

С. Г. СИМОНЯН, М. В. ФЕДОРЮК

# АСИМПТОТИКА МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ И ЗОН НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ХИЛЛА

## § 1. Введение

1. Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \mu^2 Q(t) x = 0, \quad t \in R, \quad (1.1)$$

где  $x(t)$  есть  $n$ -вектор (столбец),  $Q(t)$  есть  $n \times n$  матрица,  $\mu$  — вещественный параметр. Матрица  $Q(t)$  имеет период  $T > 0$ . Число  $\rho = \rho(\mu)$  называется мультипликатором [3] системы (1.1), если существует нетривиальное решение этой системы  $x(t)$  такое, что

$$x(t + T) = \rho \cdot x(t) \quad (1.2)$$

при всех  $t \in R = (-\infty, +\infty)$ . Нас интересует асимптотика мультипликаторов  $\rho(\mu)$  при  $\mu \rightarrow +\infty$ .

Эта задача рассматривается при следующих предположениях относительно матрицы  $Q(t)$ :

Условие I. При  $t \in R$  собственные значения матрицы  $Q(t)$  вещественны, положительны и различны.

Условие II. Матрица  $Q(t)$  голоморфна в некоторой полосе

$$G_a = \{t : |\operatorname{Im} t| < a\}.$$

Заметим, что мы не предполагаем вещественной симметричности или эрмитовости матрицы  $Q(t)$  при  $t \in R$ .

Основным результатом настоящей работы является теорема 3.7 (формула 3.27)), в которой получены асимптотические формулы для мультипликаторов, и теорема 4.1 — о зонах неустойчивости.

Отметим, что в случае систем для мультипликаторов ранее был получен только главный член асимптотики.

Асимптотику  $\rho_j(\mu)$  мы вычисляем с помощью асимптотики фундаментальной матрицы  $X(t, \mu)$  системы (1.1) (при  $\mu \rightarrow +\infty$ ,  $t \in [0, T]$ ). Асимптотику  $X(t, \mu)$  можно вывести из классических результатов Г. Биркгофа — Я. Д. Тамаркина [1], [2], однако из такой асимптотики не удастся вычислить асимптотику мультипликаторов. Основной технический прием, использованный в настоящей работе — построение некоторой специальной фундаментальной матрицы (ф. м.), это сделано в § 2. При этом существенно используется голоморфность матрицы  $Q(t)$  в окрестности вещественной оси.

Асимптотические формулы для модулей мультипликаторов  $\rho_j(\mu)$  системы вида (1.1) в точках краев зон неустойчивости при гладкой

симметрической вещественной матрице  $Q(t)$ , которые удовлетворяют еще условию I, вычислены в работе [4]. Асимптотика ширины зон неустойчивости скалярного уравнения (1.1) при аналитической функции  $Q(t)$  получена в работе [9]. Некоторые результаты этой работы содержатся в [10], [11] и доложены на семинаре в МФТИ.

## § 2. Асимптотика специальной фундаментальной системы решений

1. Введем обозначения:  $q_j(t)$ ,  $1 \leq j \leq n$  — собственные значения матрицы  $Q(t)$ , занумерованные в порядке убывания:

$$q_1(t) > q_2(t) > \dots > q_n(t) > 0, \quad t \in R, \quad (2.1)$$

$$\lambda_j(t) = -i \sqrt{q_{n-j+1}(t)}, \quad \lambda_{n+j}(t) = i \sqrt{q_j(t)}, \quad (2.2)$$

где  $\sqrt{q_j(t)} > 0$  при  $t \in R$ ,

$$\Lambda_0(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_{2n}(t)). \quad (2.3)$$

Сведем систему (1.1) к системе первого порядка, полагая

$$x_j(t) = y_j(t), \quad \frac{dx_j(t)}{dt} = \mu y_{n+j}(t), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.4)$$

Тогда система (1.1) эквивалентна системе

$$\frac{dy}{dt} = \mu A(t) y, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -Q(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где  $y(t)$  есть  $2n$ -вектор (столбец) с компонентами  $y_j(t)$  и  $0$ ,  $E$  — соответственно нулевая и единичная  $n \times n$  матрицы. Собственными значениями матрицы  $A(t)$  является  $\lambda_j(t)$ .

Если  $b > 0$  достаточно мало, то в полосе  $G_b = \{t: |\text{Im} t| \leq b\}$  функции  $\lambda_j(t)$  голоморфны и различны и поэтому существует [5] голоморфная и невырожденная при  $t \in G_b$  матрица  $T_0(t)$  такая, что

$$A(t) T_0(t) = T_0(t) \Lambda_0(t). \quad (2.6)$$

Пусть  $\Lambda_1(t)$  — диагональная матрица с элементами

$$(\Lambda_1(t))_{jj} = \lambda_j^{(1)}(t) = - \left( T_0^{-1}(t) \frac{dT_0(t)}{dt} \right)_{jj}, \quad (2.7)$$

и  $T_1(t)$  — матрица с элементами

$$(T_1(t))_{jj} = 0, \quad (T_1(t))_{ij} = (\lambda_i(t) - \lambda_j(t))^{-1} \left( T_0^{-1}(t) \frac{dT_0(t)}{dt} \right)_{ij}, \quad (2.8)$$

