

Յ. Ա. ԿԱԶԱՐՅԱՆ

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть Ω — ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве E_n , $x = (x_1, \dots, x_n)$ точки Ω , S — граница Ω . Рассмотрим следующую задачу:

$$a_{ij}(x, u) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$b_i(x, u) u_{x_i} = \varphi(x, u), \quad x \in S \quad (2)$$

в предположении, что $b_i(x, u) \cos(\bar{n}, x_i) \geq \bar{\epsilon} > 0$, где $\bar{n}$ — внешняя нормаль к границе Ω . Здесь и всюду по парам одинаковых индексов подразумевается суммирование в пределах от 1 до n .

В работе [2] получена условная теорема существования классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений краевых эллиптических задач в предположении, что имеются априорные оценки максимумов модулей и модуля непрерывности первых производных решений. В гл. X [1] исследована классическая разрешимость краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений с дивергентной главной частью

$$\frac{d}{dx_i} (a_i(x, u, u_x)) + a(x, u, u_x) = f(x)$$

при граничном условии

$$a_i(x, u, u_x) \cos(\bar{n}, x_i) = \varphi(x, u).$$

В настоящей работе в предположении, что известна оценка $\max_{\bar{\Omega}} |u(x)|$, получены оценки $\langle u \rangle_{\bar{\Omega}}^{(2)}$, $\max_{\bar{\Omega}} |\nabla u|$, $\langle u_{x_i} \rangle_{\bar{\Omega}}^{(2)}$, необходимые для исследования классической разрешимости задачи (1)–(2). Заметим, что достаточные условия ограниченности максимума модуля решений задачи дается теоремой (2.2) главы X [1].

Пусть $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, $\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq M$, функции $a_{ij}(x, u)$, $a(x, u, p)$ при $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leq M$ и произвольных p дифференцируемы по своим аргументам и удовлетворяют следующим естественным ограничениям (см. [1]):

$$a_{ij}(x, u) \xi_i \xi_j \geq \nu(M) \xi^2, \quad \nu(M) > 0, \quad (3)$$

$$\left(|a_{ij}(x, u)| + \left| \frac{\partial a_{ij}(x, u)}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial a_{ij}(x, u)}{\partial x_k} \right| + \left| \frac{\partial a(x, u, p)}{\partial p_i} \right| \right) (1 + |p|) + \\ + |a(x, u, p)| + \left| \frac{\partial a(x, u, p)}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial a(x, u, p)}{\partial x_i} \right| \leq \mu(M) (1 + |p|)^2. \quad (4)$$

Здесь и далее через $\nu(t)$, $\mu(t)$ будем обозначать различные постоянные, обладающие следующими свойствами:

$\nu(t)$ — положительная невозрастающая непрерывная функция, определенная при $t > 1$,

$\mu(t)$ — положительная неубывающая непрерывная функция, определенная при $t \geq 0$.

Кроме того, считаем, что

$$S \in O^2, \quad \varphi(x, u) \in O^2\{x, u; x \in \overline{\Omega}, |u| \leq M\},$$

$$b_i(x, u) \in O^2\{x, u; x \in \overline{\Omega}, |u| \leq M\}, \quad f(x) \in L_\infty(\Omega)^*.$$

Рассмотрим область Ω_1 , примыкающую к некоторому участку S_1 границы Ω . Без ограничения общности можем считать, что система координат $\{x_i\}_{i=1}^n$ такова, что направление внешней нормали к S_1 задается уравнением $x_n = 0$. Из (1) и (2) следует, что при любой функции $\eta(x) \in W_2^1(\Omega)$, равной нулю вне Ω_1 , $u(x)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega} \left[a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u_{x_j} \eta - (a - f) \eta \right] dx + \int_{S_1} a_{nj} u_{x_j} \eta ds = 0. \quad (5)$$

Учитывая условие (2) и преобразовывая граничный² интеграл в (5) в объемный, получим следующее интегральное тождество:

$$\int_{\Omega} [a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + A \eta + (A_* u_{x_n} + \bar{\varphi}) \eta_{x_n} - A_* u_{x_n} \eta_{x_n}] dx = 0 \quad (6)$$

