ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 5, 1976 Математика

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ОТДЕЛИМОСТЬ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ И ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ

Теорема Хелли [1] является одним из самых замечательных и фундаментальных результатов теории выпуклых множеств. Сейчас известно много различных ее доказательств; наиболее интересные из них отмечены в обстоятельном обзоре [2]. В предлагаемой статье дается новое доказательство теоремы Хелли, основанное на построенной в [3] (и подробно изложенной в [4]) теории отделимости выпуклых конусов. Излагаемое доказательство открывает пути для различных обобщений теоремы Хелли; некоторые из них указаны в заключительной части статьи.

Прежде всего сформулируем определения и факты, касающиеся отделимости выпуклых конусов. Все построения будут проводиться в n-мерном евклидовом векторном пространстве R^n.

Замыкание, внутренность и выпуклая оболочка множества $M\subset R^n$ будут обозначаться, соответственно, через $\overline{M}$, $\operatorname{int} M$, $\operatorname{conv} M$. Если $Q\subset R^n$ — выпуклое множество, то через $\operatorname{aff} Q$ будет обозначаться его *несущая плоскость*. Внутренность выпуклого множества Q относительно $\operatorname{aff} Q$ будет обозначаться через $\operatorname{ri} Q$.

Пусть $K\subset R^n$ — выпуклый конус с вершиной 0. Через $D(K)$ будет обозначаться его *двойственный конус*:

$$D(K)=\{x\colon\ ax\leqslant 0 \text{ при } a\in K\}.$$

Будем говорить, что конусы $K_1,\cdots, K_m\subset R^n$ с общей вершиной в точке 0 *отделимы* в R^n, если существует гиперплоскость (проходящая через 0), которая отделяет какой-либо один из этих конусов от пересечения остальных (т. е. для некоторого i конус K_i находится в одном замкнутом полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью, а пересечение остальных конусов—в другом замкнутом полупространстве). Следующие две теоремы доказаны в работах [3], [4].

Теорема 1. *Если выпуклые конусы $K_1,\cdots, K_m$ с общей вершиной 0 неотделимы в R^n, то $\operatorname{ri}K_1\cap\cdots\cap\operatorname{ri}K_m\neq\varnothing$.*

Теорема 2. *Для того чтобы выпуклые конусы $K_1,\cdots, K_m$ с общей вершиной 0 были отделимы в R^n, необходимо и достаточно существование таких векторов $a_1\in D(K_1),\cdots, a_m\in D(K_m)$, хотя бы один из которых отличен от нуля, что $a_1+\cdots+a_m=0$.*

Перейдем теперь к теореме Хелли. Она утверждает (в наиболее существенном своем варианте), что *если в R^n дана конечная си-*

стема замкнутых выпуклых множеств, каждое $n+1$ *из которых имеют непустое пересечение, то существует точка, принадлежащая всем этим выпуклым множествам.* Очевидно, ее можно также сформулировать в следующей эквивалентной форме: *если в* R^n *заданы* $m+1$ *замкнутых выпуклых множеств* $F_1, \cdots, F_{m+1}$, *каждые* m *из которых имеют непустое пересечение и при этом* $F_1, \cdots, F_{m+1} = \varnothing$, *то* $m \leqslant n$. В этой форме мы ее и докажем.

Выберем для каждого $k=1, \cdots, m+1$ точку p_k, принадлежащую всем множествам $F_1, \cdots, F_{m+1}$, кроме F_k; таким образом, $p_k \in F_i$ при $i \neq k$. Далее, выберем замкнутое ограниченное выпуклое множество Q, содержащее все точки $p_1, \cdots, p_{m+1}$, и положим $M_i = F_i \cap Q$. Через $U_\varepsilon(M)$ будем обозначать ε-окрестность множества M в пространстве R^n. Так как $M_1 \cap \cdots \cap M_{m+1} = \varnothing$, причем множества M_i замкнуты, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(M_1) \cap \cdots \cap U_\varepsilon(M_{m+1}) = \varnothing$. Обозначим через r точную верхнюю грань чисел ε, обладающих этим свойством. Тогда

$$\overline{U_r(M_1)} \cap \cdots \cap \overline{U_r(M_{m+1})} \neq \varnothing, \quad U_r(M_1) \cap \cdots \cap U_r(M_{m+1}) = \varnothing. \qquad (1)$$

