ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XI, № 6, 1976 Математика

Ю. М. МОВСИСЯН

К ТЕОРИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Введение

В работе [1] вводится понятие алгебры второй ступени и развивается общая теория гомоморфизмов и многообразий для таких алгебраических образований. При этом под алгеброй второй ступени понимается объект $<Q; \Sigma; G>$, где Σ — некоторая совокупность финитарных операций, определенных на множестве Q, и G — некоторая совокупность финитарных операций, определенных на множестве Σ. Эти алгебры возникают в связи с исследованием некоторых формул из языка второй ступени [2].

Понятие универсальной алгебры является частным случаем понятия алгебры второй ступени. А именно, при $G = \varnothing$ из алгебры второй ступени $<Q; \Sigma; G>$ возникает универсальная алгебра $<Q; \Sigma>$. Поэтому, естественно было ожидать, что при $G = \varnothing$ теория алгебр второй ступени сводится к обычной теории универсальных алгебр, изложенной, например, в книге [3]. Однако, при $G = \varnothing$ из теории алгебр второй ступени, развитой в [1], получилась несколько иная теория универсальных алгебр. В настоящей работе излагаются некоторые вопросы из этой теории. Понятие гомоморфизма в изложенном здесь смысле было рассмотрено еще и в работе [4]. Однако идея рассмотрения таких морфизмов по существу восходит к Марчевскому (см., например, [5]) и Фудзиваре [6].

Более точное сравнение обычной теории универсальных алгебр с результатами настоящей работы содержится в следующих трех пунктах.

1. Некоторые результаты обычной теории универсальных алгебр имеют одинаковое содержание с соответствующими результатами настоящей работы. Например, формулировка известной теоремы Де-Грота о том, что каждая группа изоморфна группе всех автоморфизмов некоторого кольца, остается верной и при новой трактовке понятия гомоморфизма.

2. Некоторые результаты обычной теории универсальных алгебр незначительно изменяются. В обычной теории известна теорема Биркгофа-Фринка о том, что каждая полная компактно-порожденная решетка изоморфна решетке всех подалгебр некоторой универсальной алгебры. При новых определениях гомоморфизма и подалгебры, принятых в настоящей работе, можно установить, что каждая полная компактно-порожденная решетка вкладывается в решетку всех подалгебр некоторой универсальной алгебры. *Верна или нет формулиров-*

ка теоремы Биркгофа-Фринка при настоящем изложении теории универсальных алгебр—пока открытый вопрос.

3. Некоторые результаты обычной теории универсальных алгебр совершенно не сравнимы с результатами настоящей работы. Например, класс колец в изложенной теории не образует многообразия.

Изложенный в настоящей работе подход можно было бы применять и к различным обобщениям понятия универсальной алгебры: многоосновные алгебры, алгебры второй ступени (ступенчатые алгебры), модели, топологические алгебры и др. При этом выборе мы остановились на рассмотрении топологических алгебр.

§ 1 Тип алгебр. Подалгебры*

Если $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ есть произвольная алгебра и $A \in \Sigma$, то через $|A|$ обозначается арность операции A.

Подмножество $T = \{|A| \mid A \in \Sigma\}$ множества всех натуральных чисел N называется типом алгебры $D = \langle Q; \Sigma \rangle$.

Например, тип произвольного кольца $Q(+, \cdot)$ по нашему определению, есть множество $T = \{2\}$. Произвольный группоид, в частности, группа, полугруппа и квазигруппа также имеет тип $T = \{2\}$. Таким образом, группы, полугруппы и квазигруппы мы рассматриваем как алгебры с одной бинарной операцией, а кольца и поля — как алгебры с двумя бинарными операциями.

Две алгебры будем называть однотипными, если они имеют равные типы. Таким образом, группоид и кольцо по нашему определению являются однотипными алгебрами. Если тип алгебры равен T, то ее будем еще называть T-алгеброй. Класс алгебр называется классом Т-алгебр, если каждая ее алгебра есть T-алгебра.

Алгебру $D' = \langle Q'; \Sigma' \rangle$ будем называть подалгеброй алгебры $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ и писать $D' \leqslant D$, если $Q' \subseteq Q$, $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

Например, аддитивная полугруппа всех натуральных чисел есть подалгебра группы $Z(+)$, каждая коммутативная группа есть подалгебра некоторого кольца и др.

Если $D_1 = \langle Q_1; \Sigma_1 \rangle$, $D_2 = \langle Q_2; \Sigma_2 \rangle$ — подалгебры алгебры D и $Q_3 = Q_1 \cap Q_2 \neq \varnothing$, $\Sigma_3 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing$, то пара $D_3 = \langle Q_3; \Sigma_3 \rangle$ также подалгебра алгебры D. Подалгебра D_3 называется пересечением подалгебр D_1, D_2 и обозначается $D_3 = D_1 \cap D_2$. Если же $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$ или $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$, то полагаем $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Аналогично определяется пересечение любого числа подалгебр.

Определим равенство двух алгебр:

$$D = D' \Longleftrightarrow Q = Q',\ \Sigma = \Sigma'.$$

В противном случае будем говорить, что $D \neq D'$.

Если $D' \leqslant D$ и $D' \neq D$, то D' называется истинной подалгеброй алгебры D.

* Под словом „алгебра" в дальнейшем разумеется универсальная алгебра.

Будем говорить, что алгебра $D=\langle Q;\ \Sigma\rangle$ порождается непустым множеством $X\subseteq Q$, или непустое множество $X\subseteq Q$ порождает алгебру D, если не существует ее истинной подалгебры вида $D'=\langle Q';\ \Sigma\rangle$ такой, что $X\subseteq Q'$ (в обозначениях $D=\langle\{X\};\ \Sigma\rangle$).

Если существует такое конечное множество X, что $D=\langle\{X\};\ \Sigma\rangle$, то алгебра D называется конечнопорожденной.

Класс всех подалгебр одной и той же алгебры (включая быть может пустое множество) образует полную решетку относительно частичного порядка „$\leqslant$".

Т е о р е м а 1. *Полная решетка всех подалгебр каждой алгебры является компактно-порожденной, т. е. каждый ее элемент есть объединение компактных элементов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует заметить, что класс всех подалгебр каждой алгебры $\langle Q;\ \Sigma\rangle$ образует алгебраическую систему замыканий множества $Q\cup\Sigma$. Каждая алгебраическая система замыканий является полной компактно-порожденной решеткой [7]. Компактными элементами этой решетки являются конечнопорожденные подалгебры с конечной системой операций и только они.