где

$$A_*(x, u) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{ni} - a_{nn} \frac{b_i}{b_n} \right), \quad \bar{\varphi} = a_{nn} \frac{\varphi}{b_n},$$

$$A(x, u, u_x) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u_{x_j} - a + f + \frac{dA_*}{dx_n} u_{x_n} - \frac{dA_*}{dx_n} u_{x_n} + \frac{d\bar{\varphi}}{dx_n}.$$

Из наших предположений следует, что

$$|A(x, u, p)| \leq \mu(M) (1 + |p|)^2. \quad (7)$$

Положим в (6) $\eta = \zeta^2 \max\{u - k, 0\}$, где k — любое число, а $\zeta(x) —$

* Обозначения см. в [1].

срезающая функция для шара K , радиуса ρ с центром на S_1 , не пересекающего $S \setminus S_1$. Тогда из (6) получим

$$\int_{A_{k, \rho}} [a_{ij} u_{x_j} u_{x_i} \zeta^2 + a_{ij} u_{x_j} (u - k) 2\zeta'_{x_i} + A (u - k) \zeta^2 + \tilde{\varphi} u_{x_n} \zeta^2 + \\ + (A_0 u_{x_n} + \tilde{\varphi}) (u - k) 2\zeta'_{x_n} - A_0 u_{x_n} (u - k) 2\zeta'_{x_n}] dx = 0, \quad (8)$$

где

$$A_{k, \rho} = \{x \in \Omega_\rho; u(x) > k\}, \quad \Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega.$$

Первый член в (8) оставим слева, а остальные перенесем вправо и оценим, пользуясь условиями (3), (4) и (7). В правой части к членам, содержащим производные от функции $\zeta(x)$ применим неравенство Коши с $\varepsilon > 0$ (см. гл. II [1]). Тогда из (8) получим следующее неравенство:

$$\int_{A_{k, \rho}} |\nabla u|^2 \zeta^2 dx \leq \gamma \left[\int_{A_{k, \rho}} (u - k)^2 |\zeta'|^2 dx + \text{mes } A_{k, \rho} \right], \quad (9)$$

где γ зависит от μ , ν , M . Подставляя в (6) $\eta = \zeta^2 \max \{-u - k, 0\}$ и производя аналогичные оценки, приходим к неравенству (9) для функции $-u(x)$. Из (9) на основании теоремы 7.2 гл. II [1] следует оценка $|u|^{(2)}$ вблизи S_1 .

Перейдем к оценкам первых производных $u(x)$. Для этого преобразуем тождество (6) с $\eta = \xi_{x_r}$, $r \neq n$, где ξ — произвольная достаточно гладкая функция в $\bar{\Omega}$, равная нулю вне Ω_1 . В результате будем иметь

$$\int_{\Omega} \left[\left(a_{ij} u_{x_j} x_j + \frac{da_{ij}}{dx_r} u_{x_j} \right) \xi_{x_i} + A \xi_{x_r} - \frac{d(A_0 u_{x_n} + \tilde{\varphi})}{dx_r} \xi_{x_n} + \right. \\ \left. + \frac{d(A_0 u_{x_n})}{dx_r} \xi_{x_n} \right] dx = 0$$

или, что то же самое

$$\int_{\Omega} [a_{ij} u_{x_j} x_j \xi_{x_i} + B_i \xi_{x_i} + (A_0 u_{x_n} \xi_{x_n} - A_0 u_{x_n} x_r \xi_{x_n})] dx = 0, \quad (10)$$

где

$$B_i(x, u, u_x) = \frac{da_{ij}}{dx_r} u_{x_j} + \partial_i A - \partial_i \left(\frac{dA_0}{dx_r} u_{x_n} + \frac{d\tilde{\varphi}}{dx_r} \right) + \partial_i \frac{dA_0}{dx_r} u_{x_n}.$$

Из наших предположений следует, что

$$\left. \begin{aligned} B_i &= u_{x_r} \tilde{B}_i | \tilde{B}_i | \leq \mu(M)(1 + |p|), \quad i \neq r \\ B_r &= B'_r + B''_r | B_r | \leq \mu(M)(1 + |p|)^2 \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

