ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 5, 1976 Математика

С. Д. ГРИГОРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННОЙ С ОДНОРОДНЫМИ КОСМОЛОГИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

0°. Данная работа посвящена исследованию одной динамической системы, возникающей в общей теории относительности и описывающей эволюцию во времени метрики однородной космологической модели V типа (по классификации Бианки, см. [1], стр. 487).

Наиболее актуальными физическими вопросами в этом круге задач являются: вопрос о поведении метрики g_{ij} вблизи космологической сингулярности, где $\det g_{ij}$ обращается в нуль и вопрос об изотропизации метрики при бесконечном расширении пространства. В ряде работ, посвященных этим задачам, применялись как численные, так и аналитические методы ([2], [3], [4] и др.)

Методы качественной теории дифференциальных уравнений в этих задачах были применены С. П. Новиковым в работе [4] при изучении модели IX типа. В последующих работах С. П. Новикова и О. И. Богоявленского проведено полное исследование качественными методами модели IX типа ([6, 7]) и всех остальных моделей в синхронно сопутствующей системе отсчета ([8]). В этих работах предлагалась также программа изучения более общих моделей с произвольным движением вещества.

Эта программа проводится нами в случае физически важной модели V типа (в ней, как частный случай, содержится открытая модель Фридмана) „со скоростями" в предположении диагональности метрики.

Используя метод работ [6, 7], нам удается провести регуляризацию исходной системы дифференциальных уравнений: построить компактное многообразие S с границей Γ и динамическую систему на нем, которая в $S\setminus\Gamma$ эквивалентна исходной системе и имеет особые точки, лежащие на границе Γ, по характеру которых можно судить об асимптотическом поведении решений.

Основной результат заключается в том, что в сторону расширения все диагональные метрики изотропизуются, а в сторону сжатия имеют казнеровскую (23) или квазифридмановскую асимптотики (22).

Отметим, что наличие этих асимптотик было установлено в работах [2, 3], однако полное исследование всех возможных в рассматриваемой модели режимов не было проведено.

1°. Однородные космологические модели, как известно, описываются четырехмерными многообразиями M^4, удовлетворяющими следующим условиям:

1) многообразие M^4 диффеоморфно $G \times R^1$, где R^1 — прямая, G — некоторая трехмерная группа Ли;

2) на M^4 задана метрика g_{ij} $(i, j = 0, 1, 2, 3)$, имеющая сигнатуру $(+, -, -, -)$;

3) метрика g_{ij} инвариантна при правых сдвигах на элементы группы G и удовлетворяет уравнениям Эйнштейна

$$R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j R = T_i^j, \tag{1}$$

здесь R_i^j — тензор Риччи метрики g_{ij}, R — скалярная кривизна, T_i^j — тензор энергии—импульса материи.

Мы рассматриваем однородные модели, в которых метрика, индуцированная на подмногообразия $G \times t \subset G \times R^1$ (t—временная координата на R^1), имеет сигнатуру $(-, -, -)$. В этом случае на многообразии M^4 можно выбрать линейно независимые векторные поля X_0, X_1, X_2, X_3 такие, что поля X_1, X_2, X_3, касаются каждого из подмногообразий $G \times t$, не зависят от времени t и инвариантны при правых сдвигах на элементы группы G, поле времени $X_0 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ ортогонально X_1, X_2, X_3 и, кроме того, $\langle X_0, X_0 \rangle = 1$ (синхронное время); коммутационные соотношения имеют вид $[X_0, X_\alpha] = 0$, $[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^{\gamma} X_\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$, где $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ — структурные константы группы G.

Согласно условиям, указанным выше, положительно определенная матрица $g_{\alpha\beta}(t) = -\langle X_\alpha, X_\beta \rangle$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$ зависит только от времени t и предположение диагональности метрики $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ $(\alpha \neq \beta)$ позволяет записать ее на M^4 в виде

$$ds^2 = dt^2 - q_1^2(t)\, \omega_1^2 - q_2^2(t)\, \omega_2^2 - q_3^2(t)\, \omega_3^2,$$

где $q_\alpha^2(t) = q_{\alpha\alpha}(t)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, а ω_α — стандартные правоинвариантные 1-формы на G и $\omega_\alpha(X_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$.