Без ограничения общности можно считать (произведя параллельный перенос), что

$$0 \in \overline{U_r(M_1)} \cap \cdots \cap \overline{U_r(M_{m+1})}. \qquad (2)$$

Обозначим Γ_i опорную гиперплоскость множества $\overline{U_r(M_i)}$ в точке 0, а через K_i — то из замкнутых полупространств, ограниченных гиперплоскостью Γ_i, которое содержит $\overline{U_r(M_i)}$. Из второго соотношения (1) вытекает, что $\operatorname{int} K_1 \cap \cdots \cap \operatorname{int} K_{m+1} = \varnothing$, и потому, по теореме 1, конусы $K_1, \cdots, K_{m+1}$ (с общей вершиной 0) отделимы. В то же время каждые m из конусов $K_1, \cdots, K_{m+1}$ имеют общую в н у т р е н н ю ю точку (например, одну из точек p_i), и потому неотделимы.

По теореме 2 существуют такие векторы $a_1 \in D(K_1), \cdots, a_{m+1} \in D(K_{m+1})$, не все равные нулю, что $a_1 + \cdots + a_{m+1} = 0$. Ясно, что в с е векторы $a_1, \cdots, a_{m+1}$ отличны от нуля (иначе по теореме 2, какие-либо m из конусов $K_1, \cdots, K_{m+1}$ были бы отделимыми).

Покажем, что векторы $a_1, \cdots, a_m$ (или любые другие m из векторов $a_1, \cdots, a_{m+1}$) линейно независимы. Действительно, допустим, что $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = 0$, где не все числа λ_i равны нулю; мы можем считать, что $|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_m|$, причем $\lambda_1 = 1$. Мы имеем

$$(1-\lambda_2)\, a_2 + \cdots + (1-\lambda_m)\, a_m + a_{m+1} = (a_1 + \cdots + a_{m+1}) - $$
$$-(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m) = 0.$$

Так как все коэффициенты в левой части неотрицательны, то

$$(1-\lambda_2)\, a_2 \in D(K_2), \cdots, (1-\lambda_m)\, a_m \in D(K_m), \quad a_{m+1} \in D(K_{m+1})$$

и потому (снова по теореме 2) конусы $K_2, \cdots, K_{m+1}$ отделимы, что однако невозможно. Полученное противоречие показывает, что векторы $a_1, \cdots, a_m$ линейно независимы в R^n. Но тогда $m \leqslant n$, чем и завершается доказательство.

Пусть теперь $\mathbf{F}$ — некоторый класс подмножеств пространства R^n. Обозначим через $\operatorname{him} \mathbf{F}$ наименьшее из натуральных чисел m, обладающих следующим свойством: если $F_1, \cdots, F_l$ — произвольные множества класса $\mathbf{F}$, причем каждые $m+1$ из них имеют непустое пересечение, то $F_1 \cap \cdots \cap F_l \neq \varnothing$. Обозначение $\operatorname{him} \mathbf{F}$ введено П. С. Солтаном [5] под названием *размерность Хелли* класса $\mathbf{F}$ (ср. также обозначения на стр. 60 книги [2]).

Будем считать, что класс $\mathbf{F}$ состоит только из замкнутых множеств, и попытаемся найти случаи, когда идея приведенного выше доказательства теоремы Хелли позволяет вычислить $\operatorname{him} F$ (в теореме) Хелли $\mathbf{F}$ есть класс всех замкнутых выпуклых множеств). С этой целью проанализируем основные моменты этого доказательства. Прежде всего в этом доказательстве множества $F_1, \cdots$ $\cdots, F_{m+1}$ были заменены ограниченными множествами $M_1, \cdots$ $\cdots, M_{m+1}$, содержащими некоторые выбранные точки p_i. Для возможности проведения этой части доказательства достаточно потребовать, чтобы класс $\mathbf{F}$ обладал следующим свойством:

А) Если $F \in \mathbf{F}$ и X — содержащееся в F компактное множество, то существует в классе $\mathbf{F}$ такое ограниченное множество M, что $X \subset M \subset F$.

