

В. П. ГРИГОРЬЕВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ

В в е д е н и е

Работа посвящена изучению разрешимости на всей оси нелинейных дифференциально-операторных уравнений вида

$$P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u(t) + Au(t) + \beta(t, u(t), u'(t)) = h(t), \quad (1)$$

где

$$P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u(t) = \sum_{q=0}^{2s} a_q \frac{d^q}{dt^q} u(t), \quad a_q \in R^1, \quad a_{2s} = (-1)^{s-1};$$

A — линейный неограниченный формально самосопряженный оператор и оператор $\beta(t, u, u')$ зависит нелинейно от u, u' и является в некотором смысле близким к монотонному оператору. Дифференциальные уравнения вида (1), не содержащие нелинейностей, изучались Дубинским Ю. А. в работах [1]—[3] и были названы им частично гиперболическими. Если $s = 1$, то уравнение (1) есть нелинейное волновое уравнение, играющее важную роль в теоретической физике и изучавшееся многими авторами. При $s = 2$ разрешимость дифференциального уравнения с частными производными типа (1), возникающего в теории ангармонических решеток, изучалась в работе [4].

§ 1. Обозначения и предположения

Пусть даны комплексные сепарабельные гильбертовы пространства G и H такие, что $G \subset H$ с непрерывной операцией вложения и G плотно в H . Обозначим через $H(R^1; s; G; \gamma)$ множество функций $u(t)$, определенных и измеримых на оси R^1 со значениями в G , удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{H(R^1; s; G; \gamma)}^2 = \int_{R^1} (\|u^{(s)}(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_G^2) e^{-\gamma t} dt < +\infty,$$

где γ — некоторое фиксированное вещественное число.

Будем рассматривать также пространства $L_{p, \gamma}(R^1; X)$, где X — некоторое B -пространство и $p > 1$. Это пространства функций $u(t)$, определенных и измеримых на R^1 со значениями в X и таких, что

$$\|u\|_{L_{p, \gamma}(R^1; X)}^p = \int_{R^1} \|u(t)\|_X^p e^{-\gamma t} dt < +\infty.$$

Если Y — некоторое B -пространство, плотное в H с непрерывной операцией вложения, то через Y' будет обозначаться пространство, сопряженное к Y . H отождествляется со своим сопряженным H' . Если $u \in Y$ и $v \in Y'$, то скалярное произведение между этими элементами будут обозначаться через (u, v) , в частности, если $Y=H$, то это обычное скалярное произведение в H .

Будем также предполагать, что нам дано некоторое рефлексивное B -пространство F , которое плотно и непрерывно вложено в H , $F \cap G$ — сепарабельно, плотно вложено в H , оператор вложения непрерывен.

Скалярное произведение между элементами $u \in F$ и $v \in F'$, где F' — сопряженное к F , будет обозначаться через $[u, v]$. Если p — действительное число, $p > 1$, то скалярное произведение между $u \in L_{p, \gamma}(R^1; F)$ и $v \in L_{p', \gamma}(R^1; F')$ будет обозначаться через $\{u, v\}_\gamma$. Тогда

$$\{u(t), v(t)\}_\gamma = \int_{R^1} [u(t), v(t)] e^{-\gamma t} dt.$$

Если Z — некоторое B -пространство функций $u(t)$, которое плотно и непрерывно вложено в $L_{2, \gamma}(R^1; H)$ и Z' — его сопряженное, то скалярное произведение между элементами из Z и Z' будет обозначаться через $\langle u, v \rangle_\gamma$.

В частности, если $Z = L_{2, \gamma}(R^1; H)$, то это обычное скалярное произведение в $L_{2, \gamma}(R^1; H)$. В этом случае

$$\langle u, v \rangle_\gamma = \int_{R^1} (u(t), v(t)) e^{-\gamma t} dt.$$

Это обозначение распространяется и на тот случай, когда указанный интеграл существует, возможно в смысле распределений на R^1 ; индекс γ опускается, если $\gamma = 0$.

Условие 1. Предполагается, что на элементах пространства $G \times G$ определена непрерывная полубилинейная эрмитова форма $a(u, v)$, удовлетворяющая условию

$$a(u, u) \geq c_1 \|u\|_0^2 - c_2 \|u\|_1^2$$

для любого $u \in G$, где $c_1 > 0$, $c_2 \geq 0$ — константы, не зависящие от u .

Очевидно, существует константа $c_3 > 0$ такая, что для любых $u \in G$ и $v \in G$

$$|a(u, v)| \leq c_3 \|u\|_0 \cdot \|v\|_0.$$

Если функции $u(t)$ и $v(t)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(R^1; G)$, то интеграл $\int_{R^1} a(u, v) e^{-\gamma t} dt$ существует и будет обозначаться через

$\langle a(u, v) \rangle_\gamma$. Заметим, что так как отображение $v \rightarrow a(u, v)$ непрерывно и полулинейно (линейно в вещественном случае), то каждому $u \in G$ соответствует единственный элемент $Au \in G'$ такой, что

$$(Au, v) = a(u, v), (v \in G).$$

Условие 2. Предполагается, что дан нелинейный оператор β , отображающий F в F' и удовлетворяющий при некотором фиксированном $\gamma > 0$ следующим условиям:

а) если $u(t) \in L_{p,\gamma}(R^1; F)$, то $\beta(u) \in L_{p',\gamma}(R^1; F')$, $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$;

б) β переводит ограниченные множества в $L_{p,\gamma}(R^1; F)$ в ограниченные множества из $L_{p',\gamma}(R^1; F')$;

в) β слабо непрерывно отображает конечномерные подмножества из $L_{p,\gamma}(R^1; F)$ в $L_{p',\gamma}(R^1; F')$;

г) $\operatorname{Re} \{ \beta(u), u \}_\gamma \geq c_4 \|u\|_{L_{p,\gamma}(R^1; F)}^p - c_5 \|u\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 - c_6$ для любой функции $u(t) \in L_{p,\gamma}(R^1; F) \cap L_{2,\gamma}(R^1; H)$;

д) $\operatorname{Re} \{ \beta(u) - \beta(v), u - v \}_\gamma \geq 0$ для любых функций $u(t)$ и $v(t)$ из пространства $L_{p,\gamma}(R^1; F)$;

е) Если последовательность гладких функций $u_n(t)$ такова, что

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \text{ слабо в } L_{2,\gamma}(R^1; G),$$

$$u'_n(t) \rightarrow u'(t) \text{ слабо в } L_{2,\gamma}(R^1; H) \text{ и в } L_{p,\gamma}(R^1; F),$$

$u''_n(t) \rightarrow u''(t)$ слабо в $L_{2,\gamma}(R^1; H)$, то для некоторой подпоследовательности $u_{n_s}(t)$ $\beta(u_{n_s}) \rightarrow \beta(u')$ слабо в $L_{p',\gamma}(R^1; F')$.