где

$$B'_r = \frac{da_{ij}}{dx_r} u_{x_j} + f + \frac{dA_s}{dx_n} u_{x_s} - \frac{dA_s}{dx_s} u_{x_n},$$

$$B''_r = -a + \frac{d\bar{\varphi}}{dx_n}.$$

Предположим пока, что известна оценка $\max_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leq M_1$ и оценим гельдеровские нормы для первых производных. Подставим в (10)

$$\xi = \zeta^2 \max \{u_{x_r} - k, 0\}$$

и пусть

$$A_{k,p} = \{x \in \Omega_p; u_{x_r} > k\}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_{A_{k,p}} [a_{ij} u_{x_r x_j} u_{x_r x_i} \zeta^2 + a_{ij} u_{x_r x_j} (u_{x_r} - k) 2\zeta \zeta_{x_i} + B_i u_{x_r x_i} \zeta^2 + \\ + B_i (u_{x_r} - k) 2\zeta \zeta_{x_i} + A_s u_{x_r x_n} (u_{x_r} - k) 2\zeta \zeta_{x_n} - \\ - A_s u_{x_s x_r} (u_{x_r} - k) 2\zeta \zeta_{x_n}] dx = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Первый член в (12) оставим слева, а остальные перенесем вправо. Произведем оценки с помощью условий (3), (4), (7), (11), а в членах, содержащих производные от функции $\zeta(x)$, применим неравенство Коши с $\varepsilon > 0$. Тогда из (12) получим

$$\int_{A_{k,p}} |\nabla u_{x_r}|^2 \zeta^2 dx \leq \gamma \left(\int_{A_{k,p}} (u_{x_r} - k)^2 |\nabla \zeta|^2 dx + \text{mes } A_{k,p} \right), \quad (13)$$

где γ зависит от μ , ν , M и M_1 . Если в (10) подставим $\xi = \zeta^2 \max \{-u_{x_r} - k, 0\}$, то придем к неравенству (13) для функции $-u_{x_r}$. Из (13) на основании теоремы 7.2 гл. II [1] следует, что $\langle u_{x_r} \rangle_{\Omega_1}^{(\beta)} \leq c$, $r \neq n$ с некоторым c и $\beta > 0$, зависящим от перечисленных выше постоянных. Оценка величины $\langle u_{x_n} \rangle_{\Omega_1}^{(\beta)}$ следует из уравнения (1) и неравенства (13). В самом деле, из (13) при $k = \min_{K_p \cap \Omega_r} u_{x_r}$ следует, что для шаров

$\bar{K}_\rho$, лежащих в области Ω_1 , верна оценка (выбираем $\zeta(x)$ так, чтобы $|\nabla \zeta| \leq \frac{1}{\rho}$)

$$\int_{\bar{K}_\rho \cap \Omega} |\nabla u_{x_r}|^2 dx \leq \gamma \rho^{n-2+2\beta}, \quad r \neq n. \quad (14)$$

Из уравнения (1) вытекает, что

$$u_{x_n x_n} = \sum_{r \neq n} d_{ir} u_{x_r x_i} + d \quad (15)$$

с ограниченными d_{ir} и d . Значит (14) верно и для $u_{x_n x_n}$, и в силу леммы 4.2 гл. II [1] $\langle u_{x_n} \rangle_{\Omega_1}^{(5)}$ оценивается через известные постоянные и расстояние Ω_1 до $S \setminus S_1$.

Теперь оценим $\max |\nabla u|$ в Ω . Как и в случае первой краевой задачи [1], для этого достаточно получить оценки интегралов

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u|^m dx \quad (m \text{ — достаточно большое, но конечное число}) \text{ и максимума модуля градиента } u(x) \text{ на } S_1.$$

Заметим, что из (9) при $K = \min_{\bar{K}_\rho \cap \Omega_1} u(x)$ следует неравенство

$$\int_{\bar{K}_\rho \cap \Omega_1} |\nabla u|^2 dx \leq c \rho^{n-2+2\alpha} \quad (16)$$

при $\rho \leq \bar{\rho}$, где $\bar{\rho}$ и c определяются числом M и известными постоянными. Обозначим

$$v = \sum_{k=1}^{n-1} u_{x_k}^2 + 1, \quad \omega = \sum_{k=1}^n u_{x_k}^2 + 1.$$

