum_{m=0}^{\infty} |x|^m \left[\sum_{j\in T_1} h_{sj}\, \tilde{a}_m^j\left(\frac{x}{|x|}\right)\right],$$

где

$$a^j_m(\omega) = c^j_m(\omega) + w^j_m(\omega) \quad (\omega \in S^{n-1},\ j \in T) \tag{6.9}$$

(по поводу перехода от a к $\tilde{a}$ см. лемму 5.3), является слабым асимптотическим рядом для обобщенной функции Φ_s $(s \in S_2)$. Применяя теорему 5.1 для каждого $s \in S_2$ при условии (6.8) к ряду (6.9), получим

$$\sum_{j \in T_1} h_{sj}\, \tilde{a}^j_m(\omega) = 0 \quad (\omega \in E_s;\ s \in S_2;\ m = 0, 1, \cdots). \tag{6.10}$$

Из аналитичности функции a^j_m (см. (6.9), (6.2)) следует, что последнее равенство сохраняется при всех $\omega \in S^{n-1}$. Так как матрица (h_{sj}) $(s \in S_2,\ j \in T_1)$ обратима по теореме 4.1 (см. утверждение 3), то $\tilde{a}^j_m(\omega) = 0$ для $\omega \in S^{n-1}$ $(j \in T_1,\ m = 0, 1, \cdots)$. Аналогично, из соотношения (6.6) получаем: $\tilde{a}^j_m(\omega) = 0$ для $\omega \in S^{n-1}$ $(j \in T_2,\ m = 0, 1, \cdots)$. Так что для всех $j \in T$ имеем

$$\tilde{a}^j_m(\omega) = 0 \quad (\omega \in S^{n-1},\ m = 0, 1, \cdots).$$

По лемме 6.1 для каждого $j \in T$ получаем

$$a^j_m(\omega) \overset{\text{def}}{=} (c^j_m + w^j_m)(\omega) = [Y^j_m + Y_{m+2} + Y_{m+4} + \cdots$$
$$\cdots + Y_{m+2n_j}](\omega) \quad (m \geqslant -2_{n_j}),$$

где Y^j_k — n-мерные сферические функции, соответствующие индексу j. Далее, как это показывает ход доказательства теоремы 6.1, можем утверждать, что существуют числа η_j, где $0 < \eta_j < \delta$, такие, что

$$u_j(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^j U(x, 0)}{\partial t^j} \equiv 0 \ \text{для} \ x \in D^{\eta_j} \ \text{и} \ j \in T.$$

А теперь вернемся к утверждениям (6.5) и (6.6). Они показывают, что $\Delta^{n_s} U_s$ $(s \in S)$ — аналитическая в окрестности нуля (точнее в D^{η}, где $\eta \overset{\text{def}}{=} \min_{j \in T} \eta_j$). Поэтому и все функции u_s $(s \in S)$ аналитичны в окрестности начала. Из условия 1 теоремы B легко заключить, например, применяя теорему единственности 5.1 к степенному разложению функций u_s в окрестности нуля, что $u_s(x) \equiv 0$ в окрестности нуля. Итак, все функции u_k для $k = 0, 1, \cdots, 2p-1$ обращаются в нуль в окрестности начала. Следовательно, в силу „грубой теоремы единственности“ (теорема 2, § 3), функция U тождественно равна нулю в K^δ_+.

Доказательство закончено.

§ 7. Обсуждение вопроса о точности теоремы А

1°. В этом пункте мы покажем, что условие расходимости интеграла $\int\limits_0 \log v(t)\, dt$, участвующее в формулировке теоремы А, не может быть отброшено. Более того, справедлива следующая

Теорема 7.1. *Пусть q—натуральное число, v—такая правильная мажоранта, что функция—$\log v$ возрастает на полуоси $(-\infty, 0)$ вместе со всеми своими производными до порядка q (мы считаем, что v — четная функция), и*

$$\int\limits_0 \log v(t)\, dt > -\infty.$$

Тогда существует гармоническая функция класса $C^q(R^2_+)$ такая что

$$1.\ \left|\frac{\partial^m U}{\partial y^m}\right|(x, 0) \leqslant v(x)\ (x \in R,\ m=0, 1, \cdots, q-1), \tag{7.1}$$

$$2.\ U(x, y) \not\equiv 0 \text{ в } R^2_+.$$

Для построения такой функции U докажем следующую лемму.

