ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 5, 1976 Математика

К. А. ЯГДЖЯН

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСИММЕТРИЗУЕМЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введение

В настоящей работе рассматривается смешанная задача для гиперболических систем, которые предполагаются симметричными только на боковой границе.

Известно, что если система симметризуема, то ее характеристическая матрица в каждой точке подобна вещественной диагональной. Мы рассмотрим системы, для которых при $t=0$ последнее условие нарушается. Такие несимметризуемые системы будем называть слабо симметризуемыми. В случае смешанных задач, как и в случае задачи Коши, младшие члены слабо симметризуемых систем, вообще говоря, должны удовлетворять определенным условиям, а начальные данные и правые части уравнений должны иметь повышенную гладкость по определенным группам пространственных переменных [1]. В смешанных задачах для слабо симметризуемых систем к этим естественным требованиям прибавляются (см. ниже) некоторые условия согласования (на пересечении границ) повышенного, по сравнению с симметризуемыми системами, порядка. Существуют случаи, в которых подобные условия согласования необходимы для существования решения смешанной задачи в пространстве L_2.

В доказательствах мы используем модификацию метода работы [2] и схему получения интегрального неравенства работы [3], соответствующим образом видоизмененную. В случае слабо симметризуемой системы получается интегральное неравенство с неинтегрируемым ядром и используется условие обращения подобного неравенства ([4], [5], [6]).

Автор благодарит профессора М. С. Аграновича за ряд полезных советов.

§ 1. Постановка задачи

Рассматриваются псевдодифференциальные (п. д.) системы следующего вида:

$$L=\frac{\partial}{\partial t}-A_n(t,x)\frac{\partial}{\partial x_n}-G(t,\ x,\ D')\,\Lambda'-C(t,\ x,\ D')=\frac{\partial}{\partial t}-M, \tag{1}$$

где $x=(x_1,\cdots,x_n)=(x',x_n)$ $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\xi',\xi_n)$, Λ' — п. д. оператор с символом $\sqrt{1+|\xi'|^2}$, $A_n(t,x)$ есть $m\times m$ матричная **B**-функция. т. е. C^∞ функция, все производные которой ограничены. $G(t,x,D')$, $C(t,x,D')$ есть матричные (размера $m\times m$) п. д. операторы по $x_1,\cdots,x_n$ нулевого порядка, символы $G(t,x,\xi')$, $C(t,x,\xi')$ которых не зависят от ξ_n и являются непрерывно дифференцируемыми функциями по t до порядка r, где r — достаточно большое число.

Граничное условие имеет вид

$$u(t,x',0)\in B(t,x'),\ x_n=0, \tag{1'}$$

где $B(t,x')$ — некоторое подпространство C^m фиксированной размерности. Всюду далее мы будем, не ограничивая общности, считать $B(t,x')$ не зависящей от t, x'. Использованием стандартных методов, а именно, разбиения единицы и локального изменения координат, множество задач в более сложных областях может быть приведено к случаю полупространства.

Полученные результаты относятся к задаче

$$\begin{cases} L[u]=f(t,x) \quad \text{в} \quad (0,T)\times R^n_+, \\ u(t,x)\in B,\ x_n=0, \\ u(0,x)=0, \end{cases} \tag{2}$$

где $u(t,x)$, $f(t,x)$ есть вектор-столбцы размерности m.

Введем обозначение

$$A(t,x,\xi)=A_n(t,x)\xi_n+G(t,x,\xi')\Lambda'(\xi'). \tag{3}$$

Нам понадобятся следующие условия:

Условие I. Существует симметричная положительно определенная $m\times m$ матричнозначная **B**-функция $R(t,x,\xi)$, определенная в $(0,T)\times R^n\times\{\xi;\ |\xi|=1\}$, со следующими свойствами:

(i) $R(t,x,\xi)\,A(t,x,\xi)$ эрмитова при $(t,x,\xi)\in(0,T)\times$

$$\times R^n\times\{\xi;\ |\xi|=1\},$$

(ii) $R(t,x,\xi)=I$ при $x_n=0$,

(iii) $\dfrac{\partial^2 R}{\partial x_n\,\partial\xi_n}=0$ при $x_n=0$;

Условие II.