В тождестве (6) положим $\eta = [u(x) - u(x_0)] v^{s+1} \omega^q \zeta^2$, $s, q \geq 0$, $\zeta(x)$ — срезающая функция для шара $\bar{K}_\rho$ с центром $x_0 \in S_1$ и радиусом $\rho \leq \bar{\rho}$, меньшим расстояния x_0 до $S \setminus S_1$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\rho} \left\{ a_{ij} u_{x_j} u_{x_i} v^{s+1} \omega^q \zeta^2 + (u - u(x_0)) [a_{ij} u_{x_j} (s+1) v^s v_{x_i} \omega^q \zeta^2 + \right. \\ & \quad \left. + a_{ij} u_{x_j} v^{s+1} q \omega^{q-1} \omega_{x_i} \zeta^2 + a_{ij} u_{x_j} v^{s+1} \omega^q 2\zeta \zeta_{x_i} + A v^{s+1} \omega^q \zeta^2 + \right. \\ & \quad \left. + (A u_{x_n} + \tilde{\gamma}) (s+1) v^s v_{x_n} \omega^q \zeta^2 + v^{s+1} q \omega^{q-1} \omega_{x_n} \zeta^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ v^{s+1} \omega^q 2 \zeta_{x_n} - A_s u_{x_n} ((s+1) v^s v_{x_s} \omega^q \zeta^2 + \\ + v^{s+1} q \omega^{q-1} \omega_{x_s} \zeta^2 + v^{s+1} \omega^q 2 \zeta_{x_s}) + \tilde{\varphi} u_{x_n} v^{s+1} \omega^q \zeta^2 \} dx = 0.$$

Производя оценки с использованием (3), (4) и (7), придем к следующему неравенству:

$$\int_{\Omega_\rho} v^{s+1} \omega^{q+1} \zeta^2 dx \leq c_1 \max_{\Omega_\rho} |u - u(x_0)| \int_{\Omega_\rho} \left\{ [(s+1) v^s \omega^q |\nabla v| \zeta^2 + \right. \\ \left. + q v^{s+1} \omega^{q-1} |\nabla \omega| \zeta^2 + 2 v^{s+1} \omega^q |\nabla \zeta| |\omega|^{1/2} + v^{s+1} \omega^{q+1} \zeta^2 \right\} dx + \\ + c_1 \int_{\Omega_\rho} v^{s+1} \omega^{q+1/2} \zeta^2 dx,$$

в котором c_1 определяется постоянными $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\max_{x \in \Omega_\rho} |\tilde{\varphi}| < M$.

К членам в правой части применим неравенство Коши с $\varepsilon = 1$ и воспользуемся тем, что $\max_{\Omega_\rho} |u(x) - u(x_0)| \leq c_2 \rho^\alpha$. Выбирая $\rho < (3c_1 c_2)^{-1/\alpha}$,

получим

$$\int_{\Omega_\rho} v^{s+1} \omega^{q+1} \zeta^2 dx \leq c \rho^\alpha \int_{\Omega_\rho} [(s+1)^2 v^{s-1} \omega^q |\nabla v|^2 \zeta^2 + q^2 v^{s+1} \omega^{q-2} |\nabla \omega|^2 \zeta^2 + \\ + 2 v^{s+1} \omega^q |\nabla \zeta|^2] dx + c(s, q). \quad (17)$$

Теперь подставим в тождество (8) $\xi = u_{x_r} v^s \omega^q \zeta^2$, $r \neq n$. В результате получим

$$\int_{\Omega_\rho} [(a_{ij} u_{x_r x_j} + B_i) (u_{x_r x_i} v^s \omega^q \zeta^2 + u_{x_r} s v^{s-1} v_{x_i} \omega^q \zeta^2 + u_{x_r} v^s q \omega^{q-1} \omega_{x_i} \zeta^2 + \\ + u_{x_r} v^s \omega^q 2 \zeta_{x_i}) + q A_s v^s \omega^{q-1} \zeta^2 u_{x_n} (v_{x_n} u_{x_n x_s} - v_{x_s} u_{x_n x_n}) + \\ + A_s v^s \omega^q \zeta (v_{x_n} \zeta_{x_s} - v_{x_s} \zeta_{x_n})] dx = 0.$$