Лемма 7.1. *Пусть q — натуральное число, $\psi > 0$ — четная функция класса $C^\infty(R \setminus \{0\})$, возрастающая на полуоси $(-\infty, 0)$ вместе со своими производными до порядка q, и пусть*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx < +\infty.$$

Тогда, если

$$F(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x)\, dx}{x - z}\quad (\operatorname{Im} z > 0),$$

то при любом $m = 0, 1, \cdots, q-1$ функции

$$F^{(m)}(z) = \frac{m!}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x)\, dx}{(x - z)^{m+1}}$$

непрерывно продолжимы на множество $R \setminus \{0\}$ и при $t \in R$; $t \neq 0$; $m = 0, 1, \cdots, q-1$ $|F^{(m)}(t)| \leqslant \frac{c_m}{|t|^{m+1}}$ для некоторых c_m.

Доказательство. Пусть $z = t + iy$ $(t \in R \setminus \{0\},\ y > 0)$. Имеем.

$$F^{(m)}(z) = \frac{m!}{\pi i}\left[J_1\left(-\infty, \frac{t}{2}\right) + J_2\left(\frac{t}{2}, \frac{3}{2}t\right) + J_3\left(\frac{3}{2}t, +\infty\right)\right],$$

где

$$J_k(a,\,b) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{m+1}} \quad (k=1,\,2,\,3).$$

Интегралы J_1 и J_3 оцениваются сразу, так как при $x \in \left(-\infty,\, \frac{t}{2}\right)$ или $x \in \left(\frac{3}{2}t,\, +\infty\right)$ имеем $|x-z| \geqslant \frac{t}{2}$, следовательно

$$|J_{1\cdot 3}| \leqslant 2^{m+1}\frac{1}{|t|^{m+1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \frac{c_m^{1,3}}{|t|^{m+1}} \quad (t \neq 0). \tag{7.2}$$

Чтобы оценить J_2, представим его в следующем виде:

$$J_2 = \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3}{2}t} \left[\sum_{k=0}^{m}\frac{\psi^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{\psi^{(m+1)}\,(\tilde{t}(x))}{(m+1)!}(x-t)^{m+1}\right]\frac{dx}{(x-z)^{m+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{\psi^{(k)}(t)}{k!}\int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3}{2}t}\frac{(x-t)^k}{(x-z)^{m+1}}\,dx + \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3}{2}t}\left(\frac{x-t}{x-z}\right)^{m+1}\frac{\psi^{(m+1)}(\tilde{t}(x))}{(m+1)!}\,dx =$$

$$\overset{\text{def}}{=} J_2' + J_2''\left(t = \tilde{t}(x) \in \left(\frac{t}{2},\, \frac{3}{2}t\right),\ \text{когда}\ x \in \left(\frac{t}{2},\, \frac{3}{2}t\right)\right).$$

Нетрудно установить интегрированием по частям, что из монотонности $\psi^{(s)}$ и конечности интеграла $\int\limits_0^\infty \psi(x)\,dx$, следует оценка

$$\psi^{(s)}(t) = o\left(\frac{1}{|t|^{s+1}}\right) \quad (s=0,\,1,\cdots,\,q). \tag{7.3}$$

Далее, так как $\left|\frac{x-t}{x-z}\right| \leqslant 1$ при $z = t+iy$, то для J_2'' имеем

$$|J_2''| \leqslant \frac{|t|}{(m+1)!}\left|\psi^{(m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)\right| \leqslant \frac{c_m'}{|t|^{m+1}} \tag{7.4}$$

см. (7.3).

В оценке (7.4) мы учитывали монотонность $\psi^{(m+1)}$. Для того чтобы оценить J_2', сначала вычислим следующий предел:

$$\lim_{(y\to 0)} \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3}{2}t} \frac{(x-t)^k}{(x-z)^{m+1}}\, dx \overset{\text{def}}{=} a_k \quad (z = t + iy). \tag{7.5}$$

Имеем,

$$(x-t)^k = \sum_{s=0}^{k} C_k^s (x-z)^{k-s} (z-t)^s.$$

Следовательно, при $z = t + iy$ и $k < m$,

$$a_k = \lim_{y\to 0} \sum_{s=0}^{k} C_k^s (z-t)^s \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3}{2}t} \frac{dx}{(x-z)^{m-k+s+1}} = \lim_{y\to 0} \sum_{s=0}^{k} \frac{C_k^s (iy)^s}{-m+k-s} \times$$

$$\times \frac{1}{(x-z)^{m-k+s}} \Bigg|_{x=\frac{t}{2}}^{x=\frac{3}{2}t} = \sum_{s=1}^{k} + \sum_{s=0}^{0} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{k-m} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\left(\frac{3}{2}t - z\right)^{m-k}} - \frac{1}{\left(\frac{t}{2} - z\right)^{m-k}} \right] = \frac{c_{m,k}}{|t|^{m-k}}$$

(при $s > 0$ множитель $(iy)^s$ обеспечивает бесконечную малость s-го слагаемого).

