ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 5, 1976 Математика

Ж. С. НАЛБАНДЯН, В. Д. ЩИГЛИК

РЕАЛИЗАЦИЯ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОМ ПРОЦЕССОРЕ

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) является эффективным методом вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ)—одной из наиболее широко применяющихся математических операций при обработке цифровых сигналов в спектральном анализе, цифровой фильтрации, корреляционном анализе и в других областях.

Алгоритм БПФ может быть успешно реализован как программно на универсальных ЭВМ, так и аппаратно-микропрограммно на специализированных ЭВМ. В настоящее время существуют устройства, специально ориентированные на реализацию алгоритма БПФ и называемые БПФ-процессорами, которые имеют достаточно высокое быстродействие вычисления коэффициентов Фурье, позволяющее работать в реальном масштабе времени [1], [2].

При решении задач по обработке результатов наблюдений кроме преобразования Фурье часто встречаются операции над векторами, матрицами, операции свертки, корреляции и другие, реализацию которых с экономической точки зрения целесообразно совместить в одном специализированном процессоре.

В работе [3] описана структура специализированного процессора, предназначенного для решения задач по обработке результатов наблюдений и выполняющего операции типа умножения-сложения над n-мерными векторами.

В настоящей работе приводится описание вычислительной схемы, разработанной на основе известного алгоритма БПФ [4] и реализующей БПФ в специализированном процессоре [3] по основанию 4 и по смешанному основанию 4+2.

Рассматривается объединение различных вариантов алгоритма БПФ в единую процедуру.

С учетом структурных особенностей спецпроцессора, вычислительная процедура по основанию 4 организована таким образом, что существенно ускоряется выполнение БПФ по сравнению с процедурой по основанию 2. Приводится также сравнительная оценка времени вычисления коэффициентов Фурье по основаниям 4 и 2.

Кратко опишем основные принципы БПФ и дадим некоторые необходимые в дальнейшем определения.

Для дискретной последовательности из N чисел $\{x_k\}$ $(k=0, 1, \cdots, N-1)$ ДПФ определяется следующим образом:

$$y_r = \sum_{k=0}^{N-1} x_k w_N^{-kr} \quad (r = 0, 1, \cdots, N-1), \tag{1}$$

где $w_N^l = e^{\frac{2\pi i}{N} l}$, а y_r — r-й коэффициент ДПФ. В общем случае $\{x_k\}$ представляют собой комплексные числа, а $\{y_r\}$ — всегда комплексные числа.

Обращение формул (1) аналогично записывается в виде:

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} y_r w_N^{kr} \quad (k=0, 1, \cdots, N-1) \tag{2}$$

и называется обратным дискретным преобразованием Фурье (ОДПФ).

Процесс вычисления коэффициентов ДПФ непосредственно по (1) весьма длителен, так как требует выполнения операций в количестве, пропорциональном N^2, в то время как алгоритм БПФ позволяет уменьшить это число до величины, пропорциональной $N \log N$.

Пусть число N разбито на n множителей, не обязательно равных друг другу:

$$N = \prod_{l=1}^{n} p_l \quad (p_l \geqslant 2).$$

Суть алгоритма БПФ заключается в выполнении процесса вычисления коэффициентов ДПФ итерационным методом за n шагов по выражениям:

$$x_{k,l}^{(j)} = \sum_{m=0}^{p_j-1} x_{r,\, l+mQ_j}^{(j-1)} w_{P_j}^{-km}, \tag{3}$$

где

$$j = 1, 2, \cdots, n, \quad P_j = \prod_{l=1}^{j} p_l, \quad Q_j = \frac{N}{P_j},$$

$$k = 0, 1, \cdots P_j - 1, \quad l = 0, 1, \cdots, Q_j - 1, \quad r = \left[\frac{k}{p_j}\right],$$

причем под $x_{0,q}^{(0)}$ подразумевается входная последовательность

$$x_q \quad (q = 0, 1, \cdots, N-1).$$

Промежуточную последовательность, полученную на j-ом шаге, назовем j-массивом.