§ 2. Гомоморфизмы алгебр

Пусть $D=\langle Q;\ \Sigma\rangle$ и $D'=\langle Q';\ \Sigma'\rangle$ — две однотипные алгебры. Пара $(\varphi,\ \breve{\psi})$ отображений $\varphi\colon\ Q\to Q'$, $\breve{\psi}\colon\ \Sigma\to\Sigma'$ называется гомоморфизмом из алгебры D в алгебру D' и обозначается $(\varphi,\ \breve{\psi})\colon D\Rightarrow D'$, если отображение $\breve{\psi}$ сохраняет арность операций и для любых $A\in\Sigma$, $|A|=n$ и $x_1,\cdots,\ x_n\in Q$ справедливо равенство:

$$\varphi\,[A\,(x_1,\cdots,\ x_n)]=[\breve{\psi}\,A]\,(\varphi x_1,\cdots,\ \varphi x_n).$$

Пара $(\varepsilon,\ \breve{\varepsilon})$ тождественных отображений $\varepsilon\colon Q\to Q$, $\breve{\varepsilon}\colon\ \Sigma\to\Sigma$ есть гомоморфизм алгебры D в себя.

Пара $\langle\varphi\,Q;\ \breve{\psi}\,\Sigma\rangle$ является подалгеброй алгебры D' и называется гомоморфным образом алгебры D. Если пары $(\varphi_1,\ \breve{\psi}_1)\colon\ D\Rightarrow D_1$ и $(\varphi_2,\ \breve{\psi}_2)\colon\ D_1\Rightarrow D'$ — гомоморфизмы, то пара отображений $(\varphi_1\varphi_2,\ \breve{\psi}_1\breve{\psi}_2)\colon\ D\Rightarrow D'$ — также гомоморфизм и называется произведением гомоморфизмов $(\varphi_1,\ \breve{\psi}_1)$ и $(\varphi_2,\ \breve{\psi}_2)$. Таким образом, алгебры и их гомоморфизмы (в качестве морфизмов) образуют категорию.

Гомоморфизм алгебры в себя называется ее эндоморфизмом. Множество всех эндоморфизмов одной и той же алгебры образует полугруппу с единицей.

Определим еще ряд стандартных понятий.

Гомоморфизм $(\varphi, \bar{\psi})$ называется эпиморфизмом, если отображения φ, $\bar{\psi}$ сюръективны—и мономорфизмом, если отображения φ, $\tilde{\psi}$ инъективны. Изоморфизм — это одновременно эпи- и мономорфизм. Изоморфизм алгебры в себя называется ее автоморфизмом. Множество всех автоморфизмов одной и той же алгебры образует группу.

Если существует мономорфизм $(\varphi, \bar{\psi})$ из алгебры D в алгебру D', то говорят еще, что алгебра D вкладывается в алгебру D'. Каждая полугруппа с единицей вкладывается в полугруппу всех эндоморфизмов некоторой алгебры, каждая группа вкладывается в группу всех автоморфизмов некоторой алгебры.

Множество всех автоморфизмов вида $(\varphi, \bar{\varepsilon})$ образует группу и называется группой главных автоморфизмов. Эта группа—нормальный делитель во всей группе автоморфизмов. Для некоторых алгебр группа главных автоморфизмов совпадает с группой всех автоморфизмов. Такая ситуация, в частности, имеет место для любого группоида и для любого кольца.

Каждая группа изоморфна группе главных автоморфизмов некоторой алгебры.

§ 3. Конгруэнции и фактор-алгебры

Пусть $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ — алгебра, а r и $\bar{t}$ — отношения эквивалентности, определенные соответственно на множествах Q и Σ. Упорядоченная пара $(r, \tilde{t}) = q$ называется конгруэнцией на алгебре D, если

а) из отношений $x_1 \, r \, x_1', \cdots, x_m \, r \, x_m'$ следует

$A(x_1, \cdots, x_m) \, r \, A(x_1', \cdots, x_m')$, где $x_i, x_i' \in Q$, $A \in \Sigma$, $|A| = m$,

б) из отношения $A \, \bar{t} \, B$ следует $|A| = |B|$ и $A(x_1, \cdots, x_n) \, rB(x_1, \cdots, x_n)$ для любых $x_1, \cdots, x_n \in Q$, где $A, B \in \Sigma$, $|A| = n$.

Нулевая конгруэнция определяется как пара $\hat{O} = (O, \tilde{O})$, где

$$xOy \Longleftrightarrow x = y, \; x, y \in Q,$$

$$A \tilde{O} B \Longleftrightarrow A = B, \; A, B \in \Sigma.$$

Единичная конгруэнция определяется как пара $\hat{1} = (1, \tilde{1})$, где

$$x1y \Longleftrightarrow x, y \in Q,$$

$$A \bar{1} B \Longleftrightarrow |A| = |B|, \; A, B \in \Sigma.$$

Пусть $q_1 = (r_1, \tilde{t}_1)$ и $q_2 = (r_2, \tilde{t}_2)$ — две конгруэнции некоторой алгебры, определим

$$q_1 \leqslant q_2 \Longrightarrow r_1 \leqslant r_2, \quad \tilde{t}_1 \leqslant \tilde{t}_2.$$

Например, $\hat{O} \leqslant q \leqslant \hat{1}$ для любой конгруэнции q. Кроме того пара $q_3 = (r_1 \cap r_2, \tilde{t}_1 \cap \tilde{t}_2)$ — также конгруэнция, которая называется пересечением конгруэнций q_1, q_2 и обозначается обычным путем: $q_3 = q_1 \cap q_2$. Аналогично определяется и обозначается пересечение любого числа конгруэнций. Таким образом, класс всех конгруэнций, определенных на одной и той же алгебре, образует полную решетку. Конгруэнция $(r, \tilde{t})$ алгебры $\langle Q; \Sigma \rangle$ называется вполне инвариантной, если она выдерживает любой эндоморфизм $(\varphi, \tilde{\psi})$ этой алгебры, т. е.

$$xry \Longrightarrow \varphi x r \varphi y, \quad x, y \in Q,$$

$$A \tilde{t} B \Longrightarrow \tilde{\psi} A \tilde{t} \tilde{\psi} B, \quad A, B \in \Sigma.$$

Пусть $q = (r, \tilde{t})$ есть конгруэнция алгебры $D = \langle Q; \Sigma \rangle$. Элементы фактор-множества $\Sigma/\tilde{t} = \bar{\Sigma}$ можно трактовать как операции, определенные на фактор-множестве $Q/r = \bar{Q}$ следующим путем:

$$\bar{A}(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) = \overline{A(x_1, \cdots, x_n)},$$

где $\bar{A} \in \bar{\Sigma}$, $|A| = n$, $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n \in \bar{Q}$.

Корректность определения операций $\bar{A}$ следует из определения конгруэнции. Таким образом, определена алгебра $\langle Q/r; \Sigma/\tilde{t} \rangle$, называемая фактор-алгеброй алгебры D по конгруэнции q и обозначается как D/q.