Условие 3. Предполагается, что дан дифференциальный оператор порядка $2s$

$$P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u(t) \equiv \sum_{q=0}^{2s} a_q u^{(q)}(t), \quad a_q \in R^1, \quad u^{(q)}(t) \equiv \frac{d^q u(t)}{dt^q}$$

такой, что $a_{2s} = (-1)^{s-1}$.

§ 2. Теорема существования и единственности

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1, 2, 3 при некотором $\gamma > 0$, и пусть $s > 1$. Тогда существует такое вещественное число $\alpha(\gamma)$, что при $\lambda \geq \alpha(\gamma)$ для любой функции $h(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; H)$ такой, что $h'(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G')$, найдется единственная функция $u(t)$, удовлетворяющая условиям:

$$1) u(t) \in H(R^1; s; G; \tau);$$

$$2) u'(t) \in L_{p, \tau}(R^1; F);$$

$$3) u^{(l)}(t) \in L_{2, \tau}(R^1; G') + L_{p', \tau}(R^1; F') \text{ при } s < l \leq 2s;$$

4) для любой функции $v(t) \in L_{2, \tau}(R^1; G) \cap L_{p, \tau}(R^1; F)$ справедливо тождество

$$\left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u, v \right\rangle_{\tau} + \langle a(u, v) \rangle_{\tau} + \lambda \langle u, v \rangle_{\tau} + \{\beta(u'), v\}_{\tau} = \langle h, v \rangle_{\tau}.$$

Доказательство. Выберем систему функций $v_l(t)$, определенных на R^1 со значениями в $F \cap G$ таких, что

а) $v_l(t)$ — гладкие и финитные на R^1 ;

б) $v_l(t)$ образуют полную систему (линейные комбинации плотны в пространстве $C_0^{\infty}(R^1; F \cap G)$).

Приближенные решения определим формулой

$$u_n(t) = \sum_{l=1}^n c_{ln} \int_{-\infty}^t v_l(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где коэффициенты c_{ln} задаются как решения нелинейной алгебраической системы „моментных уравнений“ вида

$$A(u_n, v_i) \equiv \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, v_i \right\rangle_{\tau} + \langle a(u_n, v_i) \rangle_{\tau} + \lambda \langle u_n, v_i \rangle_{\tau} + \{\beta(u'_n), v_i\}_{\tau} = \langle h, v_i \rangle_{\tau}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Для разрешимости этой системы достаточно в силу условия 2в) выполнения „условия острого угла“, (см. [6], [7], [8]), которое в данном случае имеет вид

$$\operatorname{Re} \left[\left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, u'_n \right\rangle_{\tau} + \langle a(u_n, u'_n) \rangle_{\tau} + \lambda \langle u_n, u'_n \rangle_{\tau} + \{\beta(u'_n), u'_n\}_{\tau} \right] \geq c_7 \langle u_n, u_n \rangle_{\tau} - c_8. \quad (3)$$

В выражении $A(u_n, u'_n)$ проинтегрируем по частям во втором и третьем членах с учетом того, что $v_l(t)$ финитные функции. Тогда получим

$$\operatorname{Re} A(u_n, u'_n) = \operatorname{Re} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, u'_n \right\rangle_{\tau} + \frac{\gamma}{2} \langle a(u_n, u_n) \rangle_{\tau} + \frac{\lambda \gamma}{2} \langle u_n, u_n \rangle_{\tau} + \operatorname{Re} \{\beta(u'_n), u'_n\}_{\tau}. \quad (4)$$

Обозначим далее через $w_n(t)$ функцию, равную $u_n(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$. Тогда выражение $\operatorname{Re} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, u'_n \right\rangle_{\tau}$ можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, u'_n \right\rangle_\gamma = \operatorname{Re} \sum_{\substack{0 \leq r < q \\ q=0}}^{\infty} a_q \beta_{rq} \int_{R^1} \left(w_n^{(r)}, w'_n + \frac{\gamma}{2} w_n \right) dt,$$

где $\beta_{rq} = \frac{q!}{r! (q-r)!} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{q-r}$. Интегрируя по частям, уравниванием порядки дифференцирования и, пользуясь равенством Парсеваля, получаем

$$\operatorname{Re} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, u'_n \right\rangle_\gamma = \int_{R^1} \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\tilde{w}_n\|_H^2 d\tau, \quad (5)$$

где $\tilde{w}_n = \tilde{w}_n(\tau)$ — образ Фурье функции $w_n(t)$. Из (4), используя условия 1 и 2г), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A(u_n, u'_n) &\geq \int_{R^1} \left\{ \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] - c_5 \tau^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\lambda - c_2) \gamma}{2} \right\} \|\tilde{w}_n(\tau)\|_H^2 d\tau - c_6. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, есть многочлен по τ степени $2s > 2$. Поэтому найдется такое вещественное число $\alpha(\gamma)$, что при $\lambda > \alpha(\gamma)$ для любого $\tau \in R^1$ будет справедливо неравенство

$$\begin{aligned} A(\tau, \gamma, \lambda) &\equiv \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] - c_5 \tau^2 + \\ &\quad + \frac{(\lambda - c_2) \gamma}{2} > c_9 > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

откуда получаем (3).

