ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XI, № 5, 1976 Математика

А. Н. АЙРАПЕТЯН, В. И. ГАВРИЛОВ

УСИЛЕНИЯ ТЕОРЕМЫ МЕЙЕРА, КАСАЮЩЕЙСЯ ГРАНИЧНОГО ПОВЕДЕНИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье будет указано приложение теоремы Коллингвуда о максимальности ([2], стр. 379, теорема 1; стр. 395, см. также [3], стр. 108, теорема 4,8) для изучения граничных свойств мероморфных функций в единичном круге вдоль орициклов. Используются также свойства $P^{(p)}$-последовательностей ([4]). Доказываемые теоремы усиливают утверждение теоремы Мейера ([3], стр. 204, теорема 8.8) и распространяют ее на орициклические пути.

1°. Обозначим через Ω, D, Γ и $h(\zeta, \alpha)$, соответственно, расширенную z-плоскость, круг $|z|<1$, окружность $|z|=1$ и хорду круга D, оканчивающуюся в точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ и образующую с радиусом в этой точке угол α; $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Пусть $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ обозначает подобласть круга D, ограниченную хордами $h(\zeta, \alpha_1)$, $h(\zeta, \alpha_2)$ и окружностью $\left|z-\dfrac{1}{2}\zeta\right|=\dfrac{1}{2}$. Область $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ называют обычно углом Штольца с вершиной в точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$; если нас не интересует размер угла Штольца, мы будем обозначать его кратко через $\Delta(\zeta)$.

Для произвольных точек a, $b\in D$ и кривой $L\subset D$ положим

$$\sigma(a, b)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}, \quad u=\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|,$$

$$\sigma(a, L)=\inf\{b\in L;\ \sigma(a, b)\}.$$

Пусть $\Lambda(\zeta)$ обозначает орицикл круга D в точке $\zeta=e^{i\theta}$, т. е. — окружность радиуса меньше единицы, касающуюся изнутри окружности Γ в точке $\zeta=e^{i\theta}$. Два орицикла $\Lambda_1(\zeta)$, $\Lambda_2(\zeta)$ круга D в точке $\zeta=e^{i\theta}$ ограничивают некоторую односвязную область, которую диаметр круга D, проведенный в точку $\zeta=e^{i\theta}$, делит на две равные части, называемые в дальнейшем левым орициклическим углом $O^{-}\Delta(\zeta)$ и правым орициклическим углом $O^{+}\Delta(\zeta)$ в точке $\zeta=e^{i\theta}$. Символом $O^{\Delta}(\zeta)$ обозначается произвольный орициклический угол с вершиной $\zeta\in\Gamma$. Ниже нам понадобится следующее свойство орициклов: для произвольных точек z_1 и z_2, лежащих на орицикле $\Lambda_1(\zeta)$ и произвольного другого орицикла $\Lambda_2(\zeta)$ имеем

$$\sigma(z_1, \Lambda_2(\zeta))=\sigma(z_2, \Lambda_2(\zeta))=\text{const}.$$

2°. Пусть $f(z)$ — произвольная действительная или комплексная функция, отображающая D в Ω, и S — подмножество круга D, для которого $\zeta \in \Gamma$ является предельной точкой. Обозначим через $C(f, \zeta, S)$ множество всех значений $a \in \Omega$, для которых на S можно указать по крайней мере одну последовательность точек

$$\{z_n^{(a)}\},\ n = 1, 2, \cdots,\ z_n^{(a)} \in S,\ \lim_{n \to \infty} z_n^{(a)} = \zeta,$$

по которой $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n^{(a)}) = a$. В частности, получаем предельные множества

$$C(f, \zeta, D),\ C(f, \zeta, h(\zeta, \alpha)),\ C(f, \zeta, \Delta(\zeta)),\ C(f, \zeta, O\Delta(\zeta)) \quad \text{и} \quad C(f, \zeta, \Lambda(\zeta)).$$