Очевидно, что свойство А) будет, например, выполнено, если все множества класса $\mathbf{F}$ ограничены. Потребуем также, чтобы класс $\mathbf{F}$ обладал следующим свойством:

Б) Вместе с каждым множеством $M \in \mathbf{F}$ классу $\mathbf{F}$ принадлежит любое множество, получающееся из M гомотетией с произвольным центром и положительным коэффициентом.

Из выполнения свойства Б) вытекает, что класс $\mathbf{F}$ обладает свойством:

Б′) Множества, получающиеся из некоторого $M \in \mathbf{F}$ параллельными переносами, также принадлежат классу $\mathbf{F}$.

Следующий этап приведенного выше доказательства—рассмотрение множеств $U_\varepsilon(M)$. Множество $U_\varepsilon(M)$ представляет собой сферическую окрестность множества M, т. е. объединение всех открытых шаров радиуса ε с центрами в точках множества M. Однако в доказательстве можно было бы использовать и иные окрестности, например, множество $V(M)$, которое содержится в $U_\varepsilon(M)$ и в то же время содержит некоторую окрестность множества M, т. е. $V(M) \supset U_\delta(M)$ при некотором $\delta > 0$. Итак, потребуем, чтобы класс $\mathbf{F}$ обладал следующим свойством:

В) Для любого ограниченного множества $M \in \mathbf{F}$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $V \in \mathbf{F}$, $\delta > 0$, что $U_\delta(M) \subset V \subset U_\varepsilon(M)$.

Мы покажем теперь, что в случае класса $\mathbf{F}$, обладающего свойствами А), Б), В), можно получить оценку для размерности Хелли $\operatorname{him} \mathbf{F}$. Введем определения, необходимые для формулировки соответствующей теоремы. Вектор f, удовлетворяющий условию $|f|=1$, будем называть *экстремальным*, если существует такой конус K с вершиной 0, являющийся опорным конусом некоторого множества $F\in\mathbf{F}$, что луч $[0, f)$ является гранью конуса $D(K)$. (Опорным конусом выпуклого множества M в его точке a называется минимальный замкнутый выпуклый конус с вершиной a, содержащий множество M). Множество всех экстремальных векторов обозначим через $H(\mathbf{F})$. Далее, векторы $f_1,\cdots, f_{m+1}$ будем называть *положительно зависимыми*, если существуют такие положительные числа $\lambda_1,\cdots,\lambda_{m+1}$, что $\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_{m+1} f_{m+1}=0$. Если векторы $f_1,\cdots, f_{m+1}$ положительно зависимы, а каждые m из этих векторов линейно независимы, то будем говорить, что векторы $f_1,\cdots, f_{m+1}$ *минимально зависимы*. Наконец, через $\operatorname{md} H$, где $H\subset R^n$, обозначим наибольшее из таких натуральных m, что в H имеется $m+1$ минимально зависимых векторов.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{F}$ — *некоторый класс замкнутых выпуклых множеств, удовлетворяющий условиям* А), Б), В). *Тогда* $\operatorname{him}\mathbf{F}\leqslant \operatorname{md} H(\mathbf{F})$.