$$\det A_n(t,x',0)\neq 0;$$

Условие III. (Неотрицательность граничных условий). Для любого $u\in B$

$$u\cdot\overline{A_n(t,x)u}\geqslant 0. \tag{4}$$

В случае положительных граничных условий задача (2) была решена М. С. Аграновичем ([7], [8], [9]) для более общих п. д. систем первого порядка. В [7] указано, что положительные граничные условия могут быть заменены на неотрицательные, если система симметрична в некоторой окрестности боковой границы. В то же время пример Ямагути [3] показывает, что при нарушении условия симметричности системы на границе задача (2) с неотрицательными граничными условиями, вообще говоря, некорректна. Это связано с нарушением равномерного условия Лопатинского.

М. Икава [3] установил энергетические неравенства для решений задачи (2), если выполнены условия I — III, когда оператор (1) — дифференциальный. В предложении 1 этой же работы приводятся достаточные условия ((1.7), (1.8) [3]) существования $R(t, x, \xi)$, удовлетворяющего условию I. Однако, в приведенном в [3] доказательстве последнего предложения имеется ошибка, хотя результат и верен (см. ниже).

Пусть $e^l(t, x, \xi)$, $|e^l|=1$ является собственным вектором матрицы $A(t, x, \xi)$, соответствующим $\lambda_l(t, x, \xi)$. Тогда в [3] строится функция

$$R(t, x, \xi) = [e^l(t, x, \xi)\cdot e^j(t, x, \xi)]_{l, j=1,\dots,m} \tag{5}$$

и утверждается, что она удовлетворяет условию I. Для того чтобы убедиться, что это не так, достаточно рассмотреть систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \begin{pmatrix} 0 & 1+x_2^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_2} = f. \tag{6}$$

Это—строго гиперболическая система и для нее выполнены все условия Предложения 1 [3]. Однако матрица, построенная по формуле (5), не удовлетворяет пункту (i) условия I.

На п. д. системы вида (1), в предположении симметричности $A(t, x, \xi)$ вне некоторого компакта, переносятся результаты работы [3].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* I, II *и* III. *Тогда для решения* $u(t, x)\in \mathbf{E}(k, R^n_+)$ (*k— положительное целое*) *задачи* (2), (I') *с начальным условием* $u(0, x) = g(x)$ *при* $f(t, x)\in\mathbf{E}(k, R^n_+)$ *имеет место энергетическое неравенство*

$$|\!|\!| u(t, x)|\!|\!|^2_{k, R^n_+} \leqslant C_k \{|\!|\!| g(x)|\!|\!|^2_{k, R^n_+} + |\!|\!| f(0, x)|\!|\!|^2_{k-1, R^n_+} + \int_0^t |\!|\!| f(s, x)|\!|\!|^2_{k, R^n_+}\, ds\} \tag{7}$$

для $t\in[0, T]$ *с постоянной* C_k, *не зависящей от* u *и* t.

Предложение 1. *Пусть матрица* $A(t, x, \xi)$, $\xi\neq 0$ *подобна вещественной диагональной, симметрична при* $x_n=0$, *а ее собственные значения имеют постоянную кратность. Тогда, для того чтобы существовал симметризатор* $R(t, x, \xi)$, *удовлетворяющий условию* I *и такой, что* $\frac{\partial R}{\partial x_n}(t, x', 0, \xi)=0$, *необходимо и достаточно чтобы*

$$\operatorname{Im}\frac{\partial A}{\partial x_n}(t,\ x',\ 0,\ \xi)=0 \tag{8}$$

на $[0,\ T]\times\{x;\ x_n=0\}\times\{\xi;\ |\xi|=1\}$.

Легко заметить, что условие (8) эквивалентно условиям (1.8), (1.7) работы [3].

§ 2. Основные результаты

Кроме обозначений работы [3] мы будем пользоваться нормами

$$\|u\|^2_{p,\,q}=\sum_{\substack{k=0,\dots,p\\ |\alpha|+k\leqslant p+q}}\|D^{\alpha}_{x'},\ D^{k}_{x_n}u\|^2_{L^2}, \tag{9}$$

$$\|u(t,\ x)\|^2_{p,\,q}=\sum_{j=0}^{p}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j}u(t,\ x)\right\|^2_{p-j,\,q} \tag{10}$$

и соответствующим пространством $\mathrm{E}^{p,\,q}$.