Тогда

$$[\Lambda_0(t), T_1(t)] - T_0^{-1}(t) \frac{dT_0(t)}{dt} = \Lambda_1(t),$$

$$[\Lambda_0(t), T_1(t)] = \Lambda_0(t) T_1(t) - T_1(t) \Lambda_0(t). \quad (2.9)$$

Лемма 2.1. Пусть  $b > 0$  достаточно мало. Тогда существует  $\mu_0 = \mu_0(b) > 0$  такое, что подстановка

$$y(t) = T_0(t)(E + \mu^{-1} T_1(t)) z(t) \quad (2.10)$$

приводит систему (2.5) к виду

$$\frac{dz}{dt} = (\mu \Lambda_0(t) + \Lambda_1(t) + \mu^{-1} P(t, \mu)) z(t), \quad (2.11)$$

$$P(t, \mu) = -(E + \mu^{-1} T_1(t))^{-1} \times \\ \times (T_1(t) \Lambda_1(t) + T_0^{-1}(t) \frac{dT_0(t)}{dt} T_1(t) + \frac{dT_1(t)}{dt}). \quad (2.12)$$

Матрица  $P(t, \mu)$  при  $\mu > \mu_0(b)$  голоморфна в  $G_b$  и

$$\max_{t \in G_b} \|P(t, \mu)\| \leq c, \quad \mu > \mu_0(b), \quad (2.13)$$

где  $c$  не зависит от  $\mu$ ,  $G_b = \{t: 0 \leq \operatorname{Re} t \leq T; |\operatorname{Im} t| \leq b\}$ .

Доказательство см. [6], лемма 2.3. Заметим, что матрицы  $T_j(t)$ ,  $\Lambda_j(t)$ ,  $j = 0, 1$  голоморфны в области  $G_b$ , и что имеет место асимптотическое разложение

$$P(t, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \mu^{-k}, \quad \mu \rightarrow \infty, \quad t \in G_b, \\ P_k(t) = (-1)^{k-1} (T_1^{k+1}(t) \Lambda_1(t) + \\ + T_1^k(t) T_0^{-1}(t) \frac{dT_0(t)}{dt} T_1(t) + T_1^k(t) \frac{dT_1(t)}{dt}). \quad (2.14)$$

Введем обозначения

$$\xi_j(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_j(t) dt, \quad \xi_j^{(1)}(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_j^{(1)}(t) dt,$$

$$\xi_{ij}(\alpha, \beta) = \xi_i(\alpha) - \xi_j(\beta),$$

$$\xi_{ij}^{(1)}(\alpha, \beta) = \xi_i^{(1)}(\alpha) - \xi_j^{(1)}(\beta),$$

$$U^0(\alpha, \beta) = \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} (\mu \Lambda_0(t) + \Lambda_1(t)) dt \right),$$

$$u_j^0(\alpha, \beta) = \exp (\mu \xi_j(\alpha, \beta) + \xi_j^{(1)}(\alpha, \beta)). \quad (2.15)$$

Здесь интеграл берется по гладкой кривой, содержащей точки  $\alpha, \beta$  и лежащей в области  $G_b$ , где  $b > 0$  выбрано так, чтобы была применима лемма 2.1. Точный выбор контура мы будем каждый раз указывать. Сведем систему (2.11) к системе интегральных уравнений. Фиксируем  $j$  и положим

$$z_j(t, \mu) = u_j^0(0, t) w(t, \mu). \quad (2.16)$$

Тогда

$$\frac{dw}{dt} = (\mu (\Lambda_0(t) - \lambda_j(t) E) + (\Lambda_1(t) - \lambda_j^{(1)}(t) E) + \mu^{-1} P(t, \mu)) w(t). \quad (2.17)$$

Пусть  $e_j$  есть  $2n$ -вектор с компонентами  $\delta_{kj}$ . Рассмотрим интегральное уравнение

$$w(t) = e_j + \mu^{-1}(K_j w)(t), \quad (2.18)$$

где  $K_j$  — интегральный оператор:

$$K_j w = \int_{\gamma_j(t)} K_j(t, t', \mu) w(t') dt',$$

$$K_j(t, t', \mu) = U^0(t', t) u_j^0(t, t') P(t', \mu). \quad (2.19)$$

В частности

$$(K_j w)_l = \int_{\gamma_{lj}} \exp(\mu \xi_{lj}(t', t)) (P(t', \mu) w(t'))_l dt'. \quad (2.20)$$

Здесь  $\gamma_{lj}(t)$  — кусочно гладкая кривая в комплексной плоскости  $t$ , соединяющая точки  $t_{lj}$ ,  $t \in G_b$ , а  $\gamma_j(t)$  есть вектор — путь с  $2n$  компонентами  $\gamma_{lj}(t)$ . Как показано в [6], § 3, решение уравнения (2.18) является решением уравнения (2.17).