Доказательство следует идеям изложенного выше доказательства теоремы Хелли. Положим $\operatorname{him}\mathbf{F}=m$, и пусть $F_1,\cdots, F_{m+1}$ — такие множества класса $\mathbf{F}$, что $F_1\cap\cdots\cap F_{m+1}=\varnothing$, но каждые m из множеств $F_1,\cdots, F_{m+1}$ имеют непустое пересечение. Выберем такие точки $p_1,\cdots, p_{m+1}$, что $p_i\in F_j$ при $i\neq j$. В силу свойства А) существуют такие ограниченные множества $M_1,\cdots, M_{m+1}$ класса $\mathbf{F}$, что $M_i\subset F_i$ и $p_i\in M_j$ при $i\neq j$. Так как $M_i\subset F_i$, то $M_1\cap\cdots\cap M_{m+1}=\varnothing$ и потому, в силу замкнутости множеств M_i, существует такое $\varepsilon>0$, что $U_\varepsilon(M_1)\cap\cdots\cap U_\varepsilon(M_{m+1})=\varnothing$. Согласно свойству В), существуют такие множества $V_1,\cdots, V_{m+1}$ класса $\mathbf{F}$ и такое $\delta>0$, что $U_\delta(M_i)\subset\subset V_i\subset U_\varepsilon(M_i)$. Таким образом, $M_i\subset \operatorname{int} V_i$, $i=1,\cdots, m+1$, и $V_1\cap\cdots\cdots\cap V_{m+1}=\varnothing$. Выберем точку $b_i\in M_i$, $i=1,\cdots, m+1$, и обозначим через V_i^γ тело, гомотетичное телу V_i с центром b_i и коэффициентом $1+\gamma$. Пусть r — точная верхняя грань чисел $\gamma>0$, для которых $V_1^\gamma\cap\cdots\cap V_{m+1}^\gamma=\varnothing$. Тогда (ср. (1))

$$V_1^r\cap\cdots\cap V_{m+1}^r\neq\varnothing,\ \operatorname{int} V_1^r\cap\cdots\cap\operatorname{int} V_{m+1}^r=\varnothing. \tag{3}$$

Без ограничения общности можно считать (произведя параллельный перенос), что $0\in V_1^r\cap\cdots\cap V_{m+1}^r$ (ср. (2)).

Обозначим через K_i опорный конус множества V_i^r в точке 0. Тогда конусы $K_1,\cdots, K_{m+1}$ отделимы (см. (3)), но каждые m из них имеют общую внутреннюю точку и потому неотделимы. По теореме 2 существуют такие векторы $a_1\in D(K_1),\cdots, a_{m+1}\in D(K_{m+1})$, не все равные нулю, что $a_1+\cdots+a_{m+1}=0$. Так как конус $D(K_i)$ — острый (ибо K_i — телесный конус), то по теореме Крейна—Мильмана,

$$a_i=\sum_j \lambda_i^j f_i^j,$$

где f_i^j — экстремальные векторы конуса $D(K_i)$, числа λ_i^j положительны, а написанная сумма содержит конечное число слагаемых. Учитывая соотношение $a_1 + \cdots + a_{m+1} = 0$, получаем положительную зависимость $\sum_i \sum_j \lambda_i^j f_i^j = 0$.

Выберем теперь из векторов f_i^j наименьшее число векторов, являющихся положительно зависимыми, и пусть $\sum_{i,j} \mu_i^j f_i^j = 0$—положительная зависимость между выбранными векторами; множество тех пар (i, j), по которым здесь производится суммирование, обозначим через T. Запишем последнюю сумму в виде

$$\sum_{i,j} \mu_i^j f_i^j = \sum_i \Big(\sum_j \mu_i^j f_i^j \Big) = \sum_i a_i^*,$$