Таким образом, система алгебраических уравнений (2) разрешима и, тем самым, приближенные решения $u_n(t)$ определены. Умножим уравнения системы (2) на c_{in} и просуммируем по i . Получим

$$A(u_n, u'_n) = \langle h, u'_n \rangle_\gamma.$$

Из равенства (4) аналогично тому, как выводилось неравенство (6), но, не одевая член $\frac{\gamma}{2} \langle \alpha(u_n, u_n) \rangle_\gamma$, получим

$$\operatorname{Re} A(u_n, u'_n) \geq \int_{R^1} A(\tau, \gamma, \lambda + c_2) \|\tilde{w}_n\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle \alpha(u_n, u_n) \rangle_\gamma - c_6. \quad (8)$$

Поскольку $A(\tau, \gamma, \lambda + c_2) > A(\tau, \gamma, \lambda) > 0$, то

$$\langle \alpha(u_n, u_n) \rangle_\gamma \leq \frac{2}{\gamma} \operatorname{Re} \langle h, u'_n \rangle_\gamma + \frac{2c_6}{\gamma}. \quad (9)$$

Интегрируя по частям в выражении $\langle h, u_n' \rangle_\gamma$ и применяя неравенство Шварца, получим

$$\begin{aligned} \langle a(u_n, u_n) \rangle_\gamma &\leq c_{10} \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} (\|h\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')} + \gamma \|h\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')}) + \\ &+ \frac{2c_8}{\gamma} = \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} K_\gamma(h) + \frac{2c_8}{\gamma}. \end{aligned} \quad (10)$$

По условию 1 имеем $a(u_n, u_n) \geq c_1 \|u_n\|_0^2 - c_2 \|u_n\|_H^2$. Поэтому

$$c_1 \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)}^2 - c_2 \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 \leq \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} K_\gamma(h) + \frac{2c_8}{\gamma}. \quad (11)$$

Из неравенства (3) аналогично получаем

$$\|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 \leq \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} \cdot \frac{\gamma}{2c_9} K_\gamma(h) + \frac{c_8}{c_9}. \quad (12)$$

Поэтому из (11) и (12) имеем

$$\|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)}^2 \leq c_{11} \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} K_\gamma(h) + c_{12}$$

или

$$\|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} \leq L_\gamma(h). \quad (13)$$

В частности, из неравенства (10) получим, что

$$\langle a(u_n, u_n) \rangle_\gamma \leq K_\gamma(h) L_\gamma(h) + \frac{2c_8}{\gamma}. \quad (14)$$

Далее выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы для любого $\tau \in R^1$ выполнялось неравенство

$$A(\tau, \gamma, \lambda) > \varepsilon \tau^{2\lambda}.$$

Тогда из неравенств (6) и (13) получим

$$\|(u_n e^{-\frac{\gamma t}{2}})^{(s)}\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 < c_8 + L_\gamma(h) K_\gamma(h).$$

Или, переходя к эквивалентной норме

$$\|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 + \|u_n^{(s)}\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 < c_{13} (1 + L_\gamma(h) K_\gamma(h)). \quad (15)$$

Далее, используя (4) и имеющиеся оценки (6), (7), (13), (14), (15) и условие 2 г), получим

$$\|u_n'\|_{L_{p,\gamma}(R^1; F')}^p \leq M_\gamma(h), \quad (16)$$

где $M_\gamma(h)$ зависит от $\|h\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')}$ и $\|h'\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')}$.

Полученные оценки позволяют сделать вывод, что существует такая подпоследовательность $u_{n_j}(t)$, что $u_{n_j}(t) \rightarrow u(t)$ слабо в $H(R^1; s; G; \gamma)$ и $u_{n_j}'(t) \rightarrow u'(t)$ слабо в $L_{p,\gamma}(R^1; F')$. По условию 2 е) эта подпоследовательность может быть выбрана так, чтобы $\beta(u_{n_j}') \rightarrow \beta(u')$ слабо в $L_{p',\gamma}(R^1; F')$. Переходя к пределу при $j \rightarrow +\infty$ в каждом из

уравнений системы (2), получим, что при любом $i = 1, 2, \dots$ будут иметь место равенства

$$\begin{aligned} \langle P_{2s} u, v_i \rangle_\gamma + \langle a(u, v_i) \rangle_\gamma + \lambda \langle u, v_i \rangle_\gamma + \\ + \{\beta(u'), v_i\}_\gamma = \langle h, v_i \rangle_\gamma. \end{aligned}$$

Поскольку по предположению функции $v_i(t)$ образуют полную систему в пространстве $C_0^\infty(R^1; F \cap G)$, то, производя замыкание, получим, что для любой функции $v(t)$ из этого пространства справедливо тождество

$$\begin{aligned} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u, v \right\rangle_\gamma + \langle a(u, v) \rangle_\gamma + \lambda \langle u, v \rangle_\gamma + \\ + \{\beta(u'), v\}_\gamma = \langle h, v \rangle_\gamma. \end{aligned} \quad (17)$$

Положим в этом равенстве $v \cdot e^{-\gamma t} = \varphi(t) \cdot \xi$, где $\varphi(t) \in C_0^\infty(R^1)$ и ξ — элемент пространства $F \cap G$. Равенство (17) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_{R^1} (u, \xi) P_{2s}^* \left(\frac{d}{dt} \right) \varphi(t) dt + \int_{R^1} a(u, \xi) \varphi(t) dt + \lambda \int_{R^1} (u, \xi) \varphi(t) dt + \\ + \int_{R^1} [\beta(u'), \xi] \varphi(t) dt = \int_{R^1} (h, \xi) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Здесь

$$P_{2s}^* \left(\frac{d}{dt} \right) \varphi \equiv \sum_{q=0}^{2s} (-1)^q \alpha_q \varphi^{(q)}.$$

Скалярное произведение (u, ξ) задает непрерывный функционал $j_1(t)$ над пространством $F \cap G$, причем $|j_1(t)| \leq \|u\|_{G'}$, где через $|j_1(t)|$ обозначена норма функционала. Аналогично $a(u, \xi) = j_2(t)$ и

$$|j_2(t)| \leq c_s \|u\|_{G'}; \quad [\beta(u'), \xi] = j_3(t) \quad \text{и} \quad |j_3(t)| \leq \|\beta(u')\|_{F'}$$

и, наконец, $(h, \xi) = j_4(t)$, $|j_4(t)| \leq \|h\|_{G'}$. Таким образом

$$\begin{aligned} j_1(t) \in L_{2, \gamma}(R^1; G'), \quad j_2(t) \in L_{2, \gamma}(R^1; G), \\ j_3(t) \in L_{p', \gamma}(R^1; F') \quad \text{и} \quad j_4(t) \in L_{2, \gamma}(R^1; G). \end{aligned}$$

Пусть

$$j(t) = j_4(t) - \lambda j_1(t) - j_2(t) - j_3(t).$$

Тогда

$$\int_{R^1} (u, \xi) P_{2s}^* \left(\frac{d}{dt} \right) \varphi(t) dt = \int_{R^1} (j(t), \xi) \varphi(t) dt,$$

что означает, что $u(t)$ имеет производные в смысле распределений на R_1^1 до порядка $2s$ и является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u(t) = j(t),$$

откуда следует, что $u^{(l)}(t)$ при $l \leq 2s$ представимы в виде суммы двух слагаемых, принадлежащих соответственно пространствам

$$L_{2,\gamma}(R^1; G') \text{ и } L_{p',\gamma}(R^1; F'), \text{ так как } L_{2,\gamma}(R^1; G) \subset L_{2,\gamma}(R^1; G').$$

Производя замыкание в равенстве (17), получим, что оно будет справедливым для любой функции $v(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G) \cap L_{p',\gamma}(R^1; F)$.