Для п. д. систем мы предположим, что носители рассматриваемых решений лежат в фиксированном компакте. Имеет место

Теорема 2. *Пусть оператор* $C(t,\ x,\ D')$ *такой, что функция* $tC(t,\ x,\ \xi)$ *по* t r *раз непрерывно дифференцируема, и пусть выполнены условия* I, II, III, *и*

$$\int_0^t\frac{\|f(s,\ x)\|^2_{1,\,R^n_+}}{s^{2p}}\,ds<\infty. \tag{11}$$

Тогда для решения $u(t,\ x)\in\mathrm{E}\,(2,\ R^n_+)$ *задачи* (2) *имеет место энергетическое неравенство*

$$\|u(t,\ x)\|^2_{1,\,R^n_+}\leqslant t^{2p}\operatorname{const}\int_0^t\frac{\|f(s,\ x)\|^2_{1,\,R^n_+}}{s^{2p}}\,ds, \tag{12}$$

если $\|u(t,\ x)\|^2_{1,\,R^n_+}=t^{2p}\,o(1),\ t\to+0$, *где положительная постоянная* p *достаточно велика и зависит от* $C(t,\ x,\ \xi)$.

Замечание 1. В теореме 2 $C(t,\ x,\ \xi')$ может, вообще говоря, иметь особенность при $t=0$.

Доказательство. С помощью $R(t,\ x,\ \xi)$ вводится оператор $\mathrm{H}_0(t)$ и затем—скалярное произведение по формуле

$$(u,\ v)_{\mathrm{H}\,(t)}=(\mathrm{H}_0(t)\,u_0,\ v_0)_{L^2(R^n)}+C\,((L+(D_x)^2)^{-1}\,u_0,\ v_0)_{L^2(R^n)}. \tag{13}$$

Доказывается, что для $u\in L^2(R^n_+)$ с носителем в $\{x;\ 0\leqslant x_n\leqslant 1\}$ имеет место

$$\|u\|_{L^2(R^n_+)}\leqslant c_0\,\|u\|_{\mathrm{H}\,(t)}\leqslant c_1\,\|u\|_{L^2(R^n_+)}, \tag{14}$$

а для $u \subset H^1(R^n_+)$, $\operatorname{supp} u \subset \{x;\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

$$2\,\mathrm{Re}\,((M[u])_0,\ \mathrm{H}_0(t)\,u_c) \leqslant \left(\frac{c}{t} + \mathrm{const}\right) \|u\|^2_{L^2(R^n_+)} -$$

$$-\int A_n(x',\ 0,\ t)\ u(x',\ 0)\cdot \overline{u(x',\ 0)}\,dx'. \qquad (15)$$

Для u, $\operatorname{supp} u \subset \{x;\ 0 \leqslant x_n \leqslant 1\}$ выводим неравенство

$$y(t) \leqslant \int\limits_0^t \left(\mathrm{const} + \frac{c}{t}\right) y(t)\,dt + \mathrm{const} \int\limits_0^t \|f(s,\ x)\|^2_{1,\ R^n_+}\,ds, \qquad (16)$$

где $y(\tau) = \max\limits_{0 < t < \tau} \|u(t,\ x)\|^2_{1,\ R^n_+}$. Используя разложение единицы и соответствующий результат для задачи Коши, доказательство которого не представляет особого труда, а также условие обратимости интегрального неравенства с неинтегрируемым ядром [4] при достаточно больших p, выводим отсюда (11). Доказательство для $\|u\|^2_{s,\ R^n_+}$ аналогично.

Замечание 2. Неравенство (11) переносится на функции $u(t,\ x) \in \mathrm{E}(1,\ R^n_+)$ аналогично тому, как это сделано в [3].