Как следует из (3), результаты, получаемые после каждого шага, используются для вычисления элементов в последующем шаге и при достижении равенства $j = n$ элементы полученного массива будут искомыми коэффициентами Фурье.

Из (3) следует, что каждое из N уравнений (1) представляется в виде последовательности сумм, число слагаемых в которых равно множителям p_i $(i=1, 2, \cdots, n)$.

Эффективность алгоритма БПФ достигается благодаря выполнению суммирования на каждом j-ом шагу одновременно по группам

$$[x^{(j)}_{r,l},\ x^{(j)}_{r,l+Q_j},\ x^{(j)}_{r,l+2Q_j},\cdots,\ x^{(j)}_{r,l+(p_l-1)Q_j}],$$

содержащим p_l элементов (называемых далее p_l-группой) сразу для всех N уравнений.

Процесс вычисления сумм для p_l-групп по (3) для всех N уравнений назовем этапом.

Весь вычислительный процесс БПФ состоит из n этапов.

Введем понятие подмассива. В процессе вычисления элементов j-массива выделяются такие p_l-группы, при вычислении которых используется один и тот же набор комплексных экспоненциалов.

k_j-подмассивом j-массива назовем совокупность тех p_l-групп, при вычислении которых по (3) используются одни и те же комплексные экспоненциалы.

Количество k_j-подмассивов определяется следующим образом:

$$k_1=1,\ k_j=\prod_{l=1}^{j-1} p_l\ \ (j=2,\ 3,\cdots). \tag{4}$$

В частности, в случае алгоритма БПФ по основаниям 2 или 4, т. е. в случае, когда все множители p_l равны двум или четырем, p_l-группы представляют собой соответственно пары или четверки элементов. Количество подмассивов j-массива составляет соответственно 2^{j-1} или 4^{j-1} ($j=1,\ 2,\cdots,\ n$).

В работе [5] приведен вычислительный алгоритм БПФ по основанию 2. В этом случае вычисление на каждом j-ом этапе выполняется по выражениям:

$$\begin{aligned} A'_r &= A'_{r-1}+w^q A''_{r-1},\\ A''_r &= A'_{r-1}-w^q A''_{r-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

где A'_{r-1} и A''_{r-1} — пара комплексных чисел, вычисленных на предыдущем этапе, а о степенях w будет сказано позднее.

Очевидно, что для вычисления коэффициентов массива из $N=2^n$ элементов по этому алгоритму требуется выполнить $N\log_2 N$ операций комплексного сложения и $\frac{1}{2}N\log_2 N$ операций комплексного умножения.

Приведем теперь вывод формул ДПФ по основанию 4, т. е. для случая, когда $N=4^n$.

Разобьем входную последовательность $\{x_k\}$ $(k=0,\ 1,\cdots,\ N-1)$ на четыре группы:

$$z_k^{(0)}=x_{4k},\ z_k^{(1)}=x_{4k+1},\ z_k^{(2)}=x_{4k+2},\ z_k^{(3)}=x_{4k+3}$$

$$\left(k=0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{N}{4}-1\right)$$

и вычислим ДПФ для каждой из последовательностей $z_k^{(m)}$ ($m = 0$, 1, 2, 3)

$$x_r^{(0)} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(0)} e^{-\frac{8\pi i}{N}kr},$$

$$x_r^{(1)} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(1)} e^{-\frac{8\pi i}{N}kr},$$

$$x_r^{(2)} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(2)} e^{-\frac{8\pi i}{N}kr},$$

$$x_r^{(3)} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(3)} e^{-\frac{8\pi i}{N}kr}. \tag{6}$$

Отметим, что величины $x_r^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2, 3$) обладают свойством периодичности, а именно

$$x_r^{(j)} = x_{r+\frac{N}{4}}^{(j)} \left(r = 0, 1, \cdots, \frac{N}{4} - 1\right), \tag{7}$$