Покажем, что функция $u(t)$ единственна. Выберем гладкую финитную функцию $\eta(t)$ со значениями в R^1 такую, что

$$\int_{R^1} \eta(\tau) d\tau = 1; \quad \eta(t) = \eta(-t), \quad \eta(t) \in C_0^\infty(R^1).$$

Обозначим

$$\eta_k(t) = k\eta(kt) \text{ и } v_k(t) = \{[u'(t) * \eta_k(t)] e^{-\frac{\gamma t}{2}} * \eta_k(t)\} e^{\frac{\gamma t}{2}}.$$

Так как $u'(t) * \eta_k(t) = u(t) * \eta'_k(t)$, то $v_k(t)$ есть бесконечно дифференцируемая функция со значениями в $K \cap G$. Положим в (17) $v(t) = v_k(t)$. Обозначая через $u_k(t)$ свертку $u(t) * \eta_k(t)$, получим

$$\begin{aligned} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_k, u'_k \right\rangle_\gamma + \langle a(u_k, u'_k) \rangle_\gamma + \lambda \langle u_k, u'_k \rangle_\gamma = \\ = \langle h, v_k \rangle_\gamma - \{\beta(u'), v_k\}_\gamma. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что функции $u_k(t)$ гладкие и принадлежат $L_{2,\gamma}(R^1; H)$, а функции $u_k(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ вместе со всеми производными. Учитывая это обстоятельство, проинтегрируем по частям в соотношении (18). Получим

$$\begin{aligned} \int_{R^1} \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\tilde{w}_k(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u_k, u_k) \rangle_\gamma + \\ + \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u_k, u_k \rangle_\gamma = \langle h, v_k \rangle_\gamma - \{\beta(u'), v_k\}_\gamma, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\tilde{w}_k$ — образ Фурье функции $w_k(t) = u_k(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$. Здесь использовано равенство Парсеваля. В равенстве (19) перейдем к пределу при $k \rightarrow +\infty$. Получим

$$\begin{aligned} \int_{R^1} \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\tilde{w}(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u, u) \rangle_\gamma + \\ + \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u, u \rangle_\gamma = \langle h, u' \rangle_\gamma - \{\beta(u'), u'\}_\gamma, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\tilde{w}(\tau)$ — образ Фурье функции $w(t) = u(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$,

Допустим теперь, что существуют две функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$, удовлетворяющие тождеству (17). Тогда их разность $z(t) = u_1(t) - u_2(t)$ будет удовлетворять тождеству

$$\left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) z(t), v(t) \right\rangle_{\Gamma} + \langle a(z, v) \rangle_{\Gamma} + \lambda \langle z, v \rangle_{\Gamma} = \{\beta(u'_2) - \beta(u'_1), v\}_{\Gamma} \quad (21)$$

и равенству

$$\int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - i\tau \right) \right] |\tilde{z}_1(\tau)|_{\mathcal{H}}^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(z, z) \rangle_{\Gamma} + \frac{\lambda\gamma}{2} \langle z, z \rangle_{\Gamma} = \operatorname{Re} \{\beta(u'_2) - \beta(u'_1), u'_1 - u'_2\}_{\Gamma}, \quad (22)$$

где $\tilde{z}_1(\tau)$ — образ Фурье функции $z(t)$ $e^{-\frac{\gamma t}{2}}$. По условию 2 д) правая часть равенства (22) неположительна. С другой стороны, в силу выбора λ , $\lambda \geq a(\gamma)$, левая часть не меньше, чем некоторая положительная константа μ , умноженная на $\|z\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2$.

Следовательно, $\|z\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)} = 0$. Теорема доказана.

§ 2. Теорема существования и единственности.

Случай $s = 1$

В данном параграфе мы будем предполагать, что $s = 1$. Пусть при некотором $\gamma > 0$ выполнены условия 1, 2а), 2б), 2в), 2а), 3а), и пусть при этом же γ для любой функции $u(t) \in L_{p,\gamma}(R^1; F)$

$$\operatorname{Re} \{\beta(u), u\}_{\Gamma} \geq c_4 \|u\|_{L_{p,\gamma}(R^1; F)}^p - c_3, \quad (23)$$

где $c_4 > 0$, $c_3 \geq 0$ и не зависят от u .

Теорема 2. Если выполнены перечисленные выше условия, то найдется такое вещественное число $a(\gamma)$, что при $\lambda \geq a(\gamma)$ для любой функции $h(t)$ такой, что $h(t) \in L_{1,\gamma}(R^1; H)$, $h'(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G)$, найдется единственная $u(t)$, удовлетворяющая условиям:

$$1) u(t) \in H(R^1; 1; G; \gamma);$$

$$2) u'(t) \in L_{p,\gamma}(R^1; F);$$

$$3) u''(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G) + L_{p',\gamma}(R^1; F');$$

4) для любой функции $v(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G) \cap L_{p,\gamma}(R^1; F)$ справедливо тождество

$$\left\langle P_2 \left(\frac{d}{dt} \right) u, v \right\rangle_{\Gamma} + \langle a(u, v) \rangle_{\Gamma} + \lambda \langle u, v \rangle_{\Gamma} + \{\beta(u'), v\}_{\Gamma} = \langle h, v \rangle_{\Gamma}.$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1 приближенные решения $u_n(t)$ строятся путем решения нелинейной алгебраической системы „моментных уравнений“ вида (2). Разрешимость этой системы доказывается аналогично, с той разницей, что замена условия 2 г) условием (23) делает условие $s > 1$ для разрешимости системы необязательным. Априорные оценки в рассматриваемом случае имеют вид

$$\int_{R^1} (\|u_n'\|_H^2 + \|u_n(t)\|_G^2 + \|u_n'(t)\|_F^2) e^{-\gamma t} dt \leq K_\gamma (\|h\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')}^2 + \|h'\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')}^2). \quad (24)$$