Пусть оператор $\widetilde{L}$ такой, что $Q = \widetilde{L} - L$ является п. д. оператором по $x_1, \cdots, x_n$, символ $Q(t,\ x,\ \xi)$ которого не зависит от ξ_n и имеет порядок не выше первого.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\left|\begin{array}{ll} \widetilde{L}[v] = f, & (17) \\ v \in B,\ x_n = 0,\ v(0,\ x) = 0. & (18) \end{array}\right.$$

Предположим, что для решений задачи (17), (18) имеет место оценка $(g = 0,\ 1, \cdots,\ ;\ k = 1,\ 2, \cdots)$

$$\|v(t,\ x)\|^2_{s,\ g} \leqslant C_{k,\ g} \left\{\|f(0,\ x)\|^2_{k-1,\ g} + \int\limits_0^t \|f(s,\ x)\|^2_{s,\ g}\,ds\right\}. \qquad (19)$$

Рассмотрим последовательность задач

$$\left|\begin{array}{l} \widetilde{L}[v_l] = f_{l-1},\ f_0 = f,\ f_k = Qv_k,\ k = 1, \cdots,\ n. \\ v_l \in B,\ v_l(0,\ x) = 0, \end{array}\right. \qquad (20)$$

где $v_l \in \mathrm{E}^{p+1,\ n+1-l+s}$, $i = 1, \cdots,\ n$.

Теперь уже можем привести

Условие IV. Существует $f_n \in \mathrm{E}^{p+1,\ s}$, построенная вышеуказанным образом, где положительные постоянные n, s зависят только от оператора L.

Введем матричный п. д. оператор $\mathrm{L}(t, D')$, элементы которого имеют вид $\lambda_{ij}(t)\,\Lambda'^k$, $0 \leqslant k \leqslant s$, $i, j = 1, \cdots, m$, где $\lambda_{ij}(t)$ — достаточно гладкие функции, и предположим, что при $t > 0$ существует $\mathrm{L}^{-1}(t, D')$, причем $\|\mathrm{L}^{-1}(t)\|_{L_2} \leqslant \mathrm{const}\ t^{-l}$, где $l = \mathrm{const}$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 3. *Пусть существует оператор* $\mathrm{L}(t, D')$ *такой, что*

1°. $[\mathrm{L}(t, D'), A_n(t, x)] = 0$;

2°. *если граничное условие записать в виде* $\mathrm{B}u = 0$, *то*

$$[\mathrm{L}(t, D'), \mathrm{B}] = 0;$$

3°. $\dot{\mathrm{L}}(t, D')\,\mathrm{L}^{-1}(t, D')$, $\mathrm{L}(t, D')\,C(t, x, D')\,\mathrm{L}^{-1}(t, D')$ *есть п. д. операторы порядка не выше нулевого, символы элементов которых ограничены сверху функцией* $\mathrm{const}\cdot t^{-1}$, $t > 0$, $|\xi| = 1$;

4°. $\mathrm{L}(t, D')\,G(t, D')\,\mathrm{L}^{-1}(t, D')$ *есть п. д. оператор с достаточно гладким по* t *символом, причем для* $\mathrm{L}(t, \xi')\,A(t, x, \xi)\,\mathrm{L}^{-1}(t, \xi)$ *выполнено условие* I;

5°. *выполнены условия* II, III, *а* IV *имеет место с достаточно большими* n *и* p;

Тогда для любого решения $u \in \mathrm{E}(2, R^n_+)$ *задачи* (2) *имеет место энергетическое неравенство*

$$\|u(t, x)\|^2_{1, R^n_+} \leqslant C_1 \left\{ \|f(0, x)\|^2_{0, s+n} + \int_0^t \|f(\tau, x)\|^2_{1, s+n}\, d\tau \right\}. \tag{21}$$

с постоянной C_1, *не зависящей от* f *и* u.

Доказательство. С помощью функций v_l задача (2) приводится к новой задаче с быстро убывающей правой частью f_n (см. [4], [5], [6])

$$L[w] = f_n, \quad w = u - \sum_{l=1}^{n} v_l. \tag{22}$$

Далее, с помощью $\mathrm{L}(t, D')$ делается преобразование неизвестной функции и применяется теорема 2. Теорема доказана.

Как и в [3] оценка (21) переносится на функции u из $\mathrm{E}(q, R^n_+)$ Заметим, что условие IV содержит в себе определенные условия согласования на границе $t = 0$, $x_n = 0$ более высокого порядка, чем это. требуется для существования решения в симметризуемом случае.