Если $k = m$, то нужно воспользоваться тем, что

$$\lim_{y\to 0} \ln \left| \frac{\frac{3}{2}t - z}{\frac{t}{2} - z} \right| = 0, \quad \text{при } z = t + iy.$$

Следовательно

$$|J_2| < \sum_{k=0}^{m} \frac{|a_k|}{k!} |\psi^{(k)}(t)| \leqslant \frac{\bar{c}_m}{|t|^{m+1}}$$

(см. (7.3), (7.6). Собирая полученные оценки для $J_{1.3}$; J_2'; J_2, получим:

$$|\lim_{y\to 0} F^{(m)}(z)| = |F^{(m)}|(t) \leqslant \frac{c_m}{|t|^{m+1}} \quad (t \in R \setminus \{0\}).$$

(Существование этого предела следует из хорошо известных свойств интеграла типа Коши).

Доказательство теоремы 7.1.

Пусть $\psi(x) = -\log \bar{v}(x)$, где $\bar{v}(x) = \tilde{c}_N |x|^N v(x)$; $\tilde{c}_N$ — достаточно большая константа; $N > N(q)$ — достаточно большое натуральное число. Положим

$$Q(z)=\exp\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(x)\,dx}{x-z}\right\}\ (I_m\, z>0) \tag{7.7}$$

и докажем, что Reel $Q(z)$ или $I_m\, Q(z)$ удовлетворяют утверждениям 1 и 2 теоремы 7.1.

Итак, при любом $m=0, 1,\cdots, q-1$ функция $Q^{(m)}(z)$ имеет вид $Q(z)\cdot H_m(z)$, где $H_m(z)$ есть линейная комбинация произведений функций вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^s}\qquad (s=0, 1,\cdots)$$

и по лемме 7.1

$$|Q^{(m)}(t)|\leqslant Q(t)\,\frac{c_{m,N}}{|t|^{N_m}}\leqslant \tilde{v}(t)\,\frac{c_{m,N}}{|t|^{N_m}}\leqslant\frac{\tilde{c}_{N_m}}{|t|^{N_m}}\,c_N\,|t|^N v(t).$$

Так что при достаточно большом $N>N(q)$ получим

$$|Q^{(m)}(t)|\leqslant v(t)\ \text{для любого}\ m=0, 1,\cdots, q-1. \tag{7.8}$$

Следовательно, для Reel $Q^{(m)}(z)\overset{\text{def}}{=}U(x, y)$ имеем

$$\left|\frac{\partial^m U}{\partial y^m}\right|(t, 0)\leqslant|Q^{(m)}(t)|\leqslant v(t)\ (m=0, 1,\cdots, q-1).$$

Теорема 7.1 доказана.

2°. В этом пункте мы установим, что теорема А неулучшаема еще и в том смысле, что нельзя в ее условиях уменьшить количество данных Коши, от которых требуется малость вблизи нуля. Если освободить от требований малости хотя бы одну функцию из состава данных Коши $\left\{U, \frac{\partial U}{\partial t},\cdots, \frac{\partial^{2p-1}U}{\partial t^{2p-1}}\right\}$, то решение соответствующего полигармонического уравнения может оказаться нетривиальным, даже если все остальные данные тождественно равны нулю в окрестности нуля.

Теорема 7.2. *Пусть k_0 и p—натуральные числа; $0\leqslant k_0<2p$. Существует функция $U\not\equiv 0$ класса $C^\infty(R_+^{n+1})$ (являющаяся регулярным решением) такая, что при $\delta>0$*

$$\left.\frac{\partial^k U(x, 0)}{\partial t^k}\right|_{D^\delta}\equiv 0\ (k=0, 1,\cdots, k_0-1, k_0+1,\cdots, 2p-1). \tag{7.9}$$

Доказательство. Для определенности предположим, что исключительное значение k_0 — четное число, то есть $k_0=2s_0$. Пусть f — ненулевая финитная функция класса $C^\infty(R^n)$, сосредоточенная в кольце $D^{2\delta}\setminus\overline{D}^\delta$.