Произведем здесь суммирование по r от 1 до $n-1$. В левой части оставим два положительных члена

$$a_{ij} u_{x_r x_j} u_{x_r x_i} v^s \omega^q \zeta^2, \quad a_{ij} u_{x_r x_j} u_{x_r} s v^{s-1} v_{x_i} \omega^q \zeta^2 = \frac{s}{2} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \omega^q \zeta^2.$$

Остальные члены перенесем вправо, подставляя вместо $u_{x_n x_n}$ его зна-

чения из (15) и производя интегрирование по частям в члене $B'_r \frac{\partial}{\partial x_r}$. Левую часть оценим, исходя из (3), а правую часть оценим по модулю, замечая, что в силу условий на S , $f(x)$, $\varphi(x, u)$ и (4) верны следующие неравенства:

$$|a_{ij} u_{x_i x_j} u_{x_r}| \leq c |\nabla v|,$$

$$|B'_r| \leq c v^{1/2} \omega^{1/2},$$

$$\left| \frac{\partial a}{\partial u_{x_i}} u_{x_i x_r} + \frac{\partial a}{\partial u} u_{x_r} + \frac{\partial a}{\partial x_r} - \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dx_r dx_n} \right| \leq c \omega^{1/2} \sum_{r \neq n} |u_{x_r x}| + c v^{1/2} \omega.$$

В результате приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\rho} \left[\sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 v^{s \omega^q \zeta^2} + \frac{s}{2} v^{s-1 \omega^q} |\nabla v|^2 \zeta^2 \right] dx \leq c \int_{\Omega_\rho} \left\{ q |\nabla v| v^{s \omega^{q-1}} |\nabla \omega| \zeta^2 + \right. \\ \left. + |\nabla v| v^{s \omega^q \zeta} |\nabla \zeta| + v^{1/2 \omega^{1/2}} \left(\sum_{r \neq n} |u_{x_r x}| v^{s \omega^q \zeta^2} + s v^{s-1/2} |\nabla v| \omega^q \zeta^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + q v^{s+1/2 \omega^{q-1}} |\nabla \omega| \zeta^2 + v^{s+1/2 \omega^q \zeta} |\nabla \zeta| \right) + \omega^{1/2} \sum_{r \neq n} |u_{x_r x}| v^{s+1/2 \omega^q \zeta^2} + \right. \\ \left. \left. + v^{s+1 \omega^{q+1} \zeta^2} \right\} dx = 0. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши с ε при $q = s = 0$, получаем

$$\int_{\Omega_\rho} \sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 \zeta^2 \leq c \int_{\Omega_\rho} (v \omega \zeta^2 + v |\nabla \zeta|^2) dx, \quad (18)$$

а при $s > 0$, $q > 0$, выбирая $\varepsilon = \frac{2q^2}{s}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\rho} \left[\sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 v^{s \omega^q \zeta^2} + \frac{s}{2} v^{s-1 \omega^q} |\nabla v|^2 \zeta^2 \right] dx \leq c \int_{\Omega_\rho} \left[\frac{q^2}{s} \omega^{q-2} v^{s+1} |\nabla \omega|^2 \zeta^2 + \right. \\ \left. + v^{s+1 \omega^q} |\nabla \zeta|^2 + (1+s) v^{s-1 \omega^{q+1} \zeta^2} \right] dx. \quad (19) \end{aligned}$$

Из (17) и (19) при $q = s = 0$ и достаточно малых ρ следует

$$\int_{\Omega_\rho} \left(\sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 \zeta^2 + v \omega \zeta^2 \right) dx \leq c \int_{\Omega_\rho} v |\nabla \zeta|^2 dx + c(\rho)$$

и, так как $v \leq \omega$, то на основании (16) получим

$$\int_{\Omega_p} \left(\sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 + v\omega \right) \zeta^2 dx \leq c_1(p). \quad (20)$$

Так как $\omega_{x_i} = 2 \sum_{e=1}^n u_{x_e} u_{x_e x_i}$, то $|\nabla \omega|^2 \leq 4\omega u_{xx}^2$. Из (15) имеем, что

$$|u_{x_n x_n}| \leq c' \sum_{r \neq n} |u_{x_r x}| + c'\omega. \quad (21)$$

Следовательно, верно следующее соотношение:

$$|\nabla \omega|^2 \leq c\omega \sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 + c\omega^3. \quad (22)$$