Представим теперь ДПФ входного массива $\{x_k\}$ ($k = 0, 1, \cdots, N-1$) следующим образом:

$$y_r = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{N}kr} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(0)} e^{-\frac{8\pi r i}{N}k} + e^{-\frac{2\pi r i}{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(1)} e^{-\frac{8\pi r i}{N}k} +$$

$$+ e^{-\frac{4\pi r i}{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(2)} e^{-\frac{8\pi r i}{N}k} + e^{-\frac{6\pi r i}{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(3)} e^{-\frac{8\pi r i}{N}k}$$

$$\left(r = 0, 1, \cdots, \frac{N}{4} - 1\right).$$

Итак

$$y_r = x_r^{(0)} + x_r^{(1)} e^{-\frac{2\pi i}{N}r} + x_r^{(2)} e^{-\frac{4\pi i}{N}r} + x_r^{(3)} e^{-\frac{6\pi i}{N}r} =$$

$$= \sum_{j=0}^{3} x_r^{(j)} e^{-\frac{2\pi r i}{N}j} \quad \left(r = 0, 1, \cdots, \frac{N}{4} - 1\right).$$

Заменим в этой формуле r на $r + \frac{N}{4}$ и воспользуемся свойством периодичности (7). Тогда получим

$$y_{r+\frac{N}{4}} = \sum_{j=0}^{3} (-i)^j \, x_r^{(j)} \, e^{-\frac{2\pi i}{N} rj}. \tag{8}$$

Еще дважды заменяя в (8) индекс r на $r+\frac{N}{4}$, с учетом периодичности (7) получим окончательно следующую группу выражений:

$$y_r = \sum_{j=0}^{3} x_r^{(j)} \, w^{-rj},$$

$$y_{r+\frac{N}{4}} = \sum_{j=0}^{3} (-i)^j \, x_r^{(j)} \, w^{-rj},$$

$$y_{r+\frac{N}{2}} = \sum_{j=0}^{3} (-1)^j \, x_r^{(j)} \, w^{-rj}, \tag{9}$$

$$y_{r+\frac{3}{4}N} = \sum_{j=0}^{3} (i)^j \, x_r^{(j)} \, w^{-rj}$$

$$\left(r = 0,\ 1, \cdots, \frac{N}{4} - 1\right).$$

Аналогичные преобразования можно, в свою очередь, применить к $x_r^{(j)}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$, из чего следует, что вычисление коэффициентов ДПФ четырех последовательностей, состоящих из $\frac{N}{4}$ элементов каждая, можно свести к вычислению последовательностей из $\frac{N}{16}$ элементов каждая. Эти операции можно проводить до тех пор, пока каждая последовательность не сведется к четырем элементам. Таким образом, для $N = 4^n$, применяя (6) для последовательностей из $N, \frac{N}{4}, \frac{N}{4^2}, \cdots$ $\cdots$, 4 точек, получим коэффициенты ДПФ. При этом количество комплексных умножений составит $\frac{3}{4} N \log_4 N$, а количество комплексных сложений — $3\, N \log_4 N$.

Существуют различные варианты алгоритма БПФ, в частности, широко известны варианты Кули-Туки и Санди-Туки. Оба варианта удобны при машинной реализации тем, что результаты, получаемые после каждого этапа, размещаются в той области памяти, где ранее находились исходные данные, что дает значительную экономию оперативной памяти. Отличие этих вариантов состоит в том, что в варианте алгоритма Кули-Туки входной массив должен задаваться в упорядоченном виде, в то время как выходной получается в неупорядоченном (перетасованном); в варианте же Санди-Туки из неупорядоченного исходного массива после преобразования получаются результаты в упорядоченном виде. Отметим также, что в алго-

ритме Санди-Туки экспоненциальные коэффициенты используются в упорядоченном порядке степеней, а в варианте Кули-Туки—в неупорядоченном порядке степеней.