Используя результат работы [10] и метод доказательства теоремы существования из [11], получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, *а оператор* L — *дифференциальный. Тогда в* $\mathrm{E}(1, R^n_+)$ *существует единственное решение задачи* (2) *и для него справедлива оценка* (21).

§ 3. Примеры

1°. Пример 1. Система имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\begin{pmatrix}0 & \mu_1^2 & 0\\ \mu_1^2 & 0 & \mu_2^2 x_2^2\\ 0 & x_2^2 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_1}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}u=f, \tag{23}$$

где $\mu_i(0)=0$, $\dot{\mu}_i(t)\geqslant 0$, $\mu_i(t)\neq 0$, $t\neq 0$, и $\mu_2(t)$ имеет степенную скорость при $t\to 0$. При $t>0$ система симметризуема, при $t=0$ не подобна диагональной. Для нее

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mu_2\end{pmatrix},\quad \tilde{L}=\frac{\partial}{\partial t}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{24}$$

Граничное условие имеет вид $\mathbf{B}u=0$, где

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Для задачи (2) с (25), (23) равномерное условие Лопатинского нарушено.

Согласно теореме 4 для нее существует единственное решение и для него имеет место энергетическое неравенство (18), если $|c_{13}|$, $|c_{23}|\leqslant \mathrm{const}\,\dot{\mu}_2(t)$, а функция $f(t, x_1, x_2)$ удовлетворяет, например, условию

$$\sum_{k+m<r}\left|\frac{\partial^{k+m}}{\partial x_2^k\,\partial t^m}f(0, 0, x_1)\right|=0, \tag{26}$$

где r — некоторая постоянная.

2°. В теоремах 3, 4 начальные данные, очевидно, можно брать произвольными. Вышеизложенная техника обобщается на произвольные скорости вырождения, однако это приводит к очень жестким условиям на f.

3°. Приведем наконец пример строго гиперболической системы, для которой не существует симметризатора со свойствами условия I:

Пример 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\begin{pmatrix}0 & x_2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_1}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_2}=f. \tag{27}$$

Ереванский государственный университет

Поступила 17.XII.1975

Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Խառը խնդիրներ չսիմետրիզացվող հիպերբոլական համակարգերի որոշ դասերի համար (*ամփոփում*)։

Հոդվածում քննարկվում է առաջին կարգի չսիմետրիզացվող հիպերբոլական համակարգերի համար ոչ բացասական եզրային պայմաններով խառը խնդիր։ Հավասարման գլխավոր մասի վրա դրվում են որոշ պայմաններ։ Դիտարկվում են հաստատուն և փոփոխական պատիկությամբ խարակտերիստիկ արմատներ։

C. H. YAGDJIAN. *Mixed problem for some non symmetrizable hyperbolic systems* (summary)

The paper is conserned with a mixed problem with nonnegative boundary condition for a hyperbolic system of the first order which is assumed symmetric only at the boundary.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Я. Иврий, В. М. Петков.* Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 29, вып. 5, 1974, 3—70.
2. *S. Mizohata, Yu. Ohya.* Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caracteristiques multiplies, II, Japan J. Math., 40: 1, 1971, 63—104.
3. *M. Ikawa.* Mixed problem for a hyperbolic system of the first order, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 7 (1971. 2), 427—454.
4. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для гиперболического уравнения, вырождающегося на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 181, № 4, 1968, 798—802.
5. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для одномерного гиперболического уравнения с данными на линии вырождения, Дифф. уравнения, 4, № 9, 1968, 1658—1662.
6. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196: 2, 1971, 289—292.
7. *М. С. Агранович.* Положительные граничные задачи для некоторых гиперболических систем, ДАН СССР, 167, № 6, 1966, 1215—1218.
8. *М. С. Агранович.* О положительных граничных задачах для некоторых систем первого порядка, Труды ММО, 16, 1967, 3—24.
9. *М. С. Агранович.* Граничные задачи для систем псевдодифференциальных операторов I-го порядка, УМН, 24. вып. 1, 1969, 61—125.
10. *J. Rauch, F. J. Massey.* Differentiability of solutions to hyperbolic initial boundary value problems, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. 189, 1974, 303—319.
11. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 2, 1974, 149—165.