В уравнениях (1) мы рассматриваем лишь гидродинамический тензор энергии-импульса пылевидной материи, который в базисе X_0, X_1, X_2, X_3 имеет вид

$$T_i^j = \varepsilon u_i u^j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3),$$

где ε и u^i (функции времени t) соответственно плотность энергии и компоненты 4-скорости частиц материи.

При исследовании уравнений (1) удобно считать, что структурные константы $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ приведены к одному из канонических типов по

Бианки (V тип: $C^1_{31} = -C^1_{13} = 1$, $C^2_{32} = -C^2_{23} = 1$*, остальные структурные константы равны нулю). Выпишем компоненты тензора Риччи метрики (2) для модели V типа (см. 1, стр. 489)

$$R^0_0 = \left[-\frac{\dot q_1}{q_1} - \frac{\dot q_2}{q_2} - \frac{\dot q_3}{q_3} \right]^{\cdot} - \left(\frac{\dot q_1}{q_1}\right)^2 - \left(\frac{\dot q_2}{q_2}\right)^2 - \left(\frac{\dot q_3}{q_3}\right)^2.$$

$$R^0_3 = \frac{\dot q_1}{q_1} + \frac{\dot q_2}{q_2} - \frac{2\dot q_3}{q_3},$$

$$R^1_1 = -\frac{(\dot q_1 q_2 q_3)^{\cdot}}{q_1 q_2 q_3} - \frac{2}{q_1^2},$$

$$R^2_2 = -\frac{(q_1 \dot q_2 q_3)^{\cdot}}{q_1 q_2 q_3} - \frac{2}{q_1^2}, \tag{2'}$$

$$R^3_3 = -\frac{(q_1 q_2 \dot q_3)^{\cdot}}{q_1 q_2 q_3} - \frac{2}{q_1^2},$$

$$R^0_1 = R^0_2 = 0, \quad R^\beta_\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta;\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3). \tag{2''}$$

Из (2′) и (2″) видно, что все недиагональные компоненты тензора Риччи тождественно равны нулю, кроме компоненты R^0_3. Отсюда следует, что компоненты 4-вектора скорости u_1 и u_2 для диагональной метрики (2) равны нулю и уравнения Эйнштейна, соответствующие нулевым компонентам тензора Риччи (2″) выполнены тождественно. Выпишем все остальные уравнения Эйнштейна:

$$\begin{aligned} &R^0_0 - \frac{1}{2} R = \varepsilon u_0 u^0, \\ &R^0_3 = \varepsilon\, u_0 u_3, \\ &R^1_1 - \frac{1}{2} R = 0, \\ &R^2_2 - \frac{1}{2} R = 0, \\ &R^3_3 - \frac{1}{2} R = \varepsilon\, u_3 u^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Исключив из первых трех уравнений компоненты 4-скорости u^0, u^3 и энергию ε, получаем замкнутую систему на компоненты метрики $q_i\,(t)$

$$\begin{aligned} &R^1_1 - \frac{1}{2} R = 0, \\ &R^2_2 - \frac{1}{2} R = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

* Базис X_1, X_2, X_3 здесь отличен от базиса, использованного в [1], см. [7], стр. 30.

$$R_3^3 - \frac{1}{2} R = \frac{(R_3^0)^2}{q_3^2\left(R_0^0 - \frac{1}{2} R\right)}.$$

Сведение этой системы второго порядка к системе первого порядка осуществляется методом, предложенным в работе [7]. В этой работе показано, что уравнения Эйнштейна в синхронно-сопутствующей системе отсчета ($u^0 = 1,\ u^\alpha = 0$) для модели IX типа и некоторых других эквивалентны гамильтоновой системе с гамильтонианом H, где

$$H = \left(R_0^0 - \frac{1}{2} R\right)\sqrt{-g} = T(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) + V(q_1, q_2, q_3), \tag{5}$$

а $g = \det g_{ij} = -(q_1 q_2 q_3)^2$.