Перетасовка входных элементов массива (при алгоритме Санди-Туки) и получение перетасованных элементов выходного массива (при алгоритме Кули-Туки) производится по правилу реверсии разрядов номеров по данной системе счисления, т. е. если номер элемента в q-ичной системе счисления есть $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ (где $\alpha_i = 0, 1, \cdots, q-1$), то реверсия приводит к номеру $\alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_1$.

В процессе цифровой обработки случайных величин, когда применяется теорема свертки для преобразования Фурье, необходимо бывает осуществить также обратное преобразование Фурье.

Очевидно, что в случае основания 2 выражения ОДПФ не будут отличаться от выражений для прямого преобразования за исключением того, что экспоненциальные коэффициенты следует заменить сопряженными комплексными числами. Для основания 4 вычисление коэффициентов ОДПФ выполняется по выражениям:

$$
\begin{aligned}
x_r &= \sum_{j=0}^{3} y_r^{(j)} w^{rj}, \\
x_{r+\frac{N}{4}} &= \sum_{j=0}^{3} (i)^j y_r^{(j)} w^{rj}, \\
x_{r+\frac{N}{2}} &= \sum_{j=0}^{3} (-1)^j y_r^{(j)} w^{rj}, \\
x_{r+\frac{3}{4}N} &= \sum_{j=0}^{3} (-i)^j y_r^{(j)} w^{rj}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Опишем теперь реализацию алгоритма БПФ на спецпроцессоре [3] для вариантов Кули-Туки и Санди-Туки. Реализация обоих вариантов позволит осуществить прямое и обратное преобразование без дополнительной перетасовки результатов.

Очевидно, что при больших основаниях объем вычислений уменьшается, однако вычислительные формулы становятся более громоздкими.

Весьма эффективным для реализации в спецпроцессоре является преобразование по основанию 4.

Для случая $N=2^{2n+1}$ преобразование выполняется со смешанным основанием 4+2, т. е. все этапы вычислительного процесса, кроме последнего, выполняются по основанию 4, а последний—по основанию 2, что приводит к необходимости реализации на спецпроцессоре также и алгоритма по основанию 2. Естественно, что реализация смешанного алгоритма потребует поэтапного выполнения преобразований, что также дает возможность реализовать оба варианта (Кули-Туки и Санди-Туки) алгоритма единой вычислительной процедурой.

Итак, рассмотрим реализацию БПФ по основаниям 2 и 4 для вариантов Кули-Туки и Санди-Туки прямого и обратного преобразования Фурье.

Рассмотрим массив, состоящий из $N=2^n$ элементов (элементы массива в общем случае—комплексные числа). Расположение массива в оперативной памяти (ОП) таково, что разность адресов ОП соседних элементов постоянна. Информация, необходимая для управления потоком данных между оперативной памятью и спецпроцессором должна касаться расположения массивов в ОП, их размеров, форматов данных и должна содержать:

—адреса начальных элементов входного и выходного массивов и массива экспоненциалов в ОП;

—число подмассивов на данном этапе вычислительного процесса:

—число p_i-групп (пар или четверок) в каждом подмассиве;

—шаг между начальными элементами соседних подмассивов;

—шаг между соседними p_i-группами;

—шаг между элементами в p_i- группе.

Перед тем, как приступить к выполнению БПФ, необходимо составить и поместить в ОП таблицу экспоненциальных коэффициентов для конкретного варианта алгоритма. Число элементов в таблице, используемых при реализации БПФ, равно $\frac{N}{2}$ или $\frac{N}{4}$, соответственно основанию.

Таблица экспоненциалов, используемая при варианте Кули-Туки, должна содержать коэффициенты в перетасованном виде. При этом таблица для алгоритма по основанию 2 составляется по правилу:

$$w(k) = e^{\frac{2\pi i}{N}\alpha} \quad \left(k=0,\ 1,\cdots,\frac{N}{2}-1\right),$$

где α получается путем реверсирования последних $n-1$ разрядов двоичного представления числа k.