2. Выбор путей  $\gamma_{lj}(t)$ . Пусть  $\Delta = \Delta(a, b, \delta)$  — замкнутый треугольник с вершинами в точках  $a + ib$ ,  $a \pm \delta$ , где  $a \in R$ ,  $b, \delta > 0$ . При  $t \in \Delta$  положим

$$\gamma_{lj}(t) = [a - \delta, \operatorname{Re} t] + [\operatorname{Re} t, t], \quad (2.21)$$

$$\gamma_{lj}(t) = [a + ib, t], \quad (2.21')$$

если, соответственно

$$\operatorname{Im}(\lambda_l(t) - \lambda_j(t)) > 0, \quad t \in R, \quad (2.22)$$

$$\operatorname{Im}(\lambda_l(t) - \lambda_j(t)) \leq 0, \quad t \in R. \quad (2.22')$$

Лемма 2.2. Существуют  $b > 0$ ,  $\delta > 0$  такие, что при  $t \in \Delta(a, b, \delta)$  и при любых  $a \in R$ ,  $j, l$  выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \xi_{lj}(t', t) \leq 0, \quad t' \in \gamma_{lj}(t). \quad (2.23)$$

Доказательство. При  $l = j$  утверждение леммы очевидно. Фиксируем  $j, l$ , и положим

$$f(t) = -i(\lambda_l(t) - \lambda_j(t)), \quad g(t', t) = \int_{t'}^t i f(t'') dt'', \quad t' \in \gamma_{lj}(t).$$

Пусть выполнено условие (2.22), тогда при  $t' \in [a - \delta, \operatorname{Re} t]$  имеем  $\operatorname{Re} g(t', t) \equiv 0$ , так как  $\operatorname{Im} f(t'') = 0$  при  $t'' \in R$ . Пусть  $t' \in [\operatorname{Re} t, t]$ , тогда

$$t' = \operatorname{Re} t + i\rho', \quad t'' = \operatorname{Re} t + i\rho'',$$

$$0 \leq \rho' \leq \rho'' \leq \operatorname{Im} t;$$

$$f(t'') = f(\operatorname{Re} t) + O(\rho''),$$

так что

$$g(t', t) = - \int_{\rho'}^{\operatorname{Im} t} [f(\operatorname{Re} t) + O(\rho'')] d\rho'',$$

где  $E(\rho'')$  — равномерно по  $\operatorname{Re} t$ , в силу периодичности функции  $f(t)$ . Поскольку  $\rho'' = O(b)$ ,  $\inf_{t \in R} (f(t)) > 0$ , то при  $b > 0$  достаточно малом имеем

$$\operatorname{Re}[f(\operatorname{Re} t) + O(\rho'')] \gg \frac{1}{2} \operatorname{Re} f(\operatorname{Re} t),$$

$$\operatorname{Re} g(t', t) < -\frac{1}{2}(\operatorname{Im} t - \rho') \operatorname{Re} f(\operatorname{Re} t) \leq 0.$$

Тем самым (2.23) доказано

Пусть выполнено условие (2.22'). Тогда

$$t = a + ib - i\rho e^{i\varphi}, \quad |\operatorname{tg} \varphi| < \frac{\delta}{b}; \quad t' = a + ib - i\rho' e^{i\varphi},$$

$$t'' = a + ib - i\rho'' e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \rho' \leq \rho'' \leq \rho.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g(t', t) &= \int_{\rho'}^{\rho} [\operatorname{Re} f(a + ib - i\rho'' e^{i\varphi}) \cos \varphi - \\ &\quad - \operatorname{Im} f(a + ib - i\rho'' e^{i\varphi}) \sin \varphi] d\rho''. \end{aligned}$$

Так как  $\varphi = O\left(\frac{\delta}{b}\right)$ ,  $\rho'' = O(b)$ ,  $\operatorname{Im} f(a) = 0$ , то подынтегральная функция имеет вид

$$f(a) + O\left(b + \frac{\delta}{b}\right).$$

По условию,  $f(a) \leq -f_0 < 0$  при всех  $a \in R$ , так что, если величины  $b, \frac{\delta}{b}$  достаточно малы, то

$$\operatorname{Re} g(t', t) \leq \frac{1}{2} \int_{\rho'}^{\rho} f(a) d\rho'' \leq 0.$$

Тем самым (2.23) доказано.

3. Асимптотика специальной ф. с. р. системы (2.11). Всюду в дальнейшем  $b, \delta > 0$  фиксированы и выбраны так, чтобы выполнялись утверждения леммы 2.2. Положим для краткости  $\Delta(a, b, \delta) = \Delta(a)$ .

Лемма 2.3. Существует  $\mu_0 > 0$  такое, что при любом  $a \in R$  система (2.5) имеет фундаментальную матрицу вида

$$Y(t, \mu) = T_0(t) (E + \mu^{-1} T_1(t)) Z(t, \mu), \quad ((2.24)$$

где  $Z(t, \mu)$  есть ф. м. системы (2.11) вида

$$Z(t, \mu) = (E + \mu^{-1} V(t, \mu)) \exp \left( \int_0^t (\mu \Lambda_0(t') + \Lambda_1(t')) dt' \right), \quad (2.25)$$

где  $t \in \Delta(a)$ ,  $\mu \geq \mu_0$  и

$$\|V(t, \mu, a)\| \leq c. \quad (2.26)$$

Матрица  $V(t, \mu, a)$  разлагается в асимптотический ряд

$$V(t, \mu, a) \sim \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t, a) \mu^{-k} \quad (\mu \rightarrow +\infty). \quad (2.27)$$

равномерно по  $t \in \Delta(a)$ . Здесь  $E$  — единичная матрица порядка  $2n$ .