Отметим, что хотя в рассматриваемой задаче окончательные уравнения и не являются гамильтоновыми, однако в их записи также участвует функция H, слагаемые которой в данном случае имеют следующий вид:

$$T = \dot{q}_1 \dot{q}_2 q_3 + q_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_1 q_2 \dot{q}_3, \tag{5'}$$

$$V = -\frac{3 q_1 q_2}{q_3}.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что система (4) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = h_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = h_2, \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_3} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = h_3 + \frac{(R_3^0)^2 (\sqrt{-g})^2}{(q_3)^3 H},$$

где

$$L = T - V = \dot{q}_1 \dot{q}_2 q_3 + q_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_1 q_2 \dot{q}_3 + \frac{3 q_1 q_2}{q_3},$$

$$h_1 = \frac{2 q_1 q_2^2}{q_1 q_2 q_3},\quad h_2 = \frac{2 q_1^2 q_2}{q_1 q_2 q_3},\quad h_3 = -\frac{4 q_1^2 q_2^2}{q_1 q_2 q_3}, \tag{6'}$$

$$R_3^0 = \frac{\dot{q}_1}{q_1} + \frac{\dot{q}_2}{q_2} - \frac{2\dot{q}_3}{q_3}. \tag{6''}$$

Далее, сделав преобразование Лежандра с формальным лагранжианом L

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{d}{dt}(q_j q_k)^{\cdot},\quad i \neq j \neq k = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Мы представим систему (6) как систему уравнений в фазовом пространстве с „координатами" q_i и „импульсами" p_i (7).

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} - h_1, \quad \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1},$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} - h_2, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \tag{8}$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial q_3} - h_3 - \frac{(R_3^0)^2 (\sqrt{-g})^2}{(q_3)^3 H}, \quad \dot{q}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3},$$

где функция H определена формулами (5), (5′), а функция R_3^0 — формулой (6″) и в новых координатах p_i, q_i они имеют вид

$$H = \frac{1}{4 q_1 q_2 q_3}\left(2 \sum_{i<j}^{3} p_i q_i p_j q_j - \sum_{i=1}^{3} p_i^2 q_i^2 - 12 q_1^2 q_2^2 \right),$$

$$R_3^0 = \frac{1}{q_1 q_2 q_3} (2 p_3 q_3 - p_1 q_1 - p_2 q_2).$$

Прежде чем переходить к исследованию системы (8) укажем область фазового пространства, на которой система дифференциальных уравнений (8) эквивалентна системе уравнений Эйнштейна (1). Эта область выделяется физическими условиями: положительность плотности энергии ε и единичность 4-скорости u^i.

Эти условия имеют вид

$$H = \varepsilon u_0^2 \sqrt{-g} \geqslant 0,$$

$$H^2 - (q_3 R_0^3 \sqrt{-g})^2 = (\varepsilon u_0 \sqrt{-g})^2 [u_0^2 - q_3^2 (u^3)^2] = \tag{9}$$

$$= (\varepsilon u_0 \sqrt{-g})^2 \geqslant 0.$$

Утверждение. Область, которая выделяется неравенствами (9), инвариантна (т. е. траектории системы (8) не выходят из этой области).

Действительно, производная, в силу системы дифференциальных уравнений (8), от правой части неравенства (9) равна

$$\frac{d}{dt} [H^2 - q_3^2 (R_0^3 \sqrt{-g}) = \frac{4 R_0^3 \sqrt{-g}}{H} [H^2 - (q_3 R_0^3 \sqrt{-g})^2].$$

Следовательно, многообразие $H^2 - (q_3 R_0^3 \sqrt{-g})^2 = 0$, граница области (9), является инвариантным многообразием, отсюда следует, что ни одна траектория из области (9) не выходит из этой области.