Фактор-алгебра T-алгебры есть T-алгебра. Пара отображений $(\varphi_e, \tilde{\psi}_e)$, где $\varphi_e: x \to \bar{x}$, $\tilde{\psi}_e: A \to \bar{A}$, является эпиморфизмом. Он называется естественным гомоморфизмом.

С каждым гомоморфизмом $(\varphi, \tilde{\psi})$ можно связать некоторую конгруэнцию $(r, \tilde{t})$, называемую ядром этого гомоморфизма. В самом деле, если $(\varphi, \tilde{\psi})$: $D \Longrightarrow D'$ — гомоморфизм, то пара $q = (r, \tilde{t})$, где $xry \Longleftrightarrow \varphi x = \varphi y$, $\quad A \tilde{t} B \Longleftrightarrow \tilde{\psi} A = \tilde{\psi} B$, является конгруэнцией. Эта конгруэнция—ядро гомоморфизма $(\varphi, \tilde{\psi})$ и обозначается через Ker $(\varphi, \tilde{\psi})$. Обратное утверждение, однако, не верно. Существуют конгруэнции, не являющиеся ядрами подходящих гомоморфизмов. Например, конгруэнция вида $(1, \tilde{0})$, где 1—единичная эквивалентность, а $\tilde{O}$—нулевая эквивалентность. В связи с этим конгруэнцию $q = (r, \tilde{t})$ будем называть ядерной, если она является ядром для некоторого гомоморфизма $(\varphi, \tilde{\psi})$. Нулевая и единичная конгруэнции каждой алгебры являются ядерными. Существуют такие алгебры, которые кроме этих тривиальных конгруэнций дртгими ядерными конгруэнциями не обладают. Примером такой алгебры может служить алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$, где Σ — класс всех унитарных операций множества Q. Существуют и такие алгебры, каждая конгруэнция которых ядерна. Например, T-алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$, для которой отображение $A \to |A|$ инъективно, т. е. множество Σ по каждой арности $n \in T$ содержит лишь одну операцию. Поэтому в группах, полугруппах и квазигруппах каждая конгруэнция ядерна. Нетрудно заметить, что в кольцах существует только одна не ядерная конгруэнция, а именно конгруэнция вида $(1, \overline{O})$.

Пересечение ядерных конгруэнций есть ядерная конгруэнция, поэтому класс всех ядерных конгруэнций каждой алгебры образует полную решетку.

§ 4. Прямое произведение алгебр

Пусть $\mathfrak{M} = \{D_i / D_i = \langle Q_i; \Sigma_i \rangle, \quad i \in J\}$ — произвольный класс T-алгебр, $\hat{Q} = \Pi Q_i$ — декартово произведение множеств Q_i, а $\hat{\Sigma} = \overline{\Pi} \Sigma_i$ — совокупность всевозможных систем $\hat{A} = (A_i)_{i \in J}$ операций одинаковых арностей, взятых по одному из каждого множества Σ_i. Элементы множества $\hat{\Sigma}$ можно трактовать как операции, определенные на множестве $\hat{Q}$ покомпонентно, т. е. если

$$\hat{A} = (A_i)_{i \in J}, \; |A_i| = m, \; \hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_m \in \hat{Q}, \; \hat{x}_j = (x_j^i)_{i \in J},$$

то

$$\hat{A}\,(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_m) = (A_i\,(x_1^i, \cdots, x_m^i))_{i \in J}.$$

Алгебра $\hat{D} = \langle \hat{Q}; \hat{\Sigma} \rangle$ называется прямым произведением семейства алгебр D_i, $i \in J$ и обозначается $\hat{D} = \prod\limits_{i \in J} D_i$. Прямое произведение T-алгебр есть T-алгебра. Понятно, что множество всех n-арных операций прямого произведения $\hat{D}$ есть декартово произведение множеств всех n-арных операций алгебр D_i, $i \in J$.

Можно доказать, что прямое произведение в только что определенном смысле, является реализацией прямого произведения в рассматриваемой категории универсальных алгебр.

Пара отображений $(\varphi_i, \overline{\psi}_i)$, где $\varphi_i \colon \hat{x} \to x_i, \overline{\psi}_i \colon \hat{A} \to A_i$ является гомоморфизмом $\hat{D} \Rightarrow D_i$ для каждого $i \in J$. Подалгебра $\hat{D}' \leqslant \hat{D}$, где $\hat{D}' = \langle \hat{Q}'; \hat{\Sigma}' \rangle$, называется подпрямым произведением семейства алгебр D_i, $i \in J$, если пара $(\varphi_i|_{\hat{Q}'}, \overline{\psi}_i|_{\hat{\Sigma}'})$ есть эпиморфизм для каждого

$i \in J$. При этом, например, $\varphi_i|_{\hat{Q}'}$ означает ограничение отображения φ_i на подмножестве $\hat{Q}'$.

Теорема 2. *Пусть D—произвольная алгебра и q_i, $i \in J$—некоторый набор ядерных конгруэнций в ней. Если $q = \prod q_i$, то алгебра D/q изоморфна подпрямому произведению фактор-алгебр D/q_i, $i \in J$.*

Доказательство. Рассмотрим прямое произведение $\prod\limits_{i \in J} D/q_i$ фактор-алгебр D/q_i, $i \in J$. Пусть

$$D = \langle Q; \Sigma \rangle,\ q_i = (r_i,\ \tilde{t}_i),\ q = (r, \tilde{t}) \text{ и } \prod_{i \in J} D/q_i = \langle \hat{S}; \hat{G} \rangle.$$

Определим отображение φ: $Q/r \to \hat{S}$, сопоставляя каждому классу $[a]\, r$ тот элемент из $\hat{S}$, i-я компонента которого для всякого $i \in J$ является классом эквивалентности r_i, содержащим $[a]\, r$. Аналогично определяется отображение $\tilde{\psi}$: $\Sigma/\tilde{t} \to \hat{G}$, корректность которого следует из ядерности конгруэнции $q = (r, \tilde{t})$. Нетрудно заметить, что пара $(\varphi, \tilde{\psi})$— гомоморфизм из алгебры D/q в алгебру $\prod\limits_{i \in J} D/q_i$. Этот гомоморфизм будет и мономорфизмом, так как конгруэнции q_i, $i \in J$ являются ядерными. Наконец, та подалгебра алгебры $\prod\limits_{i \in J} D/q_i$, на которую алгебра D/q мономорфно отображается, будет подпрямым произведением алгебр D/q_i, $i \in J$.

Универсальная алгебра называется ядерно неразложимой, если совокупность всех ее ненулевых ядерных конгруэнций обладает ненулевым пересечением.