Из этих оценок выводим, что существует такая подпоследовательность $u_{n'}(t)$, что $u_{n'}(t) \rightarrow u(t)$ слабо в $H(R^1; 1; G; \gamma)$, $u_{n'}'(t) \rightarrow u'(t)$ слабо в $L_{p,\gamma}(R^1; F)$, $\beta(u_{n'}') \rightarrow \psi(t)$ слабо в $L_{p',\gamma}(R^1; F')$, последнее в силу условия 2 б). Слабый предельный переход в „моментных уравнениях“ и замыкание дают выполнение для любой функции $v(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G) \cap L_{p,\gamma}(R^1; F)$ тождества

$$\left\langle P_2\left(\frac{d}{dt}\right) u, v \right\rangle_\gamma + \langle a(u, v) \rangle_\gamma + \lambda \langle u, v \rangle_\gamma + \langle \psi(t), v \rangle_\gamma = \langle h, v \rangle_\gamma, \quad (25)$$

причем аналогично тому как это делается в доказательстве теоремы 1 получаем, что $u''(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G') + L_{p',\gamma}(R^1; F')$.

Покажем, что $\psi(t) = \beta(u')$. Возьмем некоторую функцию $\eta(t)$,

$$\eta(t) \in C_0^\infty(R^1), \quad \eta(t) = \eta(-t), \quad \int_{R^1} \eta(t) dt = 1,$$

и рассмотрим функцию $\eta_k(t) = k \eta(kt)$. Очевидно, что $\eta_k(t) \rightarrow \delta(t)$ при $k \rightarrow +\infty$. Далее рассмотрим функцию $u_k(t) = u(t) * \eta_k(t)$ и функцию $v_k(t) = [(u_k' e^{-\gamma t}) * \eta_k(t)] e^{\gamma t}$.

В тождестве (25) положим $v(t) = v_k(t)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \left\langle P_2\left(\frac{d}{dt}\right) u, v_k \right\rangle_\gamma + \langle a(u, v_k) \rangle_\gamma + \lambda \langle u, v_k \rangle_\gamma = \\ = \langle h, v_k \rangle_\gamma - \langle \psi(t), v_k \rangle_\gamma \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left\langle P_2\left(\frac{d}{dt}\right) u_k, u_k' \right\rangle_\gamma + \langle a(u_k, u_k') \rangle_\gamma + \lambda \langle u_k, u_k' \rangle_\gamma = \\ = \langle h, v_k \rangle_\gamma - \langle \psi(t), v_k \rangle_\gamma. \end{aligned} \quad (26)$$

Интегрируя по частям и пользуясь равенством Парсеваля, получим

$$\int_{R^1} \operatorname{Re} \left[P_2\left(i\tau + \frac{\gamma}{2}\right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau\right) \right] \|\tilde{w}_k\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u, u_k) \rangle_\gamma +$$

$$+ \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u_k, u_k \rangle_T = \langle h, v_k \rangle_T - \{\psi(t), v_k\}_T,$$

где $\bar{w}_k(\tau)$ — образ Фурье функции $w_k(t) = u_k(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$.
В этом равенстве перейдем к пределу при $k \rightarrow +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{Re} \left[P_2 \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\bar{w}(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u, u) \rangle_T +$$

$$+ \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u, u \rangle_T = \langle h, u' \rangle_T - \{\psi(t), u'\}_T. \quad (27)$$

Далее, из „моментных уравнений“, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\left\langle P_2 \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, v_l \right\rangle_T + \langle a(u_n, v_l) \rangle_T + \lambda \langle u_n, v_l \rangle_T +$$

$$+ \{\beta(u'_n), v_l\}_T = \langle h, v_l \rangle_T, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

путем умножения их на c_{ln} и суммирования по i с последующим интегрированием по частям выводим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{Re} \left[P_2 \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\bar{w}_n(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u_n, u_n) \rangle_T +$$

$$+ \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u_n, u_n \rangle_T = \langle h, u'_n \rangle_T - \{\beta(u'_n), u'_n\}_T.$$

Возьмем нижний предел от правой и левой части и воспользуемся неравенством: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \geq \|u\|$, если $u_n \rightarrow u$ слабо в B -пространстве. Получим

$$\int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{Re} \left[P_2 \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\bar{w}(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u, u) \rangle_T +$$

$$+ \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u, u \rangle_T + \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{\beta(u'_n), u'_n\}_T \leq \operatorname{Re} \langle h, u' \rangle_T.$$

Сравнивая это неравенство с (27), получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{\beta(u'_n), u'_n\}_T \leq \operatorname{Re} \{\psi(t), u'\}_T. \quad (28)$$

Из этого неравенства следует, что $\psi(t) = \beta(u')$. Действительно, если $\varphi(t)$ — произвольная функция из пространства $L_{p, \gamma}(R^1; F)$, то

$$-\operatorname{Re} \{\beta(\varphi), u'\}_T = -\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{\beta(\varphi), u'_\gamma\}_T,$$

$$-\operatorname{Re} \{\varphi(t), \varphi(t)\}_T = -\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{\beta(u'_\gamma), \varphi(t)\}_T,$$

$$\operatorname{Re} \{\beta(\varphi), \varphi\}_T = \operatorname{Re} \{\beta(\varphi), \varphi\}_T.$$

Складывая эти равенства с неравенством (28), получим

$$\operatorname{Re} \{\psi - \beta(\varphi), u' - \varphi\}_T \geq \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \{\beta(u') - \beta\varphi, u' - \varphi\}_T \geq 0,$$

последнее в силу условия 2 д). Из этого неравенства вытекает, что

$$\operatorname{Re} \{\psi - \beta(\varphi), u' - \varphi\}_T \geq 0.$$

Полагая $\varphi(t) = u'(t) - \delta \varphi_1(t)$, где $\varphi_1(t) \in L_{p, \gamma}(R^1; F)$ и устремляя затем в неравенстве $\delta \rightarrow 0$, получим, в силу условия 2 в),

$$\operatorname{Re} \{\psi(t) - \beta(u'), \varphi_1(t)\}_T \geq 0$$

для любой функции $\varphi_1(t) \in L_{p, \gamma}(R^1; F)$, что возможно лишь при $\psi(t) = \beta(u')$. Таким образом, существование функции $u(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы, доказано. Покажем, что такая функция единственна. Допустим противное: существуют две различные функции $u(t)$ и $v(t)$. Тогда для разности $w(t) = u(t) - v(t)$ будет справедливо равенство

$$\int_{R^1} \operatorname{Re} \left[P_2 \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\tilde{z}(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(w, w) \rangle_T + \frac{\lambda\gamma}{2} \langle w, w \rangle_T = \{\beta(v') - \beta(u'), u' - v'\}_T,$$

где $\tilde{z}(\tau)$ — образ Фурье функции $w(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$.