2°. Перейдем к преобразованию системы дифференциальных уравнений (8) и к изучению ее методами качественной теории дифференциальных уравнений.

Сделаем замену координат

$$P_i = p_i q_i, \quad Q_i = q_i^2$$

и замену времени

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{q_1 q_2 q_3}.$$

Система (8) в новых координатах и времени τ принимает вид

$$\begin{gathered}
\dot P_1 = H_0 + 4\,Q_1\,Q_2,\\
\dot P_2 = H_0 + 4Q_1\,Q_2,\\
\dot P_3 = H_0 + 4\,Q_1\,Q_3 - \frac{(2P_3 - P_1 - P_2)^2\,Q_1Q_2}{H_0},\\
\dot Q_1 = Q_1\,(P_2 + P_3 - P_1),\\
\dot Q_2 = Q_2\,(P_1 + P_3 - P_2),\\
\dot Q_3 = Q_3\,(P_1 + P_2 - P_3).
\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь

$$H_0 = q_1 q_2 q_3\, H = \frac{1}{4}\Big(2\sum_{i<j} P_i\,P_j - \sum_{i=1}^{3} P_i^2 - 12\,Q_1 Q_2\Big). \tag{11}$$

Напомним, что система (10) рассматривается в области (9), которая в новых координатах имеет вид

$$H_0^2 - (2P_3 - P_1 - P_2)^2\,Q_1 Q_2 \geqslant 0,\ H_0 > 0. \tag{12}$$

Область, определенную неравенством (12), обозначим через S', а границу ее — через Γ.

Заметим, что хотя в правой части одного из уравнений (10) содержится выражение с делением на H_0, однако это выражение всюду в области S' остается регулярным, поскольку

$$\frac{(2\,P_3 - P_1 - P_2)^2\,Q_1 Q_2}{H_0} \leqslant H_0.$$

Отсюда следует, что при $H_0 \to 0$ это выражение $\to 0$, поэтому при $H_0 = 0$ мы доопределим это выражение его предельными значением.

Введем новые координаты

$$v_1 = P_1 + P_2,\ v_2 = P_1 - P_2,\ v_3 = 2P_3 - P_1 - P_2,\ r = (Q_1\,Q_2)^{\frac{1}{2}}. \tag{12'}$$

В этих координатах функции H_0 имеет вид суммы квадратов:

$$H_0 = \frac{1}{4}\,(v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 12r^2).$$

Многообразие S' в этих координатах некомпактно. Мы компактифицируем это многообразие на бесконечности по v_1 путем введения новых координат:

$$v_2 = \frac{v_2}{v_1},\quad v_3 = \frac{v_3}{v_1},\ \bar r = \frac{r}{v_1}. \tag{13'}$$

Заметим, что при направлении времени в сторону сжатия из условия $H_0 \geqslant 0$ (11) следует, что P_1, P_2, $P_3 < 0$, поэтому $v_1 = P_1 + P_2 < 0$. Сделаем монотонную замену времени $\frac{d\tau_1}{d\tau} = -v_1$. Система (10) в координатах (13) и времени τ_1 имеет вид

$$\dot{\bar{v}}_2 = \bar{v}_2 (2H_1 + 8\bar{r}^2),$$

$$\dot{\bar{v}}_3 = (1 + 2\bar{v}_3)(H_1 + 4\bar{r}^2) + \frac{(1+2\bar{v}_3)\bar{r}^2}{H_1},$$

$$\dot{\bar{r}} = \bar{r}\ (-1 - \bar{v}_3 + 2H_1 + 8\bar{r}^2), \tag{14}$$

$$\dot{Q}_3 = Q_3 \bar{v}_3,$$

$$\dot{v}_1 = -v^1 (2H_1 + 8\bar{r}^2).$$

В координатах (13′) мы приходим к многообразию с $\bar{r} \leqslant 0$, но, для удобства, мы рассмотрим систему (14) при $\bar{r} \geqslant 0$ (уравнения (14) симметричны по отношению к изменению знака координаты $\bar{r}$). Первые три уравнения образуют замкнутую подсистему, определенную на компактном многообразии S, выделенном неравенствами:

$$H_1 = \frac{1}{4}\ (1 - \bar{v}_2^2 - \bar{v}_3^2 - 12\bar{r}^2) \geqslant 0,$$

$$H_1 - |(1 + 2\bar{v}_3)|\,\bar{r} \geqslant 0,\ \bar{r} \geqslant 0. \tag{15}$$

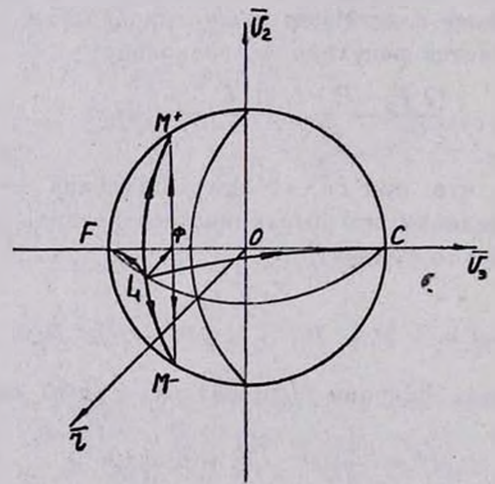

Рис 1.

Система (14) на многообразии S, изображенном на рис. 1, имеет следующие инвариантные многообразия:

1. $v_3 = -\frac{1}{2}$. Траекториям на этой плоскости соответствуют решения модели V типа без скоростей.

2. $v_2=0$. Решения „типа Тауба“, где $P_1 \equiv P_2$. Тогда $\frac{Q_1}{Q_2}=\text{const}$.

3. $\bar r = 0$. Эта плоскость является границей, приклеенной к многообразию S' в результате компактификации на бесконечности по v_1.

Отметим, что в силу системы (14) $\frac{\dot{\bar v}_2}{\bar v_1} > 0$, поэтому многообразие $\bar v_2 = 0$ неустойчиво, т. е. решения „типа Тауба“ неустойчивы. Далее, многообразие $\bar v_3 = -\frac{1}{2}$ также неустойчиво. Действительно

$$\left(\bar v_3 + \frac{1}{2}\right)^{\cdot} = 2\left(\bar v_3 + \frac{1}{2}\right)\left(H_1 + 4\bar r^2 + \frac{2\left(\bar v_3 + \frac{1}{2}\right)\bar r^2}{H_1}\right), \tag{16}$$

поэтому $\frac{\left(\bar v_3 + \frac{1}{2}\right)^{\cdot}}{\bar v_3 + \frac{1}{2}} > 0$ при $\bar v_3$ близком к $-\frac{1}{2}$. Отметим, что обе области $\bar v_3 > -\frac{1}{2}$ и $\bar v_3 < -\frac{1}{2}$ инвариантны. В области $\bar v_3 > -\frac{1}{2}$ всегда $\dot{\bar v}_3 > 0$, поэтому никакая траектория в этой области не подходит к инвариантному неустойчивому многообразию $\bar v_3 = -\frac{1}{2}$, т. е. решения без скоростей являются неустойчивыми.

Из уравнения $\dot{\bar v}_2 = \bar v_2 (2H_1 + 8\bar r^2)$ следует, что в особых точках системы (14) либо $\bar v_2 = 0$, либо $\bar r = 0$ и $H_1 = 0$, т. е. особые точки