Доказательство. В силу леммы (2.2) ядро интегрального оператора  $K_j$  (см. (2.18) — (2.20)) имеет порядок  $O(1)$  при  $t \in \Delta(a)$ . Отсюда с помощью метода последовательных приближений получаем, что существует ф. с. р. системы (2.11)  $Z(t, \mu, a)$ , удовлетворяющая условиям (2.25) и (2.26) (см., например, [4]). После этого стандартным методом ([7], гл. VII) получаем разложение (2.27). В силу подстановки (2.10) матрица (2.24) есть ф. с. р. системы (2.5).

Замечание. Разложение (2.25), (2.27) можно любое число раз дифференцировать по  $t$  и по  $\mu$  с сохранением равномерности разложения по  $t \in \Delta(a)$ . Матрицы  $V_k(t, a)$  голоморфны по  $t$  при  $t \in \Delta(a)$ .

Матрицы  $Z(t, \mu, a)$ ,  $Z(t, \mu, a')$  связаны соотношением

$$\hat{Z}(t, \mu, a) = Z(t, \mu, a') \Omega(\mu, a, a'). \quad (2.28)$$

Матрицу  $\Omega$  мы назовем матрицей перехода (от ф. м.  $Z(t, \mu, a)$  к ф. м.  $Z(t, \mu, a')$ ).

Лемма 2.4. Пусть  $a, a' \in R$  таковы, что  $\Delta(a) \cap \Delta(a')$  содержит треугольник. Тогда

$$\Omega(\mu, a, a') = \Lambda(\mu) + M^0(\mu) + M_0(\mu), \quad (2.29)$$

где  $\Lambda(\mu)$  — диагональная матрица,  $M^0(\mu)$  и  $M_0(\mu)$  — верхняя треугольная и нижняя треугольная матрицы, соответственно, с нулевыми диагональными элементами. При  $\mu \rightarrow +\infty$  имеют место оценки

$$M_0(\mu) = O(\mu^{-1}); \quad M^0(\mu) = O(e^{-\mu^d}), \quad d > 0 \quad (2.30)$$

и разложение

$$\Lambda(\mu) \sim E + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^{(k)} \mu^{-k}, \quad (2.31)$$

где  $\Lambda^{(k)}$  — постоянные диагональные матрицы.

Заметим, что матрицы  $\Lambda$ ,  $M^0$ ,  $M_0$  и число  $d$  зависят от  $a, a'$ .

Доказательство. Имеем из (2.25), (2.28) при  $t \in \Delta = \Delta(a) \cap \Delta(a')$

$$\Omega(\mu, a, a') = Z^{-1}(t, \mu, a') \cdot Z(t, \mu, a) = E + \mu^{-1} U^{-1}(t, \mu) W(t, \mu) U(t, \mu), \quad (2.32)$$

где обозначено

$$U(t, \mu) = \exp \left( \mu \int_0^t \Lambda_0(t') dt' + \int_0^t \Lambda_1(t') dt' \right), \quad (2.33)$$

$$E + \mu^{-1} W(t, \mu) = (E + \mu^{-1} V(t, \mu, a'))^{-1} \times (E + \mu^{-1} V(t, \mu, a)). \quad (2.33)$$

Следовательно, элементы  $\omega_{jk}(\mu)$  матрицы  $\mathcal{Q}(\mu, \alpha, \alpha')$  имеют вид

$$\omega_{jk}(\mu) = \delta_{jk} + \mu^{-1} W_{jk}(t, \mu) \times \exp(\mu \xi_{kj}(0, t) + \xi_{kj}^{(1)}(0, t)). \quad (2.34)$$

Но  $\omega_{jk}(\mu)$  не зависят от  $t$ , поэтому в (2.34)  $t \in \Delta$  можно брать любым. Взяв  $t \in R$  и заметив, что  $|\exp(\mu \xi_{kj}(0, t))| = 1$  при  $t \in R$ , мы получим, что  $\omega_{jk}(\mu) = \delta_{jk} + O(\mu^{-1})$  при любых  $j, k$ . При  $j = k$  имеем

$$\omega_{jj}(\mu) = 1 + \mu^{-1} W_{jj}(t, \mu),$$

и из леммы (2.2) и (2.33) следует (2.31).