где по-прежнему берутся пары $(i, j) \in T$. Если для некоторого i_0 $(=1, \cdots, m+1)$ имеется хотя бы одна пара $(i_0, j) \in T$, то вектор $a_{i_0}^* = \sum_j \mu_{i_0}^j f_{i_0}^j$ отличен от нуля, поскольку $f_{i_0}^j \in D(K_{i_0})$, а конус $D(K_{i_0})$— острый. Следовательно, среди векторов a_i^* имеются отличные от нуля. Так как $a_i^* \in D(K_i)$, то отсюда следует, что все векторы a_i^* отличны от нуля (иначе некоторые m конусов K_i оказались бы отделимыми). Но тогда ясно, что в сумме $\sum_{i,j} \mu_i^j f_i^j = 0$ имеется не менее $m+1$ слагаемых. В силу минимальности числа слагаемых в этой сумме векторы f_i^j, где $(i, j) \in T$, минимально зависимы. Так как $f_i^j \in H(\mathbf{F})$, то $\mathrm{md}\, H(\mathbf{F}) \geqslant m$, т. е. неравенство $\mathrm{him}\, \mathbf{F} \leqslant \mathrm{md}\, H(\mathbf{F})$ справедливо.

Для формулировки следующей теоремы (содержащей противоположное неравенство) наложим еще одно требование на класс $\mathbf{F}$. Пусть M — некоторое выпуклое множество и f — отличный от нуля вектор. Будем говорить, что f является *нормальным вектором* для множества M, если существует такая точка $a \in M$, что $M \subset \{x: fx \leqslant fa\}$ и $\Gamma = \{x: fx = fa\}$ является единственной опорной гиперплоскостью множества M, проходящей через точку a. Наложим теперь на класс $\mathbf{F}$ следующее требование:

Г) Для любого вектора $f \in H(\mathbf{F})$ найдется такое множество $F \in \mathbf{F}$, что f является нормальным вектором для множества F.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{F}$ — *некоторый класс замкнутых выпуклых множеств, удовлетворяющий условиям* Б′), Г). *Тогда* $\mathrm{him}\, \mathbf{F} \geqslant \mathrm{md}\, H(\mathbf{F})$.

Доказательство. Положим $\mathrm{md}\, H(\mathbf{F}) = m$ и пусть $f_1, \cdots, f_{m+1} \in H(\mathbf{F})$ — минимально зависимые векторы, а $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{m+1} f_{m+1} = 0$ — положительная зависимость между ними. Для каждого $=1, \cdots, m+1$ выберем такое множество $M_i \in \mathbf{F}$, содержащее точку 0, что $M_i \subset \{x: f_i x \leqslant 0\}$ и $\Gamma_i = \{x: f_i x = 0\}$ — единственная опорная гиперплоскость множества M_i в точке 0. Положим $P_i = M_i - kf_i$, $i = 1, \cdots, m+1$, где k — некоторое положительное число. Тогда $P_i \in \mathbf{F}$. Легко видеть, что при любом выборе числа $k > 0$ мы имеем $P_1 \cap \cdots \cap P_{m+1} = \varnothing$. В самом деле, допустим, что существует точка $x_0 \in P_1 \cap \cdots \cap P_{m+1}$. Тогда $x_0 + kf_i \in M_i \subset \{x: f_i x \leqslant 0\}$ и потому $f_i (x_0 + kf_i) \leqslant 0$, т. е. $f_i x_0 \leqslant -k$. Следовательно, $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{m+1} \times f_{m+1}) x_0 \leqslant k(-\lambda_1 - \cdots - \lambda_{m+1}) < 0$, что однако невозможно, поскольку $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{m+1} f_{m+1} = 0$. Итак, $P_1 \cap \cdots \cap P_{m+1} = \varnothing$.

Докажем теперь, что при некотором выборе числа k каждые m из множеств $P_1, \cdots, P_{m+1}$ имеют непустое пересечение. Этим будет установлено соотношение $\operatorname{him} \mathbf{F} \geqslant m$, завершающее доказательство теоремы.