Для варианта Санди-Туки таблица экспоненциалов состоит из упорядоченного набора степеней, отличающихся друг от друга на $\frac{\pi}{2^j}$ радианов, где j — номер соответствующего этапа.

Для реализации вариантов Кули-Туки и Санди-Туки единым алгоритмом требуется составление отдельных подтаблиц для каждого этапа в случае алгоритма Санди-Туки, причем на j-ом этапе экспоненциальные коэффициенты определяются по правилу:

$$w(k) = e^{\frac{\pi i}{2^j}k} \quad (k=0,\ 1,\cdots,2^j-1).$$

Составив таблицы экспоненциалов для некоторого $N=2^n$, их можно будет использовать для вычисления коэффициентов Фурье с любым объемом входного массива $N=2^m$, где $m \leqslant n$.

Те же самые таблицы экспоненциалов можно использовать и для алгоритма по основанию 4, при этом при варианте Кули-Туки выборка экспоненциалов выполняется через один, а при варианте Санди-Туки и подтаблицы, и экспоненциалы в подтаблицах выбираются через один.

В спецпроцессоре предусмотрено средство для инвертирования знака элементов входного массива. Используя это средство, можно той же самой вычислительной процедурой вычислить коэффициенты ОДПФ по основанию 2.

Итак, одной вычислительной процедурой спецпроцессора можно реализовать один этап прямого и обратного преобразования Фурье по алгоритмам Кули-Туки и Санди-Туки для основания 2.

Для алгоритма по основанию 4 прямое и обратное преобразования выражаются различными формулами ((9) и(10) соответственно), поэтому их реализация требует различных процедур в спецпроцессоре.

Таким образом, в состав стандартных алгоритмов входят три последовательности микропрограмм, каждая из которых реализует варианты Кули-Туки и Санди-Туки алгоритма БПФ.

Вычислительный процесс БПФ для любого из трех приведенных алгоритмов в спецпроцессоре выполняется по следующей схеме.

Соответственно управляющей информации о массивах на любом j-этапе в первую очередь в ВЗУ-1 спецпроцессора загружаются экспоненциальные коэффициенты в количестве, равном $\min(k_j, m)$, где k_j—количество подмассивов, а m — объем ВЗУ-1.

После этого происходит прием элементов входного массива по p_l-группам в спецпроцессор и одновременно с их загрузкой в блоке быстрого умножения-сложения по формулам (5), (9), (10), соответственно алгоритмам, выполняются вычисления , промежуточные и окончательные результаты которых записываются в ВЗУ-2. Результаты вычисления p_l-групп записываются в ОП машины, после чего тот же процесс повторяется и для остальных p_l-групп в подмассивах.

В случае, когда $k_j > m$, после использования всех экспоненциальных коэффициентов, находящихся в ВУЗ-1, процесс повторяется с загрузкой оставшихся коэффициентов.

Подсчитаем общее время вычисления коэффициентов Фурье для всех этапов по основанию p ($p=2$; 4).

Введем следующие обозначения:

—время приема управляющей информации из ОП в спецпроцессор на одном этапе обозначим через τ_1, а суммарное время по этим этапам—t_1;

—время вычисления p элементов в блоке умножения-сложения обозначим через τ_p, а суммарное время вычисления — t_p ($p = 2, 4$);

—время переключения направления потока данных обозначим через τ_3, суммарное время переключения — t_3;

—время доступа к ОП обозначим через τ_5, суммарное время приема информации в спецпроцессор — t_5, суммарное время запоминания результатов в ОП — t_6, суммарное время приема экспоненциальных коэффициентов — t_7. Время доступа к ОП зависит от цикла обращения к ОП и от числа обращений к ОП со стороны центрального процессора и устройств ввода-вывода при их совместной работе. Ширину обращения к ОП в единицах слов обозначим через l. Поскольку вычисления в блоке умножения-сложения производятся параллель-