Точку $\zeta \in \Gamma$ отнесем к множеству $\mathrm{c}(f)$, если для любого угла Штольца $\Delta(\zeta)$ и любого орициклического угла $O\Delta(\zeta)$ в точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ имеем

$$C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = \cup\, C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) \text{ и } C(f, \zeta, O\Delta(\zeta)) = \cup\, C(f, \zeta, O\Delta(\zeta)),$$

где объединения берутся по всем углам Штольца и орициклическим углам в точке $\zeta = e^{i\theta}$. Если, дополнительно,

$$C(f, \zeta, O\Delta(\zeta)) = C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = C(f, \zeta, D),$$

то точку $\zeta \in \mathrm{c}(f)$ отнесем к множеству $\mathbf{C}(f)$. Точка $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}(f)$, если

$$\cap\, C(f, \zeta, h(\zeta, \alpha)) = \cap\, C(f, \zeta, \Lambda(\zeta)) = C(f, \zeta, D) \text{ и } C(f, \zeta, D) \neq \Omega,$$

где пересечения берутся по всем хордам и орициклам в точке $\zeta \in \Gamma$.

3°. Пусть, теперь, функция $f(z)$ мероморфна в D. Тогда функция

$$q_f^{(p)}(z) = (1 - |z|)^p \rho(f(z)),\ \rho(f(z)) = |f'(z)| \frac{1}{1 + |f(z)|^2}$$

непрерывна в D для любого числа $p \geqslant 1$. Функцию $q_f^{(1)}(z)$ будем обозначать короче через $q_f(z)$.

Следуя [4] и [5] последовательность точек

$$\{z_n\},\ n = 1, 2, \cdots,\ z_n \in D,\ \lim_{n \to \infty} |z_n| = 1$$

называем $P^{(p)}$-последовательностью для мероморфной в D функции $f(z)$ ($p \geqslant 1$ — действительное фиксированное число), если для любого $\varepsilon > 0$ и любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ функция $f(z)$ принимает в объединении неэвклидовых кругов

$$D_p(z_{n_k}, \varepsilon) = \{z \in D;\ \sigma(z, z_{n_k}) < \varepsilon(1 - |z_{n_k}|^2)^{p-1}$$

бесконечно часто каждое значение $w \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений. Каждая последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $n = 1, 2, \cdots$ $\cdots$, $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = 1$, по которой $\lim\limits_{n \to \infty} (1 - |z_n|^2)^p \rho(f(z_n)) = +\infty$, является $P^{(p)}$-последовательностью для функции $f(z)$ ([4]), теорема 1). Известно также ([4], теорема 3), что последовательность точек

$\{z_n\}$, $z_n \in D$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$, будет $P^{(p)}$-последовательностью для мероморфной в D функции $f(z)$ в том и только в том случае, когда существует такая последовательность положительных чисел

$$\{\varepsilon_n\},\ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

что

$$\lim_{n\to\infty} \max\,[q_f^{(p)}(z),\ z \in D_p(z_n,\ \varepsilon_n)] = +\infty.$$

В дальнейшем $P^{(1)}$-последовательности будем называть короче P-последовательностями.

Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $\mathrm{P}(f)$, если каждая хорда $h(\zeta, \alpha)$ и каждый орицикл $\Lambda(\zeta)$ в точне $\zeta = e^{i\theta}$ содержит P-последовательность функции $f(z)$. Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $\mathrm{I}^*(f)$, если

$$\cap\, C(f,\ \zeta,\ h(\zeta,\ \alpha)) = \cap\, C(f,\ \zeta,\ \Lambda(\zeta)) = \Omega,$$

где пересечения берутся по всем хордам $h(\zeta, \alpha)$ и всем орициклам $\Lambda(\zeta)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$, и ни одна хорда $h(\zeta, \alpha)$ и ни один орицикл $\Lambda(\zeta)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$ не содержат P-последовательностей функции $f(z)$.

Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $Q_0(f)$, если

$$\lim_{z\to\zeta} \sup_{z\in D} q_f(z) = 0;$$

точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $Q_1(f)$, если

$$0 < \lim_{z\to\zeta} \sup_{z\in D} q_f(z) < +\infty.$$

Положим

$$\mathfrak{M}_0(f) = \mathfrak{M}(f) \cap Q_0(f),\ \mathfrak{M}_1(f) = \mathfrak{M}(f) \cap Q_1(f),$$

$$\mathrm{I}_0^*(f) = \mathrm{I}^*(f) \cap Q_0(f),\ \mathrm{I}_1^*(f) = \mathrm{I}^*(f) \cap Q_1(f),\ Q(f) = Q_0(f) \cup Q_1(f).$$

В произвольной точке $\zeta = e^{i\theta} \in \mathfrak{M}(f)$ имеем $C(f,\ \zeta,\ D) \neq \Omega$, и следовательно, в силу отмеченных свойств P-последовательностей, в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \mathfrak{M}(f)$ имеем

$$\lim_{z\to\zeta} \sup_{z\in D} q_f(z) < +\infty.$$

Поэтому $\mathfrak{M}(f) = \mathfrak{M}_0(f) \cup \mathfrak{M}_1(f)$.

Граничное поведение мероморфной функции $f(z)$ в произвольной точке $\zeta = e^{i\theta} \in Q_0(f)$ определяется следующим утверждением, доказанным Андерсоном, Клуни и Поммеренке [1].

Теорема А. ([1], *теорема* 4.1). *Если* $\zeta = e^{i\theta} \in Q_0(f)$, *то для любой жордановой кривой* L, *лежащей в* D *и оканчивающейся в* $\zeta = e^{i\theta}$, *имеем* $C(f,\ \zeta,\ L) \supset \cup\, C(f,\ \zeta,\ \Delta(\zeta,\ \alpha_1,\ \alpha_2))$, *где объединение берется по всем углам* $\Delta(\zeta,\ \alpha_1,\ \alpha_2)$ *с вершиной в* $\zeta = e^{i\theta}$.

Поэтому в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \mathfrak{M}_0(f)$ и в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \mathrm{I}^*(f)$ для любой жордановой кривой L, лежащей в D и оканчивающейся в $\zeta = e^{i\theta}$, имеем $C(f,\ \zeta,\ L) = C(f,\ \zeta,\ D)$.

4°. Теперь мы сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем*

$$\Gamma = \mathfrak{M}_0(f) \cup \mathfrak{M}_1(f) \cup \mathbf{I}_0^*(f) \cup \mathbf{I}_1^*(f) \cup \mathbf{P}(f) \cup E,$$

где E — множество первой категории на Γ.

Эта теорема, являясь усилением теоремы Мейера ([3], стр. 204, теорема 8.8), представляет собой также обобщение теоремы 1 из [6], в которой изучалось поведение вдоль углов Штольца.

5°. Выделим в качестве лемм основные этапы в доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. *Для любой действительной или комплексной непрерывной функции $q(z)$, отображающей D в Ω, дополнение множества $\mathbf{C}(q)$ относительно Γ является множеством первой категории.*

Лемма 1 является простым следствием теоремы Коллингвуда о максимальности. Действительно, рассмотрим семейство кривых $G(1)$, состоящее из счетного числа хорд $\{h(1, \alpha_n)\}$ и орициклов $\Lambda_m(1)$, оканчивающихся в точке $\zeta = 1$, и обладающее тем свойством, что каждый угол Штольца $\Delta(1)$ и каждый орициклический угол $O\Delta(1)$ с вершиной в точке $\zeta = 1$ содержат по крайней мере один элемент множества $G(1)$. Обозначим через $G(\zeta)$ ($\zeta = e^{i\theta}$) образ $G(1)$ при повороте $z' = e^{i\theta}z$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Согласно теореме Коллингвуда о максимальности в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, исключая самое большее множество $E \subset \Gamma$ первой категории, для любого элемента $L \in G(\zeta)$ имеем $C(q, \zeta, L) = C(q, \zeta, D)$. В силу выбора семейств $G(\zeta)$, каждая точка $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ принадлежит множеству $\mathbf{C}(q)$ и лемма доказана.