Из этого равенства, как и в доказательстве теоремы 1, следует, что $u(t) = v(t)$. Теорема доказана.

§ 3. Другой тип уравнений. Теорема существования

В данном параграфе рассматривается случай, когда $\beta = \beta(u)$, т. е. уравнение имеет вид

$$P_2 \left(\frac{d}{dt} \right) u(t) + Au(t) + \beta(u) + \lambda u(t) = h(t).$$

Пусть H_1 — гильбертово пространство, плотно и непрерывно вложенное в H . В свою очередь G плотно лежит в H_1 и вложение G в H_1 вполне непрерывно. Предполагается, что оператор $\beta(u)$ удовлетворяет при некотором $\gamma > 0$ условиям 2 а), 2 б), 2 в), а также условиям:

а) для любой функции $u(t) \in W_{p, \gamma}^1(R^1; F) \cap L_{2, \gamma}(R^1; H)$

$$\operatorname{Re} \{\beta(u), u'\}_T \geq c_4 \|u\|_{p, \gamma(R^1; F)}^p - c_5 \|u\|_{2, \gamma(R^1; H)}^2 - c_6;$$

б) если последовательность $u_n(t)$ такова, что $u_n(t) \rightarrow u(t)$ слабо в $L_{p, \gamma}(R^1; F)$ и сильно в $L_{2, \gamma}(R^1; H_1)$, то $\beta(u_n(t)) \rightarrow \beta(u)$ слабо в $L_{p', \gamma}(R^1; F')$. Оператор $P_2 \left(\frac{d}{dt} \right)$ предполагается удовлетворяющим условию 3 а) и форма $a(u, v)$ — условию 1.

Теорема 3. Если выполнены при некотором $\gamma > 0$ перечисленные выше условия, то существует вещественное число $\alpha(\gamma)$, такое, что при $\lambda \geq \alpha(\gamma)$ для любой функции $h(t)$ такой, что $h(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G')$, $h'(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G')$, найдется функция $u(t)$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $u(t) \in H(R^1; s; G; \gamma)$;
- 2) $u(t) \in L_{p,\gamma}(R^1; F)$;
- 3) $u^{(l)}(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G') + L_{2,\gamma}(R^1; F')$ при $s < l \leq 2s$;
- 4) для любой функции $v(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G) \cap L_{2,\gamma}(R^1; F)$ справедливо тождество

$$\left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u, v \right\rangle_{\gamma} + \langle \alpha(u, v) \rangle_{\gamma} + \lambda \langle u, v \rangle_{\gamma} + \\ + |\beta(u), v|_{\gamma} = \langle h, v \rangle_{\gamma}.$$

Доказательство. Доказательство почти дословно повторяет рассуждения доказательства теоремы 1. Необходимые изменения состоят в следующем. Чтобы получить сильную сходимость последовательности приближенных решений $u_n(t)$ в пространстве $L_{2,\gamma}(R^1; H_1)$ нужно воспользоваться тем фактом, что

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \text{ слабо в } L_{2,\gamma}(R^1; G) \\ \text{и} \quad u'_n(t) \rightarrow u'(t) \text{ слабо в } L_{2,\gamma}(R^1; H).$$

Поскольку, по предположению вложение $G \subset H_1$ вполне непрерывно; то применяя теорему Обена Ж. П., см. [9], получим подпоследовательность, сходящуюся сильно в $L_{2,\gamma}(R^1; H_1)$.

Теорема доказана.

§ 4. Приложения к нелинейным дифференциальным уравнениям с частными производными

А. Пусть Ω — ограниченная область в $\bar{R}_x^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в области $Q = \Omega \times R_t^1$ дифференциальное уравнение вида

$$P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) + L_{2m}(x, D) u(x, t) + \lambda u(x, t) + \beta(x, t, u') = h(x, t) \quad (29)$$

с условиями на $\Gamma = \partial\Omega \times R_t^1$:

$$D^m u(x, t)|_{\Gamma} = 0, \quad |\omega| \leq m-1.$$

Здесь

$$1) \quad P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u \equiv \sum_{q=0}^{2s} a_q u^{(q)}, \quad u^{(q)} \equiv \frac{\partial^q u}{\partial t^q}, \quad a_q \in R^1, \quad a_{2s} = (-1)^{s-1}, \quad s \geq 1,$$

$$2) \quad L_{2m}(x, D) u = \sum_{\substack{|x| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (-1)^{|\beta|} D^\beta (a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u)$$

—равномерно сильно эллиптический дифференциальный оператор в Ω порядка $2m$ ($m \geq 1$) такой, что $a_{\alpha\beta}(x)$ при $|x| = |\beta| = m$ равномерно непрерывны в Ω , $a_{\alpha\beta}(x)$ — ограничены и измеримы при $|x| + |\beta| \leq 2m$ и $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}}$; символ D означает дифференцирование по пространственным переменным $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3) $\beta(x, t, u)$ — некоторая нелинейная функция такая, что

а) $\beta(x, t, \xi)$ непрерывна по ξ почти всюду в Q и измерима по x и t при любом $\xi \in \mathbb{C}^1$;

б) $|\beta(x, t, \xi)| \leq k_1 |\xi|^{p-1}$, $\forall \xi \in \mathbb{C}^1$, k_1 — постоянная, не зависящая от x, t и ξ ; $p > 2$ — некоторое фиксированное число;

$$в) \quad \operatorname{Re} \int_Q \beta(x, t, v) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt \geq K_\gamma \|v(x, t)\|_{L_{p, \gamma}(R^1; L_p(\Omega))}^p - M_\gamma$$

при любой функции $v(x, t) \in L_{p, \gamma}(R^1; L_p(\Omega))$, где константы $K_\gamma > 0$ и $M_\gamma > 0$ не зависят от $v(x, t)$;

$$г) \quad \operatorname{Re} \int_Q [\beta(x, t, u) - \beta(x, t, v)] [\overline{u(x, t)} - \overline{v(x, t)}] e^{-\gamma t} dx dt > 0$$

при любых функциях $u(x, t)$ и $v(x, t)$ из пространства $L_{p, \gamma}(R^1; L_p(\Omega))$;

4) λ — некоторое фиксированное вещественное число.