Теорема 3. *Каждая алгебра изоморфна подпрямому произведению ядерно неразложимых алгебр.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $D = \langle Q; \Sigma \rangle$, пары различных элементов $x, y \in Q$, $A, B \in \Sigma$ и обозначим через $\mathfrak{M}(x, y, A, B)$ множество всех ядерных конгруэнций алгебры D, разделяющих эти элементы, т. е. если

$$q \in \mathfrak{M}(x, y, A, B) \text{ и } q = (r, \tilde{t}), \text{ то } [x]\, r \neq [y]\, r, [A]\, \tilde{t} \neq [B]\, \tilde{t}.$$

С помощью леммы Цорна, нетрудно установить, что частично-упорядоченное множество $\mathfrak{M}(x, y, A, B)$ обладает максимальными элементами. Для каждой четверки различных элементов x, y, A, B обозначим через $q(x, y, A, B)$ одну из максимальных конгруэнций, их разделяющих. Поскольку пересечение всех этих максимальных конгруэнций является нулевым, то по теореме 2 алгебра D изоморфна подпрямому произведению всех фактор-алгебр $D/q(x, y, A, B)$. Остается заметить, что каждая фактор-алгебра $D/q(x, y, A, B)$ ядерно неразложима.

§ 5. Алгебра слов. Понятие сверхтождества

В дальнейшем помимо „чистых“ множеств, нам понадобятся и так называемые множества с определенным типом. А именно, если U—произвольное множество и Θ: $U \to N$—некоторое отображение этого множества в множество всех натуральных чисел, то образ $\Theta(U)$ множества U при этом отображении Θ будем называть типом, точнее Θ-типом множества U. При этом, если $\omega \in U$ и $\Theta(\omega) = n$, то n называется арностью элемента ω и обозначается так: $n = |\omega|$. Для краткости, множество с типом T будем называть T-множеством.

Пусть X — произвольное множество, а U — произвольное множество с определенным типом. Элементы множества X называются предметными переменными, а элементы множества U—функциональными переменными. Будем определять два „сорта“ слов—нижние и верхние слова.

Каждое функциональное переменное и только они называются верхними словами, т. е. множество всех верхних слов совпадает с U.

Понятие нижнего слова определяется индуктивно. Во-первых, каждое предметное переменное есть нижнее слово, и во-вторых, если ω—верхнее слово с арностью m и $x_1, \cdots, x_m$—нижние слова, то выражение $\omega(x_1, \cdots, x_m)$ также есть нижнее слово. Обозначим через $X(U)$ совокупность всех нижних слов, полученных таким путем. Тогда пару $\langle (X)\, U;\ U \rangle = U(X)$ можно трактовать как алгебру, она называется алгеброй слов.

Если U есть T-множество, то соответствующая алгебра слов $U(X)$ есть T-алгебра для любого множества X.

Алгебра слов $U(X)$ порождается множеством X.

T-алгебра слов $U(X)$ называется стандартной, если множество X — счетно и множество U для любого $n \in T$ содержит ровно счетное число n-арных операций.

Пусть X, X' — произвольные множества и U, U'—произвольные множества с определенными типами. Будем говорить, что пара (X, U) эквивалентна паре (X', U'), если существуют взаимнооднозначные отображения $X \leftrightarrow X'$ и $U \leftrightarrow U'$, причем последнее соответствие сохраняет арность.

Если пара (X, U) эквивалентна паре (X', U'), то алгебра $U(X)$ изоморфна алгебре $U'(X')$. В частности, две однотипные стандартные алгебры слов изоморфны.

Теорема 4. *Пусть алгебра* $D = \langle Q;\ \Sigma \rangle$ *однотипна с алгеброй слов* $U(X) = \langle (X)\, U;\ U \rangle$. *Если* $\tilde{\psi}$: $U \to \Sigma$ — *произвольное отображение, сохраняющее арность, то любое отображение* φ_0: $X \to Q$ *можно продолжить до отображения* φ: $(X)\, U \to Q$ *так, что пара* $(\varphi, \tilde{\psi})$ *есть гомоморфизм* $U(X) \Rightarrow D$.

Доказательство. Определим $\varphi|_X = \varphi_0$. Если ω — верхнее слово с арностью m и образы нижних слов $x_1, \cdots, x_m$ при отображении

φ уже определены, то образом слова $\omega(x_1, \cdots, x_m)$ считаем элемент $[\bar{\psi}\ \omega](\varphi x_1, \cdots, \varphi x_m) \in Q$.

Введем теперь понятие сверхтождества.

Если w_1, w_2 — нижние слова из стандартной T-алгебры слов $U(X)$, то их формальное равенство $w_1 = w_2$ будем называть нижним T-сверхтождеством. Если же w_1, w_2 — верхние слова с одной и той же арностью, то их формальное равенство называется верхним T-сверхтождеством.

Будем говорить, что в T-алгебре $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется нижнее (верхнее) T-сверхтождество $w_1 = w_2$, если при любом гомоморфизме $(\varphi, \bar{\psi})$: $U(X) \Rightarrow D$ слова w_1, w_2 имеют равные образы, т. е. $\varphi w_1 = \varphi w_2$ (соответственно $\bar{\psi} w_1 = \bar{\psi} w_2$).

Если использовать терминологию А. И. Мальцева [2], то нижние сверхтождества по существу являются замкнутыми формулами второй ступени вида:

$$\forall X, \cdots, Y \forall x, \cdots, y\ (w_1 = w_2),$$

где w_1, w_2 — термы от функциональных и предметных переменных, входящих в приставку этой формулы. Выполнимость нижнего сверхтождества совпадает с выполнимостью этой формулы.

Верхние сверхтождества — формулы нового характера. Их можно образовать лишь двумя способами:

$$\forall X,\ Y\,(X = Y),$$
$$\forall X\,(X = X),$$

где X, Y — разные функциональные переменные с одинаковой арностью.

Что касается обычных тождеств, каким является, например, тождество дистрибутивности в кольцах, то их можно представить как замкнутые формулы вида

$$\exists X, \cdots, Y \forall x, \cdots, y\,(w_1 = w_2).$$

§ 6. О выполнимости сверхтождеств

Пусть $\langle Q; \Sigma \rangle$ — произвольная T-алгебра. Спрашивается какие T-сверхтождества могут выполняться в этой алгебре. Конечно, существуют такие T-сверхтождества, которые выполняются во всех T-алгебрах. Это так называемые тривиальные T-сверхтождества и они имеют вид $w = w$. Поэтому в поставленной задаче речь идет о нетривиальных T-сверхтождествах. При такой общей постановке этот вопрос едва ли обозрим. Однако при некоторых естественных ограничениях как на рассматриваемые алгебры, так и на рассматриваемые сверхтождества, задача намного упрощается. В частности, имеется ряд окончательных результатов о выполнимости некоторых сверхтождеств в системах групп, в системах полугрупп и в системах квазигрупп. При этом алгебра $\langle Q; \Sigma\rangle$ называется системой групп, или групповой системой, если для любого $A \in \Sigma$ группоид $Q(A)$ — группа. Аналогично определяются системы подгрупп и системы квазигрупп. Можно говорить и о более специальных алгебрах. Например, алгебра $\langle Q; \Sigma\rangle$, каждая операция которой—полугруппа с единицей, называется полугрупповой системой с единицей. Можно еще рассматривать коммутативные полугрупповые системы, т. е. алгебры, каждая операция которых—коммутативная полугруппа. Интересные подкатегории можно выделять и в категории групповых систем и в категории квазигрупповых систем.