Пусть  $t_0 \in \Delta$ ,  $\text{Im } t_0 > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Re } \xi_{kj}(0, t_0) &= \text{Re } \xi_{kj}(0, \text{Re } t_0) + \text{Re } \xi_{kj}(\text{Re } t_0, t_0) = \\ &= \int_0^{\text{Im } t_0} \text{Im} [\lambda_j(\text{Re } t_0 + it') - \lambda_k(\text{Re } t_0 + it')] dt'. \end{aligned}$$

В силу (2.1), (2.2) имеем  $\text{Im}(\lambda_k(t) - \lambda_j(t)) < 0$  при  $1 \leq j \leq k \leq \leq 2n$ ,  $t \in R$ , так что

$$\text{Re } \xi_{kj}(0, t_0) < 0, \quad 1 \leq j \leq k \leq 2n. \quad (2.35)$$

Напомним, что  $\text{Re } \xi_{kj}(\text{Re } t_0) \leq 0$  при  $t_0 \in \Delta(\alpha)$ ,  $t_0 \in \Delta(\alpha')$  при  $j, k$ , указанных в (2.35). Полагая  $t = t_0$  в (2.34), получаем из (2.35), что

$$\omega_{jk}(\mu) = O(e^{-\mu d}) \quad (d > 0) \quad 1 \leq j < k \leq 2n.$$

Лемма доказана.

Будем называть матрицу  $\mathcal{Q}(\mu)$  квазитреугольной, если ее элементы, лежащие ниже главной диагонали, имеют порядок  $O(\exp(-d\mu))$ ,  $d > 0$  при  $\mu \rightarrow +\infty$ , а остальные элементы имеют порядок  $O(1)$ .

Следствие 2.4. Любая ф. м.  $Z^{(m)}(t, \alpha_m, \mu)$  системы (2.11), построенная в  $\Delta(\alpha_m)$ , связана с ф. м.  $Z^{(1)}(t, \alpha_1, \mu)$  той же системы, построенной в  $\Delta(\alpha_1)$ , по формуле

$$Z^{(m)}(t, \alpha_m, \mu) = Z^{(1)}(t, \alpha_1, \mu) \mathcal{Q}(\mu), \quad (2.36)$$

где  $\mathcal{Q}(\mu)$  — квазитреугольная матрица.

Доказательство. Построим конечную последовательность открытых треугольников  $\Delta_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ ;  $\Delta(a_j, b, \delta) = \Delta_j$ , основания которых покрывают отрезок  $[a_1, a_m]$ , причем  $a_j < a_{j+1}$ . Пусть  $Z^{(j)}(t, \mu)$  — ф. м., построенная в лемме 2.3. Тогда, в силу леммы 2.4

$$Z^{(j+1)}(t, \mu) = Z^{(j)}(t, \mu) \mathcal{Q}_j(\mu) \quad (1 \leq j \leq m), \quad (2.37)$$

где  $\mathcal{Q}_j(\mu)$  — квазитреугольная матрица. Из (2.37) имеем

$$Z^{(m)}(t, \mu) = Z^{(1)}(t, \mu) \mathcal{Q}_1(\mu) \cdots \mathcal{Q}_m(\mu). \quad (2.38)$$

Заметим, что произведение квадратных квазитреугольных матриц тоже квазитреугольная матрица. Следовательно, из (2.38) приходим к (2.36).

### § 3. Асимптотика мультипликаторов системы (1.1)

1. Пусть  $Z(t, \mu)$  — некоторая ф. м. системы (2.11), построенная в лемме 2.3. Согласно теореме Ляпунова—Флоке [7] имеем

$$Z(t+T, \mu) = Z(t, \mu) C(\mu). \quad (3.1)$$

Мультипликаторы (2.11) являются корнями алгебраического уравнения

$$\det(C(\mu) - \rho E) = 0. \quad (3.2)$$

В этом пункте мы определим асимптотики матричных элементов  $c_{kj}(\mu)$  матрицы  $C(\mu)$  при  $\mu \rightarrow +\infty$ .

**Лемма 3.1.** Пусть  $Z(t, \mu)$ , ф. м. системы (2.11), построенная в лемме 2.3, которая имеет вид (2.25). Пусть матрица  $C(\mu)$  есть неособая матрица, связанная с матрицей  $Z(t, \mu)$  соотношением (3.1).

Тогда при  $\mu \rightarrow +\infty$  матрица  $C(\mu)$  квазитреугольная и для элементов матрицы  $C(\mu)$  справедливы асимптотические формулы

$$c_{jj}(\mu) = \exp(i\mu\varphi_j + \delta_j) \left[ 1 + \sum_{r=1}^m d_{rj} \mu^{-r} + O(\mu^{-m-1}) \right], \quad (3.3)$$

$$c_{ki}(\mu) = O(\mu^{-1}) \quad (k < j), \quad (3.4)$$

$$c_{kj}(\mu) = O(\exp(-\mu d)) \quad (k > j, d > 0), \quad (3.5)$$

где обозначено

$$\varphi_r = \int_0^T \sqrt{q_{n-r+1}(t)} dt; \quad \varphi_{n+r} = \int_0^T \sqrt{q_r(t)} dt, \quad (3.6)$$

$$\delta_j = \int_0^T \lambda_j^{(1)}(t) dt \quad (1 \leq j \leq 2n). \quad (3.7)$$

Величины  $d_{rj}$  не зависят от  $\mu$  и определяются по формуле

$$d_{rj} = (W_r(0))_{jj} \quad (1 \leq j \leq 2n, \quad 1 \leq r \leq m). \quad (3.8)$$

Матрицы  $W_r(t)$  определяются по формуле (3.10).