Так как каждые m из векторов $f_1, \cdots, f_{m+1}$ линейно независимы, то существует такое $\varepsilon > 0$, что при $|y_1| \leqslant \varepsilon, \cdots, |y_{m+1}| \leqslant \varepsilon$ любые m из векторов $f_1 + y_1, \cdots, f_{m+1} + y_{m+1}$ также будут линейно независимыми. Фиксируем такое $\varepsilon > 0$. Гиперплоскость $\{x: (f_i + y_i)\, x = 0\}$ обозначим через $L_i(y_i)$. Тогда при $|y_i| \leqslant \varepsilon$ и любых z_i каждые m из гиперплоскостей $L_i(y_i) + z_i$, $i = 1, \cdots, m+1$, имеют в пересечении точку. Если при этом $|z_1| \leqslant \delta, \cdots, |z_{m+1}| \leqslant \delta$, то эти точки пересечения находятся от точки 0 на расстояниях, не превосходящих $r\delta$, где r — некоторое положительное число (число $\delta > 0$ здесь произвольно). Следовательно. обозначая через E_d шар радиуса d с центром 0, мы найдем, что каждые m из множеств $(L_i(y_i) + z_i) \cap E_{r\delta}$ имеют при $|y_i| \leqslant \varepsilon$, $|z_i| \leqslant \delta$ непустое пересечение. Остается установить, что при некотором выборе чисел k, δ и векторов y_i, z_i мы имеем $P_i \supset (L_i(y_i) + z_i) \cap E_{r\delta}$.

Пусть $h_{i1}, \cdots, h_{in}$ — такие векторы, содержащиеся в гиперплоскости Γ_i, что они являются вершинами $(n-1)$-мерного симплекса S_i, имеющего 0 своим центром тяжести. Так как $h_{ij} \in \Gamma_i$, то существует такая линия $x = \varphi_{ij}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \eta$, содержащаяся в M_i, что $\varphi_{ij}(0) = 0$ и $\dfrac{d\varphi_{ij}(0)}{dt} = h_{ij}$. Обозначим через $T_i(t)$ симплекс с вершинами $\varphi_{i1}(t), \cdots, \varphi_{in}(t)$, а через $q_i(t)$ — центр тяжести этого $(n-1)$-мерного симплекса. Кроме того, положим $z_i(t) = q_i(t) - t^2 f_i$. Тогда $\varphi_{ij}(t) = th_{ij} + o(t)$, $q_i(t) = o(t)$, $z_i(t) = o(t)$. Так как точки $th_{i1}, \cdots, th_{in}$ являются вершинами симплекса, гомотетичного S_i, то из этого следует, что нормаль к несущей гиперплоскости симплекса $T_i(t)$ имеет вид $f_i + y_i(t)$, где $y_i(t) \to 0$ при $t \to 0$. Кроме того, так как центр тяжести симплекса $T_i(t) - t^2 f_i$ лежит в точке $z_i(t) = o(t)$, то этот симплекс удовлетворяет (при достаточно малом t и при некотором $c > 0$) условию

$$E_{ct} \cap (T_i(t) - t^2 f_i) = E_{ct} \cap \operatorname{aff} (T_i(t) - t^2 (f_i)).$$

Выберем, наконец, такое $t > 0$, что $|y_i(t)| \leqslant \varepsilon$, $|z_i(t)| \leqslant \delta$, где $\delta = \dfrac{ct}{r}$, и положим $k = t^2$. Тогда $r\delta = ct$, и потому мы имеем.

$$P_l = M_l - kf_l = M_l - t^2 f_l \supset (T_l(t) - t^2 f_l) \cap E_{cl} =$$

$$= E_{cl} \cap \operatorname{aff} (T_l(t) - t^2 f_l) = E_{cl} \cap (L_l(y_l(t)) + q_l(t) - t^2 f_l) =$$

$$= E_{cl} \cap (L_l(y_l(t)) + z_l(t)),$$

что и завершает доказательство.

Следствие. *Пусть* $H(\mathbf{F}^*) = H(\mathbf{F})$, *где* $\mathbf{F}^*$ — *некоторый класс замкнутых выпуклых множеств, удовлетворяющий условиям* А), Б), В), *а* $\mathbf{F} \subset \mathbf{F}^*$ — *его подкласс, удовлетворяющий условиям* Б′), Г). *Тогда* $\operatorname{him} \mathbf{F} = \operatorname{md} H(\mathbf{F})$.