В работе [8] была исследована выполнимость сверхтождества ассоциативности

$$X[x, Y(y, z)] = Z[U(x, y), z]$$

в системах полугрупп. Оказывается, что сверхтождества ассоциативности, выполняющиеся в полугрупповых системах с единицей, могут быть одним из следующих видов:

$$X[x, X(y, z)] = X[X(x, y), z], \tag{1}$$

$$X[x, Y(y, z)] = Y[X(x, y), z], \tag{2}$$

$$X[x, X(y, z)] = Y[Y(x, y), z], \tag{3}$$

$$X[x, Y(y, z)] = X[Y(x, y), z]. \tag{4}$$

Дано также точное описание тех полугрупповых систем с единицей, в которых могут выполняться эти сверхтождества. Приведем один типичный результат.

Теорема 5. *В полугрупповой системе с единицей* $\langle Q; \Sigma\rangle$ *выполняется сверхтождество* (2), *если и только если существует полугруппа* $Q(\cdot)$ *такая, что для любого* $A \in \Sigma$ *справедливо равенство*

$$A(x, y) = x \cdot a \cdot y,$$

где $a \in Q$.

Одновременно были изучены выполнимость так называемых уравновешенных сверхтождеств в системах полугрупп и в системах квазигрупп.

Следует отметить, что хотя изучение уравновешенных сверхтождеств только началось, изучение уравновешенных тождеств началось сравнительно давно. Первое исследование этого направления содержится в одной работе А. И. Мальцева [9], где тождества такого вида называются однородными. В дальнейшем теория уравновешенных тождеств получила широкое развитие в работе В. Д. Белоусова [10]. Некоторые результаты об уравновешенных сверхтождествах содержатся в работах [11] и [12]. При этом, нижнее сверхтождество

$w_1 = w_2$ называется уравновешенным, если каждая предметная переменная участвует в записи каждого слова w_1, w_2 один и только один раз. Например, сверхтождество ассоциативности — уравновешенное сверхтождество. Среди неуравновешенных сверхтождеств более подробно исследовано сверхтождество дистрибутивности

$$X[x, Y(y, z)] = U[V(x, y), Z(x, z)]$$

(см., например, [13]).

§ 7. Многообразия алгебр

Пусть Λ — некоторый набор T-сверхтождеств, а $\mathfrak{M}_\Lambda^T$ — класс всех T-алгебр, в которых выполняется каждое сверхтождество из Λ. Понятно, что для любых $T \neq \varnothing$ и Λ всегда $\mathfrak{M}_\Lambda^T \neq \varnothing$ и, если $T_1 \neq T_2$, то $\mathfrak{M}_{\Lambda_1}^{T_1} \cap \mathfrak{M}_{\Lambda_2}^{T_2} = \varnothing$ для любых Λ_1 и Λ_2. С другой стороны, $\mathfrak{M}_{\Lambda_1}^T \cap \mathfrak{M}_{\Lambda_2}^T = \mathfrak{M}_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}^T$ для любых Λ_1, Λ_2 и $T \neq \varnothing$. Будем говорить, что

$$\mathfrak{M}_{\Lambda_1}^T \leqslant \mathfrak{M}_{\Lambda_2}^T \Longleftrightarrow D \in \mathfrak{M}_{\Lambda_1}^T \Rightarrow D \in \mathfrak{M}_{\Lambda_2}^T.$$

Класс алгебр $\mathfrak{M}$ называется многообразием, если существуют множества T и Λ такие, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\Lambda^T$. При этом будем говорить, что многообразие $\mathfrak{M}$ определяется парой множеств (T, Λ).

Таким образом, класс всех полугрупп—многообразие. Это многообразие определяется парой (T, Λ), где $T = \{2\}$, а множество Λ состоит из нижнего сверхтождества $X[x, X(y, z)] = X[X(x, y), z]$ и верхнего сверхтождества $X = Y$.

Класс всех T-алгебр также есть многообразие. Оно определяется парой (T, Λ), где Λ состоит из нижнего сверхтождества $x = x$. Это многообразие будем обозначать через $\mathfrak{M}_1^T$.

Класс всех одноэлементных T-алгебр—многообразие, определяемое парой (T, Λ), где Λ определяется нижним сверхтождеством $x = y$ и обозначается через $\mathfrak{M}_0^T$. Эти обозначения оправдываются тем, что для любых Λ и T справедливо соотношение

$$\mathfrak{M}_0^T \leqslant \mathfrak{M}_\Lambda^T \leqslant \mathfrak{M}_1^T.$$

Если же некоторый класс T-алгебр $\mathfrak{M}$ не образует многообразия, то из соотношения $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{M}_1^T$ следует, что класс многообразий, в которых содержатся $\mathfrak{M}$, не пуст, и что этот класс обладает минимальным элементом относительно частичного порядка „$\leqslant$“. Этот минимальный элемент называется многообразием, порожденным классом $\mathfrak{M}$ и обозначается через $\mathfrak{M}^*$. Легко убедиться, что многообразие $\mathfrak{M}^*$ определяется парой (T, Λ), где Λ — совокупность всех T-сверхтождеств (нижних или верхних), каждое из которых выполняется во всех T-алгебрах класса $\mathfrak{M}$.

Каждой совокупности T-сверхтождеств Λ соответствует многообразие $\mathfrak{M}_\Lambda^T$ и каждому классу T-алгебр $\mathfrak{M}$ соответствует класс $\Lambda_{\mathfrak{M}}^T$.

всех таких T-сверхтождеств, каждое из которых выполняется во всех алгебрах из $\mathfrak{M}$. Пара отображений $\Lambda \to \mathfrak{M}_{\Lambda}^{T}$ и $\mathfrak{M} \to \Lambda_{\mathfrak{M}}^{T}$ образует соответствие Галуа, замкнутыми элементами которого являются многообразия и те классы сверхтождеств, которые определяют вполне инвариантные конгруэнции на соответствующих стандартных алгебрах слов.