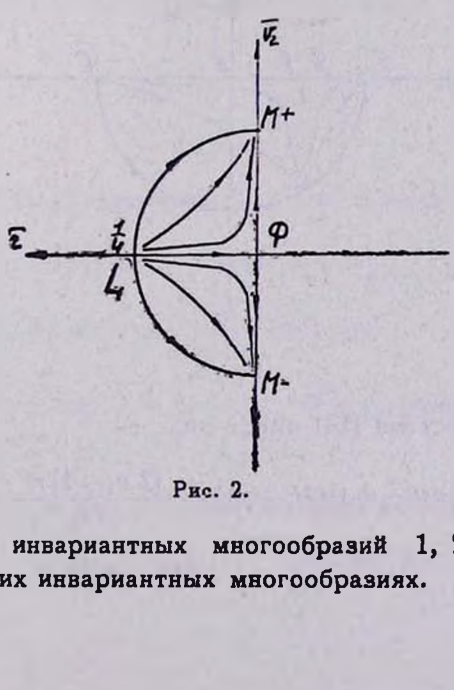

Рис. 2.

лежат на одном из инвариантных многообразий 1, 2, 3. Рассмотрим систему (14) на этих инвариантных многообразиях.

1. $\bar{v}_2 = -\frac{1}{2}$. Система (14) имеет вид:

$$\dot{\bar{v}}_3 = \bar{v}_3 (2H_1 + 8\bar{r}^2),\quad \dot{\bar{r}} = \bar{r}\left(-\frac{1}{2} + 2H + 8\bar{r}^2\right). \tag{17}$$

Эта система имеет следующие особые точки: отталкивающая особая точка L, неустойчивая особая точка Φ и две притягивающие особые точки M^+, M^- (см. рис. 2). Фазовый портрет этой системы в силу наличия монотонной функции $\bar{v}_2$, однозначно определен. Особая точка $L\left(\bar{r} = \frac{1}{4}, \bar{v}_3 = 0\right)$ является отталкивающей особой точкой для всей системы (14). При направлении времени в сторону расширения, все траектории системы (14), в силу наличия монотонных функций $\bar{v}_2$, $\left|\bar{v}_3 + \frac{1}{2}\right|$, входят в особую точку L. Этой особой точке соответствует точное решение—метрика плоского пространства Минковского

$$ds^2 = dt^2 - t^2\ (c_1\, \omega_1^2 + c_2\, \omega_2^2 + c_3\, \omega_3^2)\ \ (c_i = \text{const};\ i = 1,\ 2,\ 3), \tag{18}$$

которая при направлении времени в сторону расширения является устойчивой асимптотикой решений. Следовательно, все решения в сторону расширения изотропизуются. Сепаратрисе $\bar{v}_2 = 0$, соединяющей особые точки L и Φ, соответствует открытое решение Фридмана-

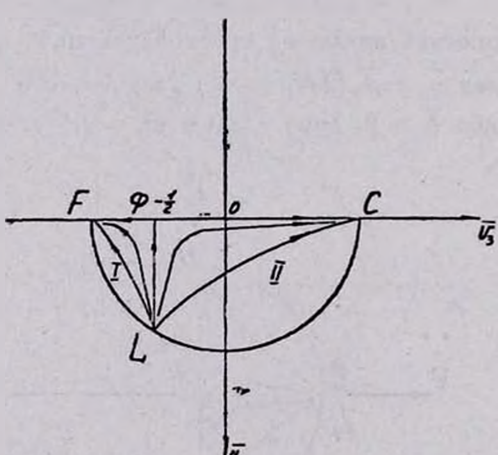

Рис. 3.

2. $\bar{v}_2 = 0$. Система (14) имеет вид

$$\dot{\bar{v}}_3 = (2\bar{v}_3 + 1)\left(H_1 + 4\bar{r}^2 + \frac{(2\bar{v}_3 + 1)\bar{r}^2}{H_1}\right), \tag{19}$$

$$\dot{\bar{r}} = \bar{r}\,(-1 - \bar{v}_3 + 2H_1 + 8\bar{r}^2).$$

Напомним, что система (14) рассматривается в области (15), ее границы показаны линиями I и II, которые являются траекториями системы (19) (см. рис. 3).