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 1. Применим лемму 1 к функциям $f(z)$ и $q_f(z)$. Множество $M = \mathbf{C}(f) \cap \mathbf{C}(q_f)$ имеет своим дополнением относительно Γ множество первой категории, так как дополнения множеств $\mathbf{C}(f)$ и $\mathbf{C}(q_f)$ относительно Γ согласно лемме 1 есть множества первой категории. В произвольной точке $\zeta = e^{i\theta} \in M$ имеем четыре возможности: (i) множество $C(q_f, \zeta, D)$ ограничено и $C(f, \zeta, D) \neq \Omega$; (ii) множество $C(q_f, \zeta, D)$ ограничено и $C(f, \zeta, D) = \Omega$; (iii) множество $C(q_f, \zeta, D)$ не ограничено и $C(f, \zeta, D) = \Omega$; (iv) множество $C(q_f, \zeta, D)$ не ограничено и $C(f, \zeta, D) \neq \Omega$. Отметим сразу, что возможность (iv) в действительности реализоваться не может, так как условие неограниченности множества $C(q_f, \zeta, D)$ означает существование P-последовательности функции $f(z)$, стремящейся к точке $\zeta = e^{i\theta}$ и ведет, следовательно, к утверждению, что $C(f, \zeta, D) = \Omega$.

6°. Если в точке $\zeta \in M$ реализуется возможность (iii), то каждый угол Штольца $\Delta(\zeta)$ и каждый орициклический угол $O\Delta(\zeta)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержат по крайней мере одну P-последовательность функции $f(z)$. Утверждение, что в этом случае $\zeta = e^{i\theta} \in \mathbf{P}(f)$, следует из такой леммы.

Лемма 2. *Хорда $h(\zeta, \alpha)$ (орицикл $\Lambda(\zeta)$) не содержит P-последовательностей мероморфной в D функции $f(z)$ в том и толь-*

ко в том случае, когда найдется некоторый угол Штольца $\Delta(\zeta)$ (орициклический угол $O\Delta(\zeta)$), содержащий $h(\zeta, \alpha)$ $(\Lambda(\zeta))$, в котором множество $C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta))$ (множество $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$ ограничено.

Для хорд эта лемма доказана в [6]. Установим справедливость утверждния леммы 2 для орициклов. Для доказательства достаточности, допустим, что по некоторому орициклическому углу $O\Delta(\zeta)$, содержащему орицикл $\Lambda(\zeta)$, предельное множество $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$ ограничено, но $\Lambda(\zeta)$ содержит P-последовательность $\{z_n\}$ функции $f(z)$. Согласно ([4], теорема 3) найдется последовательность точек

$$\{z_n^1\}, \lim_{n\to\infty} \sigma(z_n, z_n^1) = 0,$$

по которой

$$\lim_{n\to\infty} q_f(z_n') = +\infty.$$

В силу отмеченных выше свойств орициклов все точки z_n^1, начиная с некоторого номера n_0, попадут во внутрь орициклического угла $O\Delta(\zeta)$ и значит множество $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$ не ограничено, что невозможно.

Чтобы доказать необходимость условий леммы 2, допустим, что в каждом орициклическом угле $O\Delta(\zeta)$, содержащем орицикл $\Lambda(\zeta)$, предельное множество $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$ не ограничено. Таким образом, любой угол $O\Delta(\zeta)$ содержит последовательность точек $\{z_n\}$, по которой $\lim\limits_{n\to\infty} q_f(z_n) = +\infty$. Неограниченно уменьшая величину раствора углов $O\Delta(\zeta)$, стягивая их к орициклу $\Lambda(\zeta)$ и используя свойства орициклов, выделим из последовательности точек $\{z_n\}$ такую подпоследовательность $\{\bar{z}_n\}$, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(\bar{z}_n, \Lambda(\zeta)) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} q_f(\bar{z}_n) = +\infty$.

Обозначим через $\{z_n^1\}$ такую последовательность точек из $\Lambda(\zeta)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(\bar{z}_n, z_n^1) = 0$. Согласно ([4], теорема 3) последовательность точек $\{z_n^1\}$ является P-последовательностью функции $f(z)$.