Теорема 6. *Класс однотипных алгебр является многообразием, если и только если он наследственен, гомоморфно- и мультипликативно замкнут.*

При этом класс однотипных алгебр называется:

а) наследственным, если он вместе с каждой T-алгеброй содержит каждую ее T-подалгебру;

б) гомоморфно замкнутым, если он вместе с каждой алгеброй содержит каждый ее гомоморфный образ:

в) мультипликативно замкнутым, если он вместе со всякой совокупностью алгебр содержит их прямое произведение.

Каждый гомоморфно замкнутый класс алгебр абстрактен, т. е. он вместе со всякой своей алгеброй содержит и любой ее изоморфный образ.

Доказательство теоремы 6 проводится в заключении следующего параграфа.

Отметим, что в одном весьма частном случае, когда рассматриваемые универсальные алгебры замкнуты относительно суперпозиции операций и содержат все единичные операции, аналогичный результат был получен Файтловичем]14].

Класс всех групп есть гомоморфно и мультипликативно замкнутый класс однотипных алгебр. Однако, класс всех групп не образует многообразия, так как этот класс алгебр не наследственен. В самом деле, существуют такие группы, не каждая подалгебра которой есть группа. Более того, как известно каждая коммутативная полугруппа с сокращением вкладывается в некоторую группу. Каждая свободная полугруппа также вложима в группу. Именно из последнего факта (с учетом теоремы 6) вытекает

Предложение 1. *Многообразие всех полугрупп порождается классом всех групп.*

Нетрудно заметить, что все групповые многообразия находятся в классе всех периодических групп, так как в периодических группах и только в них каждая подалгебра есть группа.

Класс всех квазигрупп также не образует многообразия. Кроме условия наследственности здесь нарушается еще гомоморфная замкнутость. В связи с этим, квазигруппу будем называть наследственной, если каждая ее подалгебра—квазигруппа. Понятно, что наследственные группы—это в точности периодические группы. Однако *полное описание класса всех наследственных квазигрупп неизвестно.*

Прямое произведение двух колец по нашему определению есть алгебра с четырьмя операциями. Поэтому класс всех колец не является мультипликативно замкнутым. Каждая абелева группа есть подалгебра некоторого кольца, поэтому класс всех колец не наследственен. В результате класс всех колец не образует многообразия. Обозначим этот класс через K и рассмотрим многообразие K^*, порожденное этим классом. Поскольку каждый группоид вкладывается в мультипликативную часть некоторого кольца, то K^* совпадает с многообразием всех бинарных алгебр (т. е. алгебр с бинарными операциями). Иначе говоря справедливо

Предложение 2. *В классе всех колец не выполняется никакое нетривиальное сверхтождество.*

Однако, если рассматривать класс всех полей, то понятно, что в этом классе алгебр выполняются нетривиальные сверхтождества

$$X[x, X(y, z)] = X[X(x, y), z],$$
$$X(x, y) = X(y, x).$$

Неизвестно, *какие еще нетривиальные сверхтождества выполняются в классе всех полей!*

Этот вопрос эквивалентен задаче описания многообразия, порожденного классом всех полей.

§ 8. Свободные алгебры

Пусть $\mathfrak{M} = \{D_i / D_i = \langle Q_i; \Sigma_i \rangle, i \in J\}$ — произвольный класс однотипных T-алгебр, X—произвольное множество, U — произвольное T-множество и $D = \langle Q; \Sigma \rangle$—произвольная T-алгебра.

Тройку $\langle X, U, D \rangle$ будем называть $\mathfrak{M}$-универсальной, если существует пара таких отображений φ_0: $X \to Q$, $\tilde{\psi}_0$: $U \to \Sigma$, что

а) $\tilde{\psi}_0$ сохраняет арность и является сюръективным отображением, а $\varphi_0 X$ порождает алгебру D.

б) для любого $D_i \in \mathfrak{M}$ и для любых отображений λ: $X \to Q_i$, $\tilde{\mu}$: $U \to \Sigma$ (сохраняющих арность) существует гомоморфизм $(\lambda', \tilde{\mu}')$: $D \Rightarrow D_i$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
(X, U) & \xRightarrow{(\varphi_0,\ \tilde{\psi}_0)} & D \\
\| & & \Big\Downarrow (\lambda', \tilde{\mu}') \\
(\lambda, \tilde{\mu}) & \Longrightarrow & D_i
\end{array}$$

коммутативна, т. е. $\lambda = \varphi_0 \lambda'$ и $\tilde{\mu} = \tilde{\psi}'_0 \tilde{\mu}'$.

Для произвольного X и для произвольного T-множества U, тройка $\langle X, U, U(X) \rangle$ является $\mathfrak{M}$-универсальной для любого класса T-алгебр $\mathfrak{M}$.

Если тройка $\langle X, U, D\rangle$ является $\mathfrak{M}$-универсальной, то она оказывается и $\mathfrak{M}^*$-универсальной.

Если тройка $\langle X, U, D\rangle$ является $\mathfrak{M}$-универсальной и $D \in \mathfrak{M}$, то алгебра D называется $\mathfrak{M}$-свободной алгеброй, определенной парой (X, U) и обозначается через $F_{\mathfrak{M}}(X, U)$.

Теорема 7. *Если $\mathfrak{M}$ — абстрактный, наследственный и мультипликативно замкнутый класс T-алгебр, то свободная алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X, U)$ существует для произвольного X и для произвольного T-множества U.*

Доказательство. Пусть $D = \langle Q; \Sigma\rangle$ есть произвольная T-алгебра класса $\mathfrak{M}$, $\lambda\colon X \to Q$ и $\tilde{\mu}\colon U \to \Sigma$ — отображения, сохраняющие арность, где U—произвольное T-множество. Продолжим эти отображения до гомоморфизма $(\lambda^*, \bar{\mu}^*)\colon U(X) \Longrightarrow D$. Пусть $q_i = (r_i, \bar{t}_i)$, $i \in \Lambda$ — совокупность всех ядер таких гомоморфизмов и $q = \bigcap q_i$. Тогда фактор-алгебра $U(X)/q$ оказывается $\mathfrak{M}$-свободной алгеброй, определенной парой (X, U) (в силу теоремы 2).

В частности, если $\mathfrak{M}$—многообразие всех полугрупп, то мы приходим к обычному пониманию свободной полугруппы.

Мы договорились рассматривать группы как алгебры с одной ассоциативной и обратимой операцией. Из предложения 1 следует, что при таком рассмотрении класс всех групп не обладает свободной алгеброй. Если же в определении свободной алгебры порождаемость понимать в теоретико-групповом смысле, то такие свободные алгебры в классе всех групп уже будут существовать. Эти алгебры и изучаются в теории групп под названием свободных групп.

Заметим еще одно применение предложения 1: *свободными алгебрами в классе полугрупп, вложимых в группы, являются свободные полугруппы и только они.*

Доказательство теоремы 6. Необходимость проверяется непосредственно. Докажем достаточность.