Очевидно

$$H_1 + 4\bar{r}^2 + \frac{(2\bar{v}_3 + 1)\, r^2}{H_1} > 0 \text{ при } \bar{v}_3 > -\frac{1}{2}. \qquad (20)$$

Однако легко видеть, что и в области $\bar{v}_3 < -\frac{1}{2}$ (15), выражение (20) положительно.

Поэтому $\left(\bar{v}_3 + \frac{1}{2}\right)$ — монотонная функция в обеих областях, и фазовый портрет системы (19) однозначно определен: система (19) имеет две притягивающие особые точки F, C и неустойчивую особую точку Ф и отталкивающую особую точку L (рис. 3).

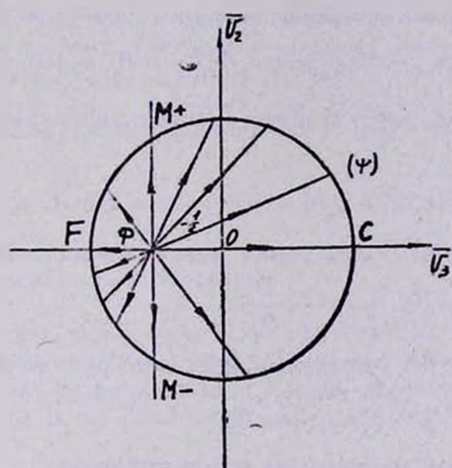

Рис. 4.

3. Система (14) на многообразии $\bar{r} = 0$ имеет вид

$$\dot{\bar{v}}_2 = 2H_1\bar{v}_2, \quad \dot{\bar{v}}_3 = 2H_1\left(\bar{v}_3 + \frac{1}{2}\right). \qquad (21)$$

Очевидно, для траекторий этой системы

$$\left(\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_3 + \frac{1}{2}}\right)^{\cdot} = 0, \text{ т. е. } \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_3 + \frac{1}{2}} = \text{const}.$$

Траектории идут по лучам, проходящим через точку

$$\Phi:\ \left(\bar{v}_2 = 0,\ \bar{v}_3 = -\frac{1}{2},\ \bar{r} = 0\right).$$

Все граничные точки круга $H_1 \geqslant 0$, $\bar{r}=0$ являются притягивающими особыми точками системы (14) и, в частности, (21). Обозначим эти особые точки (ψ), где ψ — угол ($0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$) (рис. 4).

Суммируем информацию, полученную о системе (14). Система (14) имеет две монотонные функции

$$\bar{v}_3 \text{ и } \left|\bar{v}_3 + \frac{1}{2}\right| \text{ (в области (15)).}$$

Система (14) имеет три инвариантных многообразия 1, 2, 3. Особые точки системы (14):

а) отталкивающая особая точка $L\left(\bar{r} = \frac{1}{4}, \bar{v}_2 = 0, \bar{v}_3 = -\frac{1}{2}\right)$, в сторону расширения этой точке отвечает асимптотика открытого решения Фридмана

$$ds^2 = dt^2 - t^2\,(c_1\,\omega_1^2 + c_2\,\omega_2^2 + c_3\,\omega_3^2),\ c_\alpha = \text{const},\ \alpha=1,\ 2,\ 3,$$

справедливая для всех решений, т. е. все решения изотропизуются;

б) неустойчивая особая точка $\Phi\left(\bar{r} = 0, \bar{v}_2 = 0, \bar{v}_3 = -\frac{1}{2}\right)$, ей отвечает в сторону сжатия квазифридмановская асимптотика

$$ds^2 = dt^2 - t^{\frac{4}{3}}\,(c_1\omega_1^2 + c_2\omega_2^2 + c_3\omega_3^2),\ c_\alpha = \text{const},\ \alpha = 1,\ 2,\ 3. \tag{22}$$

На многообразии S эта точка имеет единственную входящую в нее сепаратрису $\bar{v}_2 = 0$, $\bar{v}_3 = -\frac{1}{2}$;