В самом деле, $\operatorname{him} \mathbf{F} \leqslant \operatorname{him} \mathbf{F}^* \leqslant \operatorname{md} H(\mathbf{F}^*) = \operatorname{md} H(\mathbf{F})$ (теорема 3) и в то же время $\operatorname{him} \mathbf{F} \geqslant \operatorname{md} H(\mathbf{F})$ (теорема 4).

Пример 1. Пусть H—некоторое замкнутое подмножество сферы $S^{n-1} \subset R^n$, не являющееся односторонним, т. е. не содержащееся ни в какой полусфере сферы S^{n-1}. Всякое полупространство вида $\{x: fx < \lambda\}$, где $f \in H$, $\lambda \in R$, условимся называть H-выпуклым полупространством; всякое множество, представляющееся в виде пересечения некоторого семейства H-выпуклых полупространств, условимся называть H-выпуклым множеством. Через $\mathbf{F}$ обозначим класс всех H-выпуклых множеств пространства R^n. Тогда (ср. [6]) класс $\mathbf{F}$ удовлетворяет условиям А)—Г), причем $H(\mathbf{F}) = H$. Следовательно, $\operatorname{him} \mathbf{F} = \operatorname{md} H$.

Пример 2. Пусть $H \subset S^{n-1}$ — конечное множество, не являющееся односторонним. Обозначим через $\mathbf{F}$ класс всех многогранников, внешние нормали к $(n-1)$-мерным граням которых принадлежат множеству H. Условие А) здесь выполнено в силу того, что множество H не является односторонним. Выполнение условий Б), В), Г) очевидно. Таким образом, $\operatorname{him} \mathbf{F} = \operatorname{md} H$.

Пример 3. Пусть $\mathbf{F}$—класс всех многогранников, получающихся параллельными переносами из фиксированного n-мерного многогранника $M \subset R^n$. Тогда $\operatorname{him} \mathbf{F} = \operatorname{md} H$, где H—множество всех единичных векторов, являющихся внешними нормалями $(n-1)$-мерных граней многогранника M.

Математический институт им. В. А. Стеклова
АН СССР

Поступила 8.IX.1975

Վ. Գ. ԲՈԼՏՅԱՆՍԿԻ. Ուռուցիկ կոների անջատելիությունը և Խելլիի թեորեմը *(ամփոփում)*

Հեղինակի նախորդ հոդվածներից մեկում (ՀՍՍՀ ԳԱ տեղեկագիր, «Մաթեմատիկա» VII, № 4, 1972 թ.) ապացուցված է $K_1, K_2, \dots, K_m \subset R^n$ *ուռուցիկ կոների սիստեմի անջատելիության չափանիշ։*

Այս հոդվածում ցույց է տրված անջատելիության չափանիշի կիրառելիությունը կոմբինատորային երկրաչափությունում։ Հիմնական արդյունքը հանդիսանում է նշված չափանիշի օգնությամբ ստացված Խելլիի թեորեմի նոր ապացույցը։

V. G. BOLTIANSKY. *Separability of convex cones and Helly's theorem*
(summary)

A criterion of separability for a system of convex cones $K_1, \cdots, K_m \subset R^n$ was established in author's earlier article. Here the separability criterion is applied in combinatorial geometry. The main result consists in a new proof of the Helly's theorem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Хелли.* О совокупности выпуклых тел с общими точками, УМН, вып. 2, 1936, 80—81.
2. *Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли.* Теорема Хелли, Изд. „Мир", М., 1968.
3. *В. Г. Болтянский.* Свойство отделимости системы выпуклых конусов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 4, 1972, 250—257.
4. *В. Г. Болтянский.* Метод шатров в теории экстремальных задач, УМН, 30, № 3 (183), 1975, 3—55.
5. *П. С. Солтан.* Теорема Хелли для *d*-выпуклых множеств, ДАН СССР, 205, № 3, 1972, 537—539.
6. *В. Г. Болтянский.* Теорема Хелли для *H*-выпуклых множеств, ДАН СССР, 219, № 5, 1974, 1042—1044.