7°. Если реализуется возможность (i) или возможность (ii), то точка $\zeta = e^{i\theta}$ принадлежит множеству $Q(f)$. Утверждения, что $\zeta = e^{i\theta} \in \mathfrak{M}(f)$, и значит $\zeta \in \mathfrak{M}_0(f) \cup \mathfrak{M}_1(f)$, если реализуется (i), и что $\zeta = e^{i\theta} \in \mathrm{I}^*(f)$, и значит $\zeta \in \mathrm{I}_0^*(f) \cup \mathrm{I}_1^*(f)$, если реализуется (ii), следует на основании определений множеств $\mathfrak{M}(f)$ и $\mathrm{I}^*(f)$, леммы 2 и следующего результата.

Лемма 3. *Если у мероморфной в D функции $f(z)$ в некоторой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \mathrm{C}(f)$ множества $C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta))$ (множества $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$) ограничены для любого угла Штольца $\Delta(\zeta)$ (орициклического угла $O\Delta(\zeta)$), то для всех хорд $h(\zeta, \alpha)$ (орициклов $\Lambda(\zeta)$) в точке $\zeta = e^{i\theta}$ множества $C(f, \zeta, h(\zeta, \alpha))$ $(C(f, \zeta, \Lambda(\zeta))$ одинаковы и совпадают с $C(f, \zeta, \Delta(\zeta))$ $(C(f, \zeta, O\Delta(\zeta))$. В частности, если в точке $\zeta = e^{i\theta} \in \mathrm{C}(f)$ множество $C(q_f, \zeta, D)$ ограничено, то*

$$\bigcap_h C(f, \zeta, h(\zeta, \alpha)) = \bigcap_\Lambda C(f, \zeta, \Lambda(\zeta)) = C(f, \zeta, D).$$

Справедливость утверждения леммы 3 для хорд $h(\zeta, \alpha)$ и углов Штольца $\Delta(\zeta)$ установлена в [6] Чтобы доказать лемму 3 полностью, допустим, что найдутся орицикл $\Lambda(\zeta)$ и значение $a \in \Omega$ такие, что $a \,\overline{\in}\, C(f, \zeta, \Lambda(\zeta))$, в то время, как в каждом орициклическом угле $O\Delta(\zeta)$, содержащем орицикл $\Lambda(\zeta)$, имеется последовательность точек $\{z_n^{(\Delta)}\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(\Delta)} = \zeta$, по которой $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n^{(\Delta)}) = a$. Неограниченно уменьшая величину раствора углов $O\Delta(\zeta)$, стягивая их к орициклу $\Lambda(\zeta)$ и используя свойство орициклов, выделим из последовательности точек $\{z_n^{(\Delta)}\}$ такую подпоследовательность точек $\{z_\nu\}$, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} z_\nu = \zeta$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(z_\nu) = a$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sigma(z_\nu, \Lambda(\zeta)) = 0$. Отметим на $\Lambda(\zeta)$ такую последовательность точек $\{z_\nu^1\}$, чтобы $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sigma(z_\nu, z_\nu^1) = 0$. По допущению $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(z_\nu^1) = 0$. Согласно ([5], теорема 7) каждая из последовательностей $\{z_\nu\}$ и $\{z_\nu^1\}$ является P-последовательностью для функции $f(z)$. Согласно лемме 2, по некоторому орициклическому углу $O\Delta(\zeta)$, содержащему орицикл $\Lambda(\zeta)$, множество $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$ должно быть неограниченным. Полученное противоречие доказывает лемму 3, а вместе с ней и теорему 1.

З а м е ч а н и е. Анализируя доказательство теоремы 1, особенно п. 7, мы видим, что фактически доказано следующее утверждение: для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем

$\mathrm{I}^*(f) = \mathrm{I}_0^*(f) \cup \mathrm{I}_1^*(f) \cup E$, где E — множество первой категории на Γ.