Полагая

$$a(u, v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} \int a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x, t) \overline{D^\beta v(x, t)} dx,$$

получим форму, удовлетворяющую, в силу неравенства Гординга,

Условию 1, если положить $H = L_2(\Omega)$ и $G = \tilde{W}_2^m(\Omega)$.

Если положить $F = L_p(\Omega)$, то функция $\beta(x, t, \xi)$ задает нелинейный оператор, удовлетворяющий условиям 2 а), б), в), г) и д), см. [8]. Покажем, что выполнено также условие 2е). Пусть имеется последовательность $u_n(x, t)$ такая, что $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ слабо в

$L_{2, \gamma}(R^1; \tilde{W}_2^m(\Omega))$, $u'_n \rightarrow u'$ слабо в $L_{2, \gamma}(R^1; L_2(\Omega))$ и в $L_{p, \gamma}(R^1; L_p(\Omega))$, $u''_n \rightarrow u''$ слабо в $L_{2, \gamma}(R^1; L_2(\Omega))$. Тогда нужно показать, что $\beta(u'_n) \rightarrow \beta(u')$ слабо в $L_{p', \gamma}(R^1; L_{p'}(\Omega))$, где u, u' — некоторая подпоследовательность из $\{u_n\}$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

В силу условия 3 б) из функции $\beta(x, t, \xi)$, последовательность $\beta(u'_n)$ слабо компактна в $L_{p', \gamma}(R^1; L_{p'}(\Omega))$ и, следовательно, найдется подпоследовательность u'_n такая, что $\beta(u'_n) \rightarrow \psi(x, t)$ слабо в $L_{p', \gamma}(R^1; L_{p'}(\Omega))$. С другой стороны, по теореме компактности (см. [10]) по-

следовательность u_n компактна в пространстве $L_2(\Omega_1; W_{2,\gamma}^1(K))$, где $\Omega_1 \times K$ — компактная подобласть Q . Действительно, положим

$$A_1 = W_{2,\gamma}^2(K), A_2 = W_{2,\gamma}^1(K), A_3 = L_{2,\gamma}(K).$$

Вложение $W_{2,\gamma}^2 \subset W_{2,\gamma}^1$ компактно и теорема компактности применима. Выберем подпоследовательность (обозначим ее снова u_n) такую, что $u'_n \rightarrow u'$ сильно в $L_{2,\gamma}(K; L_2(\Omega_1))$. Таким образом, для любой компактной подобласти $Q_1 = \Omega_1 \times K$, $K \subset R^1$, мы можем получить (выбирая, если нужно, еще раз подпоследовательность) подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в $Q_1 \subset Q$. Этого достаточно, чтобы утверждать (теорема Лебега и теорема Витали, см. [11]), что $\beta(u') = \psi(x, t)$ почти всюду в Q_1 . Так как Q_1 была произвольной, то $\beta(u') = \psi(x, t)$ почти всюду в Q .

Применение теорем 1 и 2 дает следующий результат.

Теорема 4. При выполнении при некотором $\gamma > 0$ перечисленных выше условий существует такое вещественное число $\alpha(\gamma)$, что если $\lambda \geq \alpha(\gamma)$, то для любой функции $h(x, t)$ такой, что

$$h(x, t) \in L_{2,\gamma}(R^1; L_2(\Omega)), h'_i(x, t) \in L_{2,-1}(R^1; W_{2,-m}(\Omega)),$$

найдется единственная функция $u(x, t)$, удовлетворяющая условиям

$$1) u(x, t) \in H(R^1; s; W_2^m(\Omega), \gamma);$$

$$2) u'_i(x, t) \in L_{p,\gamma}(R^1; L_p(\Omega));$$

$$3) u_i^{(l)}(x, t) \in L_{2,\gamma}(R^1; W_{2,-m}(\Omega)) + L_{p',\gamma}(R^1; L_{p'}(\Omega)), s < l \leq 2s;$$

4) для любой функции $v(x, t) \in L_{2,\gamma}(R^1; W_2^m(\Omega)) \cap L_{p,\gamma}(R^1; L_p(\Omega))$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \int_Q P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \lambda \int_Q u(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \\ & + \int_Q \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x, t) \overline{D^\beta v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \\ & + \int_Q \beta(x, t, u') \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt = \\ & = \int_Q h(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt. \end{aligned}$$

В. В данном пункте рассматривается случай, когда оператор $\beta(u')$ задается выражением вида $\sum_{|\alpha| \leq m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, t, D^\beta u')$. Со-

ответствующий дифференциальный оператор предполагается удовлетворяющим следующим условиям:

1) функции $A_i(x, t, \xi_i)$ — непрерывны по ξ_i при почти всех $(x, t) \in Q$ и измеримы по x и t при любом $\xi_i \in \mathbb{C}^1$;

2) $|A_i(x, t, \xi_i)| \leq k_1 |\xi_i|^{p-1}$, где $k_1 > 0$ и не зависит от ξ_i ;

3) $\operatorname{Re} \int_Q \sum_{|\alpha| \leq m-1} A_i(x, t, D^\alpha u) \overline{D^\alpha u} e^{-\gamma t} dx dt > k_2 \|u\|_{L_{p, \gamma}(R^m; \dot{W}_p^{m-1}(Q))}^p - k_3$;

4) $\operatorname{Re} \int_Q \sum_{|\alpha| \leq m-1} [A_i(x, t, D^\alpha u) - A_i(x, t, D^\alpha v)] \times$
 $\times [\overline{u(x, t)} - \overline{v(x, t)}] e^{-\gamma t} dx dt > 0$

для любых функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ из пространства $L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(Q))$. Если положить теперь $H = L_2(Q)$, $G = \dot{W}_2^m(Q)$; $I = \dot{W}_p^{m-1}(Q)$, то выполнение условий на оператор β проверяется аналогично предыдущему случаю. Применение теорем 1 и 2 дает следующий результат.