Предположим, что класс T-алгебр $\mathfrak{M}$ удовлетворяет трем условиям наследственности и $\mathfrak{M}^*$—многообразие, порожденное классом $\mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^*$, то достаточно показать, что $\mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{M}$. Если $D^* \in \mathfrak{M}^*$ и $D^* = \langle Q^*; \Sigma^*\rangle$, то существует свободная алгебра $F_{\mathfrak{M}^*}(X, U)$ такая, что D^* является ее гомоморфным образом. По той же причине (теорема 7) существует и свободная алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X, U)$. Однако алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X, U)$ будет свободной алгеброй и для многообразия $\mathfrak{M}^*$. Таким образом, алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X, U)$ и $F_{\mathfrak{M}^*}(X, U)$ изоморфны, поэтому $F_{\mathfrak{M}^*}(X, U) \in \mathfrak{M}$ и потому $D^* \in \mathfrak{M}$.

§ 9. Многообразия абелевых алгебр

Пусть $D = \langle Q; \Sigma\rangle$ и $D' = \langle Q'; \Sigma\rangle$ — две T-алгебры. Обозначим через Hom (D', D) множество всех гомоморфизмов из алгебры

D' в алгебру D. Будем говорить, что множество $\mathrm{Hom}\,(D', D)$ является $\tilde{\psi}$-суммируемым, если для любого $A \in \Sigma$, $|A| = n$ и для любых гомоморфизмов

$$(\varphi_1, \tilde{\psi}), \cdots, (\varphi_n, \tilde{\psi}) \in \mathrm{Hom}\,(D', D) \text{ пара } (\lambda_A, \tilde{\psi}) \in \mathrm{Hom}\,(D', D), \quad \text{где}$$

$$\lambda_A\colon x \to A\,(\varphi_1 x, \cdots, \varphi_n x),\ x \in Q'.$$

Множество гомоморфизмов $\mathrm{Hom}\,(D', D)$ будем называть просто суммируемым, если оно $\tilde{\psi}$-суммируемо для любого допустимого $\tilde{\psi}$. При этом отображение $\tilde{\psi}\colon \Sigma' \to \Sigma$ называется допустимым, если существует отображение $\varphi\colon Q' \to Q$ такое, что $(\varphi, \tilde{\psi}) \in \mathrm{Hom}\,(D', D)$. Наконец, алгебру D будем называть абелевой, если $\mathrm{Hom}\,(D', D)$ суммируем для любой T-алгебры D', для которой $\mathrm{Hom}\,(D', D) \neq \varnothing$.

Теорема 8. *T-алгебра D абелева тогда и только тогда, когда в ней выполняется сверхтождество*

$$X\,[Y\,(x_{11}, \cdots, x_{1n}), \cdots, Y\,(x_{m1}, \cdots, x_{mn})] =$$
$$= Y\,[X\,(x_{11}, \cdots, x_{m1}), \cdots, X\,(x_{1n}, \cdots, x_{mn})]$$

для любых m, $n \in T$.

Доказательство. Рассмотрим T-алгебру слов $U\,(X)$, где $X\{x_1, \cdots, x_m\}$, $U = \{X_1, X_2, \cdots\}$ и произвольную $m \times n$ матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11}, \cdots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}, \cdots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

с элементами из множества Q. Положим

$$\varphi_i^0\, x_j = a_{ji},\ 1 \leqslant j \leqslant m,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\tilde{\psi}\, X_i = A_i,\ A_i \in \Sigma,\ i = 1, 2, \cdots$$

и продолжим пару $(\varphi_i^0, \tilde{\psi})$ до гомоморфизма $(\varphi_i, \tilde{\psi})\colon U\,(X) \Rightarrow D$ (в силу теоремы 4). Доказываемое утверждение теперь вытекает из следующих равенств:

$$A_1\,[A_2\,(a_{11}, \cdots, a_{1n}), \cdots, A_2\,(a_{m1}, \cdots, a_{mn})] = A_1\,[A_2\,(\varphi_1 x_1, \cdots$$
$$\cdots, \varphi_n\, x_1), \cdots, A_2\,(\varphi_1\, x_m, \cdots, \varphi_n\, x_m)] =$$

$$= [\tilde{\psi}\, X_1]\,(\lambda_{A_2}\, x_1, \cdots, \lambda_{A_2}\, x_m),$$

$$A_2\,[A_1\,(a_{11}, \cdots, a_{m1}), \cdots, A_1\,(a_{1n}, \cdots, a_{mn})] =$$

$$= A_2[[\tilde{\psi}\, X_1](\varphi_1 x_1, \cdots, \varphi_1\, x_m), \cdots, [\tilde{\psi}\, X_1](\varphi_n\, x_1, \cdots, \varphi_n\, x_m)] =$$
$$= A_2\,[\varphi_1\,[X_1\,(x_1, \cdots, x_m), \cdots, \varphi_n\,[X_1\,(x_1, \cdots, x_m)]] =$$
$$= \lambda_{A_2}\,[X_1\,(x_1, \cdots, x_m)].$$

Из доказанной теоремы следует, что класс однотипных абелевых алгебр образует многообразие.

В категории всех групповых систем абелевыми алгебрами являются коммутативные группы и только они.

В категории всех полугрупп с единицей абелевыми алгебрами будут коммутативные полугруппы и только они. Однако, *полное описание всех абелевых алгебр в многообразии всех полугрупп остается еще открытым.*

Полное описание абелевых алгебр в категории всех квазигрупп дает следующая теорема (см. [15]): *квазигруппа $Q(\cdot)$ абелева тогда и только тогда, когда существует коммутативная группа $Q(+)$ такая, что*

$$x\cdot y=\varphi x+c+\psi y, \text{ где } \varphi,\ \psi\in Aut\,[Q(+)],\ \varphi\psi=\psi\varphi \text{ и } c\in Q.$$

Некоторые простые результаты об абелевых группоидах имеются в работах [16] и [17].

§ 10. О топологических алгебрах

Понятие обычной топологической алгебры впервые было определено в работах А. И. Мальцева [18]. Однако, изложенный в настоящей работе подход к алгебраическим понятиям, приводит к более общему определению понятия топологической алгебры. А именно, алгебру $\langle Q;\ \Sigma\rangle$, где $\Sigma=\bigcup\limits_n\Sigma_n$ и Σ_n — совокупность всех n-арных операций из Σ, будем называть топологической алгеброй, если Q и каждый из множеств Σ_n являются такими топологическими пространствами, что:

а) каждая операция $A\in\Sigma$ ($|A|=n$) непрерывна в топологии Q, т. е. для любой окрестности V точки $y=A\ (x_1,\cdots,x_n)$ существуют такие окрестности $U_1,\cdots,U_n$ точек $x_1,\cdots,x_n\in Q$, что $A\ (U_1,\cdots,U_n)\subseteq V$;

б) каждая операция $A\in\Sigma$ ($|A|=n$) непрерывна в топологии Σ_n, т. е. для любой окрестности V точки $y=A\ (x_1,\cdots,x_n)$ существует такая окрестность U точки $A\in\Sigma_n$, что $U\ (x_1,\cdots,x_n)\subseteq V$.