**Доказательство.** Из (3.1) и (2.25) имеем при любом  $t \in G_b$ ,  $\mu > \mu_0(b)$

$$C(\mu) = U^{-1}(t, \mu) [E + W(t, \mu)] U(t+T, \mu), \quad (3.9)$$

где  $U(t, \mu)$  определяется по формуле (2.33).

$$W(t, \mu) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} W_k(t) \quad (\mu \rightarrow +\infty). \quad (3.10)$$

Далее,  $C(\mu)$  не зависит от  $t$ , выбирая  $t$  в комплексной плоскости точно так же, как и в доказательстве леммы 2.4, получаем (3.4), (3.5).

Выписав диагональные элементы (3.9) при  $t=0$  получим (3.3), где  $d_{rj}$  определяются по формуле (3.8). Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** Если (2.11) получена с помощью подстановки (2.10) из системы (2.5), то эти системы имеют одинаковые мультипликаторы.

Доказательство этой леммы следует из подстановки (2.10) и из того, что при подобных преобразованиях матриц собственные значения не меняются.

Известно также, что если система (2.5) получена из системы (1.1) с помощью подстановки (2.4), то эти системы имеют одинаковые мультипликаторы [3].

Таким образом мультипликаторы системы (1.1) являются корнями уравнения (3.2), где матрица  $C(\mu)$  связана с фундаментальной матрицей  $Z(t, \mu)$  системы (2.11) соотношением (3.1), т. е.

$$C(\mu) = Z^{-1}(0, \mu) Z(T, \mu). \quad (3.11)$$

## 2. Асимптотика мультипликаторов системы (2.11).

Лемма 3.3. Уравнение (3.2) при  $\mu \rightarrow +\infty$  имеет вид

$$\Delta(\rho, \mu) = \Delta_0(\rho, \mu) + \varepsilon(\rho, \mu) = 0. \quad (3.12)$$

Здесь

$$\Delta_0(\rho, \mu) = \prod_{j=1}^{2n} (\rho - c_{jj}(\mu)), \quad (3.13)$$

$c_{jj}(\mu)$ ,  $1 \leq j \leq 2n$  определяются из (3.3) — (3.5).

$$|\varepsilon(\rho, \mu)| \leq c_0 \exp(-\mu d), \quad \mu > \mu_0 > 0; \quad d > 0, \quad (3.14)$$

$0 \leq c_0 < +\infty$  — не зависящее от  $\mu$  число.

Доказательство. Уравнение (3.2) относительно  $\rho$  есть алгебраическое уравнение  $2n$ -ой степени, коэффициенты которого при  $\mu > \mu_0$  суть ограниченные по модулю функции и коэффициент при старшем члене  $\rho^{2n}$  есть 1. Следовательно, при любом  $\mu > \mu_0$  все корни уравнения (3.2) расположены на комплексной  $\rho$  плоскости внутри некоторого круга  $\gamma_0; |\rho| < \rho_0 < \infty$ , и

$$\rho(\mu) = O(1), \quad \mu \rightarrow +\infty. \quad (3.15)$$

Раскрыв определитель в левой части уравнения (3.2), получаем ввиду (3.3) — (3.5), что кроме члена, состоящего из произведений элементов главной диагонали (который мы обозначим через  $\Delta_0$ ), в остальных членах обязательно содержится экспоненциально малый множитель (сумма которых обозначена  $\varepsilon$ ). В силу (3.15) справедлива оценка (3.12). Лемма доказана.

Далее, оценим модуль многочлена  $\Delta_0(\rho, \mu)$  снизу. Воспользовавшись теоремой А. Картана [7] об оценке модуля многочлена снизу, получаем при  $\mu > \mu_0$  оценку

$$|\Delta_0(\rho, \mu)| \geq 2c_0 \exp(-\mu d), \quad d > 0, \quad c_0 > 0. \quad (3.16)$$

Эта оценка будет справедлива тогда, когда сумма радиусов картановых кружочков выбрана так:

$$\sum_{j=1}^{2n} r_j = 2H = (2c_0)^{1/2n} \cdot \exp\left(-\frac{\mu d}{2n} + 1\right). \quad (3.17)$$

При тех же  $\rho$  и  $\mu$ , при которых выполняется неравенство (3.16), имеем

$$|\Delta(\rho, \mu)| > c_0 \exp(-\mu d). \quad (3.18)$$

Как следует из (3.17), радиус  $r_j$  каждого картанова кружка удовлетворяет неравенству

$$r_j < 2H \quad (1 \leq j \leq 2n). \quad (3.19)$$

Неравенства (3.14), (3.16) и (3.18) показывают, что многочлены  $\Delta(\rho, \mu)$  и  $\Delta_0(\rho, \mu)$  имеют корни только внутри картановых кружочков  $\gamma_j$ ,  $j=1, 2, \dots, 2n$ .

При данном  $\mu > \mu_0$  картановы кружки могут распадаться на две группы:

а) изолированные кружки — любой кружочек из этой группы не имеет пересечения с остальными, и

б) остальные кружки — неизолрированные.

Ниже выясним, при каких  $\mu$  ( $\mu > \mu_0$ ) группа б) отсутствует.