Пусть $p_0 > 1$ — действительное фиксированное число. Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $\mathrm{P}_{p_0}(f)$, если каждый орициклический угол $O\Delta(\zeta)$ и каждый угол Штольца $\Delta(\zeta)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержит $P^{(p_0)}$-последовательность функции $f(z)$. Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $\mathrm{P}_{p_0}^-(f)$, если каждый угол $\Delta(\zeta)$ и каждый орициклический угол $O\Delta(\zeta)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержат по крайней мере одну P-последовательность функции $f(z)$ и не содержат $P^{(p_0)}$-последовательностей функции $f(z)$.

Т е о р е м а 2. *Для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем*

$$\Gamma = \mathfrak{M}_0(f) \cup \mathfrak{M}_1(f) \cup \mathrm{I}_0^*(f) \cup \mathrm{I}_1^*(f) \cup \mathrm{P}_{p_0}(f) \cup P_{p_0}^-(f) \cup E,$$

где E—множество первой категории на Γ.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Рассмотрим множество $M = \mathrm{C}(f) \cap \mathrm{C}(q_f) \cap \mathrm{C}(q_f^{(p_0)})$. Согласно лемме 1, множество M имеет своим дополнением относительно Γ множество E первой категории; т. е. $\Gamma = M \cup E$. Для любой точки $\zeta = e^{i\theta} \in M$ имеем восемь возможностей:

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{l} C(f, \zeta, D) \neq \Omega, \\ C(q_f, \zeta, D) \overline{\ni} +\infty, \\ C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \overline{\ni} +\infty, \end{array} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{l} C(f, \zeta, D) = \Omega, \\ C(q_f, \zeta, D) \overline{\ni} +\infty, \\ C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \ni +\infty, \end{array}$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{array}{l} C(f, \zeta, D) = \Omega, \\ C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty, \\ C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \overline{\ni} +\infty, \end{array} \qquad \text{(iv)}\quad \begin{array}{l} C(f, \zeta, D) = \Omega, \\ C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty, \\ C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \ni +\infty, \end{array}$$

$$\text{(v)}\quad \begin{array}{l} C(f, \zeta, D) = \Omega, \\ C(q_f, \zeta, D) \overline{\ni} +\infty, \\ C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \ni +\infty, \end{array} \qquad \text{(vi)}\quad \begin{array}{l} C(f, \zeta, D) \neq \Omega, \\ C(q_f, \zeta, D) \overline{\ni} +\infty, \\ C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \ni +\infty, \end{array}$$

$$\text{(vii)}\quad \begin{array}{l} C(f, \zeta, D) \neq \Omega \\ C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty, \\ C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \overline{\ni} +\infty, \end{array} \qquad \text{(viii)}\quad \begin{array}{l} C(f, \zeta, D) \neq \Omega, \\ C(q_f, \zeta, D) \ni +\infty, \\ C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \ni +\infty. \end{array}$$

Используя свойства $P^{(p)}$ $(p>1)$-последовательностей, легко вывести, что последние четыре случая в действительности не реализуются. Покажем это, например, в случае (vi). Так как $C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \ni +\infty$, то из определения множества $C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D)$ следует, что существует последовательность точек

$$\{z_n\}, \; z_n \in D, \; n = 1, 2, \cdots, \; \lim_{n \to \infty} |z_n| = 1, \; z_n \to \zeta,$$

удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \to \infty} (1 - |z_n|)^{p_0} \rho(f(z_n)) = +\infty$$

и значит

$$\lim_{n \to \infty} (1 - |z_n|) \rho(f(z_n)) = +\infty.$$

Последнее противоречит тому, что $C(q_f, \zeta, D) \overline{\ni} +\infty$.