но с приемом информации в спецпроцессор, то общее время вычисления коэффициентов Фурье будет:

$$T_p = t_1 + \max(t_5,\ t_p) + t_3 + t_6 + t_7.$$

Число этапов вычислительного процесса БПФ равно $\log_p N$, следовательно

$$t_1 = \tau_1 \log_p N,$$

$$t_p = \frac{N}{p} \tau_p \log_p N,$$

$$t_3 = \frac{N}{p} \tau_3 \log_p N,$$

$$t_5 = t_6 = \frac{2N}{l} \tau_5 \log_p N,$$

количество k_j — подмассивов на каждом этапе вычисляется по формуле (4). Общее количество подмассивов — K, равное общему числу загружаемых в ВЗУ-1 экспоненциальных коэффициентов, вычисляется по формуле суммы геометрической прогрессии:

$$K = \frac{p^n - 1}{p - 1} = \frac{N-1}{p-1}.$$

Тогда

$$t_p = \frac{2(N-1)}{l(p-1)} \tau_5.$$

Следовательно

$$T_p = \tau_1 \log_p N + \max\left(\frac{2N}{l} \tau_5 \log_p N,\ \frac{N}{p} \tau_p \log_p N\right) +$$

$$+ \frac{N}{p} \tau_3 \log_p N + \frac{2\tau_5}{l}\left(\frac{N-1}{p-1} + N \log_p N\right). \qquad (11)$$

Время вычисления четверки элементов $\tau_4 = 12{,}8$ *мксек*.

При $l = 1$, т. е. когда прием информации в спецпроцессор производится по одному действительному числу, если время доступа к ОП $\geqslant 1{,}6$ *мксек*, то выражение (11) примет вид

$$T_p = \tau_1 \log_p N + 2\tau_5 \left(2N \log_p N + \frac{N-1}{p-1}\right) + \frac{N}{p} \tau_3 \log_p N$$

(заметим, что при $p = 2$ эта формула подавно верна).

Из этой формулы непосредственно следует, что

$$T_2 > 2T_4,$$

т. е. реализация алгоритма БПФ по основанию 4 на спецпроцессоре значительно эффективнее, чем по основанию 2.

Ժ. Ս. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ, Վ. Դ. ՇՉԻԳԼԻԿ. Ֆուրյեի արագ ձևափոխության իրականացումը մասնագիտացված պրոցեսորում *(ամփոփում)*

Բերվում է հաշվողական սխեմայի նկարագրումը, որը իրականացվում է Ֆուրյեի արագ ձևափոխության մասնագիտացված պրոցեսորում 4 հիմքով և խառը 4+2 հիմքով։

Դիտարկվում է Ֆուրյեի արագ ձևափոխության ալգորիթմի զանազան տարբերակների միավորումը միասնական գործողության մեջ, որը 4 հիմքի դեպքում կազմակերպված է այնպես, որ ստացվում է ժամանակի էական շահում։

J. S. NALBANDIAN, V. D. SCHIGLIK. *A fast Fourier transform on a special-purpose processor* (summary)

A description of a computational process yielding fast Fourier transform (FFT) on a special-processor by radix 4 and mixed radix 4+2 has been given.

A combination of different versions of FFT algoritms into a single procedure organised with radix 4 leading to essential time gain is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. J. Corinthios.* A fast Fourier transform for high-speed signal processing, IEEE Transactions on Computers, volume C—20, August 1971, 843—846.
2. *M. J. Corinthios.* The design of a class of fast Fourier transform Computers, IEEE Transactions of Computers, volume C—20, June 1971, 617—623.
3. *В. Д. Шиглик, Ж. С. Налбандян.* Проблемно-ориентированный процессор для эффективной обработки результатов наблюдений, Доклады АН АрмССР, том LXII, № 2, 1976, 100—104.
4. *J. W. Cooley* and *J. W. Tukey.* An algorithm for machine calculation of complex Fourier series, Math. Computation, vol. 19, April 1965, 297—301.
5. *W. T. Cochran, J. W. Cooley.* What is the fast Fourier transform, IEEE Transactions on audio and electroacoustics, volume AU—15, number 2, June 1967, 45—55.