**Лемма 3.4.** Если  $\mu > \mu_0$  таково, что при всех  $1 \leq j, k \leq 2n$ ,  $k \neq j$  выполнено условие

$$|c_{jj}(\mu) - c_{kk}(\mu)| > 4H. \quad (3.20)$$

где  $H$  определяется по формуле (3.17), то все картановы кружки изолированы, т. е. при условии (3.20) группа б) отсутствует.

Доказательство этой леммы непосредственно следует из теоремы А. Картана и из (3.20).

**Следствие 3.5.** Картановы кружки второй группы могут возникнуть только при тех  $\mu$  ( $\mu > \mu_0$ ), при которых выполняется неравенство

$$|c_{jj}(\mu) - c_{kk}(\mu)| \leq 4H, \quad (j \neq k; \quad 1 \leq j, k \leq 2n). \quad (3.21)$$

Обозначим через  $\mu_{jkr} = \mu_{*r}^{(r)}$ ,  $r=1, 2, \dots$  корни уравнения

$$c_{jj}(\mu) - c_{kk}(\mu) = 0 \quad (k \neq j). \quad (3.22)$$

Совокупность этих корней образует счетное множество точек на интервале  $(\mu_0, +\infty)$ . Занумеруем последовательность этих точек в порядке возрастания  $\{\mu_{*r}^{(r)}\}_1^\infty$ . Имеет место следующая

**Лемма 3.6.** Если  $\mu_* = \mu_{*r}^{(r)}$  ( $r=1, 2, \dots$ ),  $\mu_* > \mu_0$  — корень уравнения (3.22), то для любого  $\mu$ , не принадлежащего интервалам

$$|\mu_* - \mu| \leq d_0 \exp\left(-\frac{\mu_* d}{2n}\right) \cdot |1 + O(\mu_*^{-1})|, \quad (3.23)$$

где

$$d_0 = \frac{(2c_0)^{1/2n} e}{||\varphi_j| - \varphi_k||} > 0 \quad (j \neq k), \quad (3.24)$$

все картановы кружки изолированы.

**Доказательство.** Рассмотрим неравенство (3.21) в окрестности точки  $\mu_*$ , указанной в лемме. Полагая в (3.21)  $\mu = \mu_* + \Delta\mu$ , получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \Delta \mu \right| \exp \left( \Delta \mu \frac{d}{2n} \right) \left| \exp \left( i \left( \mu_* + \frac{\Delta \mu}{2} \right) \varphi_j + \delta_j \right) \cdot \left( i \varphi_j + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i \varphi_j \mu_* - \exp \left( -\frac{i \Delta \mu}{2} \varphi_j \right)}{\mu_* (\mu_* + \Delta \mu)} + \dots \right) - \exp \left( i \left( \mu_* + \frac{\Delta \mu}{2} \varphi_k + \delta_k \right) \cdot \left( i \varphi_k + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{i \varphi_k \mu_* - \exp \left( \frac{i \Delta \mu}{2} \varphi_k \right)}{\mu_* (\mu_* + \Delta \mu)} + \dots \right) \right) \right| \leq e (c_0)^{1/2n} \exp \left( -\frac{\mu_* d}{2n} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \Delta \mu \right| \exp \left( \Delta \mu \frac{d}{2n} \right) (|\varphi_j| - |\varphi_k|) \leq e c_0^{1/2n} \exp \left( -\mu_* \frac{d}{2n} \right) |1 + O(\mu_*^{-1})|,$$

отсюда следует оценка

$$|\Delta \mu| |1 + O(\Delta \mu)| \leq d_0 \exp \left( -\mu_* \frac{d}{2n} \right) |1 + O(\mu_*^{-1})|,$$

где  $d_0$  определяется по формуле (3.24). Лемма доказана.

Из леммы 3.6 получаем, что при достаточно большом  $\mu_0 > 0$  и  $\mu > \mu_0$  бесконечный интервал  $(\mu_0, +\infty)$  разбивается на интервалы двух типов: 1) замкнутые интервалы типа (3.23) и 2) открытые интервалы. Совокупность всех открытых интервалов типа 2) обозначим  $L$ .

Пусть интервал  $(a, b) \subset L$ . Если  $\mu \in (a, b)$ , то при этом  $\mu$  все картановы кружки  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2n$ ) изолированы, и в силу неравенства (3.16) и (3.18) внутри каждого  $\gamma_j$  многочлены  $\Delta(\rho, \mu)$  и  $\Delta_0(\rho, \mu)$  имеют по одному нулю и выполняется неравенство

$$|\rho_j(\mu) - c_{jj}(\mu)| \leq b_0 \exp \left( -\mu \frac{d}{2n} \right), \quad (1 \leq j \leq 2n). \quad (3.25)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

**Теорема 3.7.** Пусть условия I и II из введения выполнены. Тогда при достаточно большом  $\mu_0$  и при всех  $\mu > \mu_0$ ,  $\mu \in L$  справедливо неравенство

$$|\rho_j(\mu) - c_{jj}(\mu)| \leq b_0 \exp \left( -\frac{\mu d}{2n} \right), \quad (1 \leq j \leq 2n). \quad (3.25)$$

Здесь  $b_0, \frac{d}{2n}$  — зависящие от  $\mu$  положительные константы;

$\rho_j(\mu)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n$  — мультипликаторы системы (1.1).