в) окружность (ψ) притягивающих особых точек $\bar{r} = 0$,

$$1 - \bar{v}_2^2 - \bar{v}_3^2 = 0.$$

Этим особым точкам соответствует асимптотика:

$$Q_1 = \bar{Q}_1\, t^{2p_1},\ Q_2 = \bar{Q}_2\, t^{2p_2},\ Q_3 = \bar{Q}_3\, t^{2p_3},\ \bar{Q}_\alpha = \text{const},\ \alpha = 1,\ 2,\ 3. \tag{23}$$

Показатели степеней

$$p_1 = \frac{1 - \bar{v}_2 + \bar{v}_3}{2 + \bar{v}_3},\quad p_2 = \frac{1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3}{2 + \bar{v}_3},\quad p_3 = \frac{-\bar{v}_3}{2 + \bar{v}_3} \tag{24}$$

на окружности $\bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2 = 1$ удовлетворяют казнеровским тождествам:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

Решения „без скоростей“ в сторону сжатия имеют асимптотику (23) с показателями (24) при $\bar{v}_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\bar{v}_3 = -\frac{1}{2}$ (см. [8]), в то время как для метрики с одной скоростью реализуются любыми наборами казнеровских показателей (p_1, p_2, p_3).

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *В сторону расширения все диагональные метрики модели V типа изотропизуются, а в сторону сжатия имеют казнеровскую асимптотику* (23) *или квазифридмановскую асимптотику* (22).

В заключение приношу глубокую благодарность моему научному руководителю профессору С. П. Новикову за постановку задачи и внимание к работе и О. И. Богоявленскому за обсуждение результатов.

Институт математики АН Армянской ССР,
Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР
Поступила 5.VI.1975

Ս. Դ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Կոսմոլոգիական մոդելների հետ կապված դինամիկ սիստեմի հետազոտություն *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է դինամիկ սիստեմ, որը նկարագրում է V-րդ տիպի համասեռ կոսմոլոգիական մոդելը (նյութի շարժման դեպքում) ընդհանուր հարաբերականության տեսությունում։ Դիֆերենցիալ հավասարումների որակական տեսության մեթոդներով ցույց է տրված, որ տարածության անվերջ լայնացման ուղղությամբ անկյունագծային մետրիկաներն իզոտրոպացվում են, իսկ սեղմվելու ուղղությամբ՝ ունեն կազներական կամ կվազիֆրիդմանյան ասիմպտոտիկաներ։

S. D. GRIGORIAN. *Investigation of a dynamical system connected with homogenous cosmological models* (summary)

The paper considers the dynamical system describing the socalled *V* type homogenous cosmological model (with motion of the matter) in the general relativity theory. It is shown, that in the direction of infinite expansion all diagonal metrics become isotropical while in the direction of contraction they have Kasherian or quasi-Fridman asymptotics.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля, Изд. „Наука", М., 1973.
2. *Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников.* Проблемы релятивистской космологии, УФН, 80, № 3, 1963, 391—438.
3. *Л. П. Грищук, А. Г. Дорошкович, И. Д. Новиков.* Анизотропия ранних стадий космологического расширения и реликтового излучения, ЖЭТФ, 55, № 6, 1968, 2281—2290.
4. *С. П. Новиков.* О некоторых свойствах космологических моделей, ЖЭТФ, 62, № 6, 1972, 1977—1989.
5. *С. П. Новиков.* О некоторых свойствах космологических моделей, Препринт ИТФ им. Л. Д. Ландау, Черноголовка, ноябрь 1971 — апрель 1972.
6. *О. И. Богоявленский, С. П. Новиков.* Особенности космологической модели Бианки IX с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений, ЖЭТФ, 64, № 5, 1973, 1475—1494.
7. *О. И. Богоявленский, С. П. Новиков.* Качественная теория однородных космологических моделей, Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 1, 1975, 7—43.
8. *О. И. Богоявленский.* Качественная теория однородных космологических моделей II, Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 2, 1976.