Пусть $s > 0$, из (17) и (19), используя соотношение (22) при $\frac{q^2}{s} \ll 1$ выводим

$$\int_{\Omega_p} \left[v^{s+1} \omega^{q+1} \zeta^2 + v^s \omega^q \sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 \zeta^2 \right] dx \leq c(s, q) \int_{\Omega_p} v^{s+1} \omega^q |\nabla \zeta|^2 dx + c(s, q). \quad (23)$$

Пусть $p_s = \frac{p}{2} + \frac{p}{2^{s+1}}$, Ω_{p_s} — последовательность областей $s = 1, 2, \dots$ и $\zeta_s(x)$ — срезающая функция для шара K_{p_s} , равная единице в $K_{p_{s+1}}$. Если $q = 0$, то из (23) и (20) вытекает

$$\int_{\Omega_{p_s}} v^{s+1} \omega \zeta_s^2 dx \leq c(s), \quad s > 0.$$

Рассматривая (23) последовательно при $q = 0, 1, \dots$, получим оценки интегралов

$$\int_{\Omega_{\frac{p}{2}}} \left(v^{s+1} \omega^{q+1} + v^s \omega^q \sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 \right) dx \leq c(s, q), \quad (24)$$

а используя (21) выводим

$$\int_{\Omega_{\frac{p}{2}}} (1 + |\nabla u|)^m (1 + u_{xx}^2) dx \leq c(m). \quad (25)$$

откуда и следует

$$\int_{\Omega_{\frac{p}{2}}} |\nabla u|^m dx \leq c(m). \quad (26)$$

Оценим сейчас $\max |u_{x_r}|$, $r \neq n$ вблизи S_1 . Введем функцию $z = v_{x_r}^2$ и пусть $A_k = \{x; x \in \Omega, z(x) > k\}$. Подставим в (8) $\xi = u_{x_r} \zeta_{x_i}^2 \max \{z - k, 0\}$, $r \neq n$, $k > 0$ и просуммируем по r от 1 до $n - 1$. В результате получаем следующее интегральное тождество:

$$\begin{aligned} \int_{A_k} [a_{ij} u_{x_r x_j} (u_{x_r x_i} (z - k) \zeta_i^2 + u_{x_r} z_{x_i} \zeta_i^2 + u_{x_r} (z - k) 2 \zeta_{x_i}^2) + \\ + B_i (u_{x_r x_i} (z - k) \zeta_i^2 + u_{x_r} z_{x_i} \zeta_i^2 + u_{x_r} (z - k) 2 \zeta_{x_i}^2) + \\ + A_r z \zeta (v_{x_n} \zeta_{x_r} - v_{x_r} \zeta_{x_n}) + A_r (z - k) \zeta (v_{x_n} \zeta_{x_r} - v_{x_r} \zeta_{x_n})] dx = 0. \end{aligned}$$

Так как $u_{x_r x_j} u_{x_r} = \frac{1}{2} (z_{x_j} - 2v \zeta_{x_j})$, то из условий (3), (4) и (11) вытекает, что

$$\int_{A_k} |\nabla z|^2 dx \leq c \int_{A_k} (1 + |\nabla u|)^6 (1 + |\nabla \zeta|^2) dx \leq c_1 \int_{A_k} (1 + |\nabla u|)^6 dx,$$

где c_1 зависит от μ , ν , ρ . Применяя неравенство Гельдера с показателями $p = \frac{l}{6}$, $q = \frac{l}{l-6}$, где $l > 3n$, получим

$$\int_{A_k} |\nabla z|^2 dx \leq c_1 \text{mes}^{\frac{1}{q}} A_k, \quad \frac{1}{q} > 1 - \frac{2}{n}. \quad (27)$$

Из (27), в силу леммы 5.4 гл. II [1], следует оценка $\max_{\Omega_1} v_{x_r}^2 \leq M_2$, т. е. $\max_{\Omega_1} |u_{x_r}| \leq M_2$, $r \neq n$. Используя граничное условие (2), оцениваем $\max_{\Omega_1} |u_{x_n}|$. Из этих оценок и неравенства (25) также как и в случае первой краевой задачи (гл. IV [I]) получается оценка $\max |\nabla u|$ вблизи S_1 . Сформулируем доказанные утверждения в виде теоремы.