Для элементов  $c_{jj}(\mu)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n$  справедливо асимптотическое разложение (3.3).

**Следствие 3.8.** Из теоремы 3.7 следует, что при  $\mu \in L$  и при  $\mu \rightarrow +\infty$  для различных мультипликаторов системы (1.1) справедлива асимптотическая формула

$$\rho_j(\mu) = c_{jj}(\mu) + O(\exp(-\mu d)), \quad (d > 0, \mu \rightarrow +\infty), \quad (3.26)$$

или, ввиду (3.3), асимптотическое разложение

$$\rho_j(\mu) = \exp(i\mu\varphi_j + \delta_j)(1 + \sum_{r=1}^m d_{rj}\mu^{-r} + O(\mu^{-m-1})), \quad (3.27)$$

где постоянные числа  $\varphi_j$ ,  $\delta_j$  и  $d_{rj}$  определяются по формулам (3.6) — (3.8).

#### § 4. Асимптотика зоны неустойчивости системы (1.1)

Известно [9], что для скалярного уравнения Хилла (1.1), при выполнении условий I, II, зоны неустойчивости экспоненциально малы при  $\mu \rightarrow +\infty$ . Ниже мы установим, что при некоторых условиях (см. теорему 4.1) аналогичная ситуация имеет место и для системы Хилла (1.1).

**Теорема 4.1.** Пусть условия I, II из введения выполнены. Кроме того, пусть

III: матрица  $Q(t)$ , при  $t \in \mathbb{R}$  — вещественная симметрическая матрица (или эрмитова).

Тогда зоны неустойчивости системы (1.1) экспоненциально малы при  $\mu \rightarrow +\infty$ .

**Доказательство.** При наличии условий I и II система (1.2) имеет  $\frac{n(n+1)}{2}$  серий [4] зон неустойчивости. Ширина этих зон имеет порядок  $O(\mu^{-h})$ ,  $\mu \rightarrow +\infty$ ,  $h > 0$ , если  $Q(t) \in C^h[0, T]$ . Известно также, что если некоторое значение параметра  $\mu$  определяет границу зоны неустойчивости, то при этом значении параметра  $\mu$  среди мультипликаторов системы (1.1) возникает кратность. Если одновременно выполняются условия I, II и III, то согласно лемме 3.6 и теореме 3.7 имеем, что мультипликаторы системы (1.1) различны только при  $\mu \in L$ , т. е. кратность мультипликаторов может возникнуть только тогда, когда  $\mu$  принимает значение внутри экспоненциально малых отрезков (3.23). Тем самым теорема доказана.

Ленинградский филиал ЕРПИ им. К. Маркса,  
Московский физико-технический институт

Поступила 24.I.1975

Ս. Գ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Մ. Վ. ՖԵԴՈՐՅՈՒԿ. Խիլի սխտեմի մոլտիպլիկատորների և անկայունության զոնաների ասիմպտոտիկան (ամփոփում)

Քննարկվում է հոլոմորֆ դորժակիցներով Խիլի սխտեմը: Պոտենցիալ մատրիցայի վրա դրված որոշ պայմանների դեպքում (տես աշխատանքի II և III պայմանները) ստացվել են սխտեմի մոլտիպլիկատորների վերլուծություններն ասիմպտոտիկ շարքերի և ապացուցված է, որ անկայունության զոնաները էքսպոնենցիալ կարգի փոքր մեծություններ են, երբ սխտեմի պարամետրը ձգտում է անվերջության:

S. G. SIMONIAN, M. V. FEDORYUK. *The asymptotics of multipliers and non-stability zones of Hill's system (summary)*

Hill's system with holomorphic coefficients is analysed. Under some conditions on the potential matrix the expansions of multipliers in asymptotic series are obtained. It is also proved that non-stability zones are exponentially small when the parameter of the system tends to the infinity.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Биркюф Г. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. Trans. Amer. Math. Soc., 9, 1908, 219—231.
2. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917, 3—97.
3. Крейн М. Г. Сборник „Памяти А. А. Андропова, о нем“. Основные положения теории  $\lambda$ -зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Изд. АН СССР, 1955, 413—498.
4. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд. АН УССР, Киев, 1954, 9—57, 251—266.
5. Далецкий Ю. А., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Изд. „Наука“, 1970, 273—274.
6. Федорюк М. В. Асимптотическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Матем. сборник, 173 (121), № 4 (3), 1959, 477—516.
7. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. иностранной литературы, М., 1958, 152—187, 189—201.
8. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956. Гл. I.
9. Симонян С. Г. Асимптотика ширины лакуны в спектре оператора Штурма-Лиувилля с периодическим аналитическим потенциалом. Дифференц. уравнения, XVI, № 7, 1970, 1264—1272.
10. Симонян С. Г. Асимптотика мультипликаторов системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, ДАН Арм.ССР, LI, № 4, 1970, 203—206.
11. Симонян С. Г. Автореф. канд. дисс., ЕГУ, 1971.