Искомую систему $\{U_k\}_{k=0}^{2p-1}$ данных Коши с условием (7.9) построим следующим образом:

$$U_{2k+1}(x) \overset{\text{def}}{=} c_{2k+1}\Delta^{k+1} f(x) \ (x \in R^n, \ k = 0, 1, \cdots, 2p-1),$$

где константы c_{2k+1} будут выбраны чуть позже, а данные u_{2k}, где $k = 0, 1, \cdots, p-1$ определим с учетом замечания к теореме 3.2, устанавливающей зависимость между данными Коши, обеспечивающими разрешимость задачи Коши. А именно, пусть v_s — преобразование Фурье функции u_s. Выберем функции u_{2k} так, чтобы

$$|\sigma|^{-2k} v_{2k}(\sigma) = \left[\sum_{j=0}^{p-1} h_{2k,\,2j+1} |\sigma|^{-2j} v_{2j+1}(\sigma)\right] |\sigma|^{-1}. \tag{7.10}$$

Здесь $(h_{2k,\,2j+1})$ $(k, j = 0, 1, \cdots, p-1)$ — матрица, участвующая в соотношении связи (2.3) теоремы 2.1. Легко видеть, что правые части равенств (7.10) совпадают с

$$\left[\sum_{j=0}^{p-1} h_{2k,\,2j+1} c_{2j+1}\right] |\sigma| \hat{f}(\sigma) \ (k = 0, 1, \cdots, p-1). \tag{7.11}$$

Если мы положим $u_{2k} \equiv 0$ при $k \neq s_0$, а постоянные c_{2j+1} определим из системы

$$\sum_{j=0}^{p-1} h_{2k,\,2j+1} c_{2j+1} = \delta^{k,\,s_0} (k = 0, 1, \cdots, p-1), \tag{7.12}$$

то (7.10) будет выполнено при $s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, s_0 + 1, \cdots, p-1$. Наконец, положим

$$u_{2s_0}(x) = c \int_{R^n} \frac{\Delta^{s_0+1} f(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}}. \tag{7.13}$$

Очевидно, что (7.10) будет выполнено и при $k = s_0$.

Разрешимость системы (7.12) следует из обратимости соответствующей матрицы (см. теорему 3.1, п. 3°). По теореме 3.3 существует функция $U \in H^{2p}(R^{n+1}_+)$, удовлетворяющая уравнению $\Delta^p_t U = 0$ $((x, t) \in R^{n+1}_+)$ и такая, что

$$\frac{\partial^k U(x, 0)}{\partial t^k} = u_k(x) \ (k = 0, 1, \cdots, 2p-1, \ x \in R^n).$$

Функции u_k $(k=0, 1, \cdots, 2p-1)$ по построению принадлежат $C^\infty(R^n)$. Поэтому решение $U(x, t)$ принадлежит классу $C^\infty(\overline{R}^{n+1}_+)$ (см. [7], стр. 30, замечание 1). Построенная нами функция U является регулярным решением p-гармонического уравнения в R^{n+1}_+ и не есть тождественный нуль (см. определение функции u_{2s_0} (7.13), хотя и выполнены равенства (7.9). Теорема доказана.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность профессору В. П. Хавину за постановку задачи, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступила 3.VI.1975

Զ. Ա. ԱՌՈՒՇԱՆՅԱՆ. Միակության եզրային թեորեմա պոլիհարմոնիկ հավասարման Կոշու խնդրի լուծման համար (*ամփոփում*)

Այս աշխատանքում պոլիհարմոնիկ ֆունկցիաների համար հետազոտվում է հետևյալ հարցը. թե Կոշու տվյալները ինչպիսի արագությամբ պիտի նվազեն եզրագծի ֆիքսված կետին մոտենալու դեպքում (եզրագծի երկայնքով), որպեսզի հավասարման լուծումը լինի նույնաբար զրո:

Z. A. ARUSHANIAN. *A boundary uniqueness theorem for the solution of the Cauchy problem for polyharmonic equation* (summary)

The paper investigates the rate of decrease of the Cauchy data

$$\left\{u, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{2p-1} u}{\partial t^{2p-1}}\right\}$$

along the boundary sufficient for the solution of the Cauchy polyharmonic equation to be identical zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Мазья, В. П. Хавин.* О решениях задачи Коши для уравнения Лапласа; единственность, нормальность, аппроксимация, Труды ММО, т. 30, 1974, 61—114.
2. *С. Н. Мергелян.* Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа, УМН, XI, № 5, 1956, 3—26.
3. *Г. Е. Шилов.* Математический анализ, второй специальный курс, Изд. „Наука", М., 1965.
4. *Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес.* Неоднородные граничные задачи и их приложения, Изд. „Мир". М., 1971.
5. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Изд. „Мир", М., 1973.
6. *С. Л. Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул, Изд. „Наука", М., 1974.
7. *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИИЛ, М., 1962.
8. *С. Бохнер, У. Т. Мартин.* Функции многих комплексных переменных, ИИЛ, М., 1951.
9. *В. Рао.* Теорема единственности для гармонических функций, Мат. заметки, 3, № 3, 1968, 247—254.