Теорема 1. *Предположим, что функции $a_{ij}(x, u)$, $a(x, u, p)$ при $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leq M$ и произвольных p дифференцируемы по своим аргументам и удовлетворяют неравенствам (3) и (4):*

$$f(x) \in L_\infty(\Omega), \quad \varphi(x, u) \in O^3(\Omega \times [-M, M]), \quad b_i(x, u) \in O^2(\Omega \times [-M, M]),$$

$$\max_{\Omega} |\varphi, \varphi_{x_i}, \varphi_{xx}, \varphi_{x_i x_j}, \varphi_{xx}| \leq \mu(M).$$

Пусть граница $S \in O^2$. Тогда для любого решения $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ задачи (1)–(2), для которого $\max |u| \leq M$, норма $|u|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ оценивается при некотором $\beta > 0$ постоянной, зависящей от M , $\nu(M)$, $\mu(M)$ и границы S . Этими же постоянными определяется β .

Этих оценок достаточно для исследования классической разрешимости задачи (1)–(2) в предположении определенной гладкости функций, образующих уравнение (1) и граничное условие (2), а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнено следующее условие (теорема 2.2 гл. X [1]): при $|u| > R$ (R – достаточно большое число):

$$a_{ij}(x, u) \xi_i \xi_j \geq \nu(M) \xi^2, \quad \nu > 0,$$

$$\operatorname{sign} u \left| \frac{\partial a_{ij}(x, u)}{\partial x_i} + a(x, u, 0) - f(x) \right| < 0, \quad x \in Q,$$

$$\operatorname{sign} u [b_i(x, u) \cos(\vec{n}, x_i) - \varphi(x, u)] > 0, \quad x \in S,$$

и пусть функции $a_{ij}(x, u)$, $a(x, u, p)$ и их частные производные по x, u, p удовлетворяют условию Гельдера с показателем α по x и с показателем $\alpha' > \alpha$ по u, p . Функция $b_i(x, u)$ принадлежит пространству $C^{1+\alpha}(\bar{Q})$; S – поверхность класса $C^{2+\alpha}$. Тогда задача (1)–(2) разрешима в пространстве $C^{2+\alpha}(\bar{Q})$.

Пользуясь случаем, автор благодарит проф. Н. Н. Уральцеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступила 7.IV.1975

Է. Լ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Ոչ-զծային եզրային խնդիր կվազիզծային էլիպտիկ հավասարումների համար (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկված է ոչ-զծային եզրային խնդիր

$$a_{ij}(x, u) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = f(x), \quad x \in Q,$$

$$b_i(x, u) u_{x_i} = \varphi(x, u), \quad x \in S$$

հավասարման էլիպտիկության պայմանի դեպքում և երբ տեղի ունի հետևյալ պայմանը

$$b_i(x, u) \cos(\vec{n}, x_i) > \delta > 0:$$

ենթադրելով իրագործված $\max |u| < M$ պայմանը, ստացված են

$$\langle u \rangle_Q^{(\alpha)}, \quad \max_Q |\nabla u|, \quad \langle u_{x_i} \rangle_Q^{(\alpha)}$$

զնաչատականները, որոնք անհրաժեշտ են խնդրի կլասիկ լուծելիության հետադրական համար:

E. L. KAZARIAN. *Non-linear boundary problem for quasi-linear elliptical equations* (summary)

The paper considers the boundary problem

$$a_{ij}(x, u)u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

$$b_i(x, u)u_{x_i} = \varphi(x, u), \quad x \in S$$

for elliptical equation and

$$b_i(x_i, u) \cos(\vec{n}, x_i) \geq \delta > 0.$$

Under the condition $\max |u| < M$ the evaluations of

$$\langle u \rangle_{\frac{1}{2}}^{(\alpha)}, \quad \max_{\bar{\Omega}} |\nabla u|, \quad \langle u_{x_i} \rangle_{\frac{1}{2}}^{(\alpha)},$$

which are necessary for the analysis of classical solvability of the problem are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., Изд. «Наука», 1973.
2. R. Florenza, Sui problemi di derivata oblique per le equazioni ellittiche, Ricerche di Mat. Napoli, 8. 1959. 83—110.