Теорема 5. При выполнении при некотором $\gamma > 0$ перечисленных выше условий существует вещественное число $\alpha(\gamma)$ такое, что если $\lambda \geq \alpha(\gamma)$, то для любой функции $h(x, t)$ такой, что

$$h(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; L_2(Q)), \quad h'_t(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^{-m}(Q)),$$

найдется единственная функция $u(x, t)$, удовлетворяющая условиям

$$1) u(x, t) \in H(R^1; s; \dot{W}_2^m(Q), \gamma);$$

$$2) u'_t(x, t) \in L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(Q));$$

$$3) u_i^{(l)}(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^{-m}(Q)) + L_{p', \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{1-m}(Q)), \quad s < l \leq 2s;$$

4) для любой функции $v(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^m(Q)) \cap L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(Q))$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \int_Q P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) [u(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \lambda \int_Q u(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \\ & + \int_Q \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x, t) \overline{D^\beta v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \\ & + \int_Q \sum_{|\alpha| \leq m-1} A_i(x, t, D^\alpha u) \overline{D^\alpha v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt = \\ & = \int_Q h(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt. \end{aligned}$$

С. В данном пункте рассматриваются дифференциальные уравнения вида

$$P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) + L_{2m}(x, D) u(x, t) + \lambda u(x, t) + \\ + \sum_{|\delta| \leq m-1} (-1)^{|\delta|} A_\delta(x, t, D^\alpha u) = h(x, t).$$

Будем предполагать, что функции $A_\delta(x, t, \xi_\delta)$ удовлетворяют условиям 1 и 2 пункта В и условию

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_Q A_\delta(x, t, D^\alpha u) D^\alpha u'_t(x, t) e^{-\gamma t} dx dt > \\ > k_2(\gamma) \|u\|_{L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega))}^p - k_3(\gamma) \|u\|_{L_{2, \gamma}(R^1; L_2(\Omega))}^2 - k_4(\gamma)$$

для любой функции $u(x, t) \in W_{p, \gamma}^1(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega)) \cap L_{2, \gamma}(R^1; L_2(\Omega))$, где $k_2 > 0$, $k_3 \geq 0$, $k_4 \geq 0$ — константы, не зависящие от $u(x, t)$, а $W_{p, \gamma}^1(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega))$ — пространство функций, принадлежащих вместе со своими обобщенными производными пространству $L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega))$. Полагая

$$H = L_2(\Omega), G = \dot{W}_2^m(\Omega), F = \dot{W}_p^{m-1}(\Omega), H_1 = \dot{W}_2^{m-1}(\Omega),$$

применим теорему 3. В итоге получим следующий результат.

Теорема 6. При выполнении при некотором $\gamma > 0$ сформулированных выше условий существует такое вещественное число $\alpha(\gamma)$, что если $\lambda > \alpha(\gamma)$, то для любой функции $h(x, t)$ такой, что $h(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^{-m}(\Omega))$, $h'_t(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^{-m}(\Omega))$, найдется функция $u(x, t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $u(x, t) \in H(R^1; s; \dot{W}_2^m(\Omega); \gamma)$;
- 2) $u(x, t) \in L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega))$;
- 3) $u_t^{(l)}(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^{-m}(\Omega)) + L_{p', \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{1-m}(\Omega))$;

при $s < l \leq 2s$;

- 4) для любой функции

$$v(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^m(\Omega)) \cap L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega))$$

справедливо тождество

$$\int_Q \left| P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) \overline{v(x, t)} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x, t) \overline{D^\beta v(x, t)} + \right.$$

$$+ i u(x, t) \overline{v(x, t)} + \sum_{|k| \leq m-1} A_k(x, t, D^k u) \overline{D^k v(x, t)} \Big| e^{-\gamma t} dx dt = \\ = \int_0^t h(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt.$$

Замечание: При $p = 2$ из приведенных теорем получаются результаты и для линейных уравнений, которые, являясь также новыми, дополняют известные результаты, полученные Ю. А. Дубинским в работах [1–3].

Московский ордена Ленина
энергетический институт

Поступила 25.III.1974

Վ. Պ. ԳՐԻԳՐԵՎ. Ոչ գծային դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումներ ամբողջ
բլանդի տարածքի վրա (ամփոփում)

Ոչ գծային բարձր կարգի դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումների համար տալիս
ված են գոյության և միակության թեորեմներ ամբողջ բլանդի տարածքի վրա սարդիկյան կշռա-
յին տարածությունների նման դասերում: Ապացույցը հիմնված է Գալլերկինի մեթոդի վրա:
Ստացված են զնահատականների մոտավոր լուծումների համար: Տրվում են ընդհանուր թեորեմ-
ների կիրառումներ ոչ գծային մասնական ածանցյալներով հավասարումների լուծումների գո-
յության վերաբերյալ $Q = \Omega \times R_+^1$, $\Omega \subset R_x^n$ անվերջ դիսկում:

V. P. GRIGOR'EV. *Nonlinear differential-operator equations on the whole line*
(summary)

Global existence and uniqueness theorems for nonlinear differential-operator
equations of high order in Sobolev spaces with a weight are obtained. Galerkin's
method of obtaining apriori estimates for approximate solutions is used. Applications
of abstract theorems to the problem of solvability of nonlinear partial differential
equations in the cylinder $Q = \Omega \times R_+^1$, $\Omega \subset R_x^n$ are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю. А. Дубинский. Задача Коши для операторно-дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 181, № 5, 1968, 1046–1048.
2. Ю. А. Дубинский. Смешанные задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными, Труды ММО, 20, 1969, 205–240.
3. Ю. А. Дубинский. Об одном классе дифференциально-операторных уравнений высокого порядка, ДАН СССР, 187, № 5, 1969, 982–985.
4. M. Tsutsumi, J. Růtcht. On the global solution of a certain nonlinear partial differential equation, Proc. Japan. Acad., 45, № 6, 1969, 466–469.
5. В. П. Григорьев. О разрешимости смешанных задач для некоторого класса квазилинейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 196, № 1, 1971, 24–27.
6. П. Е. Соболевский. Об уравнениях с операторами, образующими острый угол, ДАН СССР, 116, № 5, 1957, 754–757.
7. М. И. Вишик. Решение системы квазилинейных уравнений, имеющих дивергентную форму, при периодических граничных условиях, ДАН СССР, 137, № 3, 1961, 502–505.
8. М. И. Вишик. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму, Труды ММО, 12, 1963, 125–184.
9. J. P. Aubin. Un théorème de compacité, C. R. Acad. Sc., 256, 1963, 5042–5044.
10. В. П. Григорьев. Об одной теореме компактности, Труды МЭИ, Высшая математика, вып. 146, 1972, 22–27.
11. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, М., Гостехиздат, 1957.