В частности, если множества Σ_n имеют дискретную топологию, то введенное понятие совпадает с обычным понятием топологической алгебры.

Понятие топологической алгебры в смысле М. С. Бургина [19] также является частным случаем введенного понятия.

Если алгебра $\langle Q;\ \Sigma\rangle$ является T-алгеброй, то соответствующая топологическая алгебра называется топологической T-алгеброй. Определения подалгебр, фактор-алгебр, непрерывных гомоморфизмов, прямого произведения, многообразия топологических алгебр определяется естественным путем.

Топологическая алгебра $R'=\langle Q';\ \Sigma'\rangle$ называется подалгеброй топологической алгебры $R=\langle Q;\ \Sigma\rangle$, если алгебра $\langle Q';\ \Sigma'\rangle$ есть подалгебра алгебры $<Q; \Sigma>$, а топологические пространства Q' и Σ'_a являются соответственно подпространствами Q и Σ_n.

Гомоморфизм T-алгебр $(\varphi, \overline{\psi})$: $R \Rightarrow R'$ называется непрерывным гомоморфизмом топологических T-алгебр $R = <Q; \Sigma>$ и $R' = <Q'; \Sigma'>$, если отображения $\varphi: Q \to Q'$ и $\widetilde{\psi}_n: \Sigma_n \to \Sigma'_n$ являются непрерывными, где $\widetilde{\psi}_n = \overline{\psi}|_{\Sigma_n}$, $n \in T$.

Прямое произведение семейства топологических T-алгебр

$$\mathfrak{M} = \{R_i | R_i = <Q_i; \Sigma_i>, i \in J\}$$

есть топологическая T-алгебра $\hat{R} = <\hat{Q}; \hat{\Sigma}>$, где $\hat{R}$ как алгебра есть прямое произведение алгебр R_i и топологии на декартовых произведениях $\hat{Q}$ и $\hat{\Sigma}_n$ определены по А. Н. Тихонову.

Класс топологических алгебр называется многообразием, если алгебра этого класса образует многообразие в алгебраическом смысле (§ 7).

Теорема 9. *Класс топологических T-алгебр является многообразием тогда и только тогда, когда он наследственен, гомоморфно и мультипликативно замкнут.*

При этом, класс топологических T-алгебр называется:

а) наследственным, если он вместе с каждой топологической T-алгеброй содержит все ее топологические T-подалгебры,

б) гомоморфно замкнутым, если он вместе с каждой топологической алгеброй содержит каждый ее непрерывно-гомоморфный образ,

в) мультипликативно замкнутым, если он вместе с каждой системой топологических алгебр содержит прямое произведение этого семейства.

Доказательство теоремы 9 проводится по той же категорийной схеме, что и доказательство теоремы 6.

Ереванский государственный
университет

Поступила 11.II.1976

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ. Ունիվերսալ հանրահաշիվների տեսության վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում զարգացվում է ունիվերսալ հանրահաշիվների մի տեսություն, որը ինչ որ չափով տարբերվում է ունիվերսալ հանրահաշիվների սովորական տեսությունից։ Այդ տեսությունը առաջանում է երկրորդ աստիճանի հանրահաշիվների տեսությունից, [1]։ Այդ ուղղությամբ ծագում են մի շարք նոր խնդիրներ, որոնց մի մասը ձևակերպվում են աշխատանքում։ Ընդ որում այդ խնդիրների մի մասը վերաբերվում է դասական հանրահաշիվներին՝ խմբերին, օղակներին և այլն։

Yu. M. MOVSISIAN. *On the theory of universal algebras* (summary)

In this work the author develops a universal algebra theory that differs from the usual universal algebra theory. This theory rises from the second stop algebra theory developed by the author [1]. It naturally gives rise to some new problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. М. Мовсисян.* Бипримитивные классы алгебр второй ступени, Мат. исслед. АН МССР., IX, 1 (31), 1974, 70—82.
2. *А. И. Мальцев.* Алгебраические системы, Изд. „Наука", 1970.
3. *П. Кон.* Универсальная алгебра, Изд. „Мир", 1968.
4. *Ю. М. Мовсисян.* О некоторых понятиях общей алгебры, „Научный работник ЕГУ", № 18, 1973, 3—11.
5. *K. Glazek, J. Michalski.* On weak homomorphisms of general non-indexed algebras, Bul. Pol. Acad., Ser. mat., astron., phys., 22, № 7, 1974, 651—656.
6. *T. Fujiwara.* On mapping between algebraic system, Osaka Math. J., 11, № 2, 1959, 153—172.
7. *G. Grätzer.* Universal algebras, Princeton, 1968.
8. *Ю. М. Мовсисян.* Сверхтождества ассоциативности в системах полугрупп, ДАН Арм.ССР, LXII, № 5, 1976.
9. *А. И. Мальцев.* Свободные топологические алгебры, Изв. АН СССР, сер. матем. 21, № 2, 1957, 171—198.
10. *В. Д. Белоусов.* Уравновешенные тождества в квазигруппах, Мат. сборник, 70, (112), № 1, 55—97.
11. *Ю. М. Мовсисян.* Несократимые уравновешенные сверхтождества, исслед. по теории квазигрупп и групп, Кишинев, 1973, 115—127.
12. *Ю. М. Мовсисян.* О системах полугрупп, Уч. записки ЕГУ, № 2, 1975, 25—31.
13. *J. Aczel.* Proff of theorem on distributive type hyperidentities, Algebra Univers., 1, № 1, 1971, 1—6.
14. *S. Fajtlowicz.* Birkhoff theorem in the category of non-indeched algebras, Bul., Acad. Polon., Ser. Math. Astr. Phys., 17, 1969, 273—275.
15. *R. H. Bruck.* Some result in the theory of quasigroups, Trans. Amer. Math. Soc., 55, 1944, 19—52.
16. *R. Strecker.* Über entropische Gruppoide, Potsdam. Forsch. R., B, № 3, 1974, 153—154.
17. *I. Lehman.* Einige Ergebnise zur Theorie der bisymmetrischen Quasigruppen, там же, 154—156.
18. *А. И. Мальцев.* К общей теории алгебраических систем, Мат. сборник, 35 (77), № 1, 1954, 3—20.
19. *М. С. Бургин.* Топологические алгебры с непрерывными системами операций, ДАН СССР, 213, № 3, 1973, 505—508.