В случае (iii) каждый угол Штольца $\Delta(\zeta)$ (орициклический угол $O\Delta(\zeta)$) с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержит по крайней мере одну P-последовательность функции $f(z)$. Кроме того ни один из углов Штольца $\Delta(\zeta)$ и орициклических углов $O\Delta(\zeta)$ не содержит $P^{(p_0)}$-последовательностей, поскольку, в противном случае, в силу теоремы 3 из статьи [4], некоторый угол Штольца $\Delta(\zeta)$ или орициклический угол $O\Delta(\zeta)$ содержал бы последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \to \zeta$, по которой

$$\lim_{n \to \infty} q_f^{(p_0)}(z_n) = +\infty.$$

Следовательно, при реализации случая (iii) точка $\zeta = e^{i\theta} \in \mathbf{P}_{p_0}^{-}(f)$. В случае (iv) любой угол $\Delta(\zeta)$ (орициклический угол $O\Delta(\zeta)$) содержит по крайней мере одну $P^{(p_0)}$-последовательность функции $f(z)$, и следовательно, точка $\zeta = e^{i\theta} \in P_{p_0}(f)$. В доказательстве теоремы 1 было замечено, что при реализации случаев (i) и (ii) точка $\zeta = e^{i\theta}$ принадлежит множествам $\mathfrak{M}(f)$ или $I^*(f)$.

8°. Чтобы сформулировать некоторую теорему, родственную теореме 2, введем дополнительные обозначения. Если функция $f(z)$ мероморфна в D, то как это принято в теории предельных множеств, $F(f)$ обозначает множество точек $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых объединение $\bigcup\limits_{\Delta} C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ по всем углам Штольца с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ состоит из единственного значения. Множество точек $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых для произвольной функции $f(z)$, определенной в D, множества $C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ одинаковы для всех углов $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершиной в $\zeta = e^{i\theta}$, обозначают через $K(f)$. Множество точек $\zeta = e^{i\theta}$, в которых

$$\bigcap_{\Delta} C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) = C(f, \zeta, D)$$

обозначим через $C(f)$. Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $I^*(f)$, если пересечение $\bigcap\limits_{h} C(f, \zeta, h(\zeta, \alpha))$ по всем хордам $h(\zeta, \alpha)$ в $\zeta = e^{i\theta}$ совпадает с Ω и ни одна из хорд $h(\zeta, \alpha)$ не содержит P-последовательностей функции $f(z)$. Точку $\zeta = e^{i\theta}$ отнесем к множеству $P_{p_0}(f)$, если каждый угол $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершиной в $\zeta = e^{i\theta}$ содержит хотя бы одну $P^{(p_0)}$-последовательность функции $f(z)$. Точка $\zeta = e^{i\theta}$ принадлежит множеству $P_{p_0}^{-}(f)$, если каждый угол $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержит по крайней мере одну P-последовательность функции $f(z)$ и не содержит $P^{(p_0)}$-последовательностей функции $f(z)$.

Теорема 3. *Для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем*

$$\Gamma = F(f) \cup I^*(f) \cup P_{p_0}(f) \cup P_{p_0}^{-}(f) \cup E,$$

где E— множество линейной меры нуль на Γ.

Эта теорема уточняет утверждение теоремы 2 из статьи [6].

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся результатом Е. П. Долженко ([3], стр. 257), согласно которому для любой действительной или комплексной в D функции $q(z)$ имеем $\operatorname{mes} K(q) = 2\pi$. Образуем множество

$$N = K(f) \cap K(q_f) \cap K(q_f^{(p_0)}).$$

Тогда $\Gamma = N \cup E$, $\operatorname{mes} E = 0$. Для произвольной точки $\zeta = e^{i\theta} \in N$ и любого угла $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ имеем восемь возможностей:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} &C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \neq \Omega, \\ &C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \not\ni +\infty \\ &C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \not\ni +\infty, \end{aligned} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{aligned} &C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) = \Omega, \\ &C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \not\ni +\infty, \\ &C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \not\ni +\infty, \end{aligned}$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{aligned} &C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) = \Omega, \\ &C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \ni +\infty, \\ &C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \not\ni +\infty, \end{aligned} \qquad \text{(iv)}\quad \begin{aligned} &C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) = \Omega \\ &C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \ni +\infty, \\ &C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \ni +\infty, \end{aligned}$$

$$\text{(v)}\quad \begin{aligned} &C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) = \Omega, \\ &C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \not\ni +\infty, \\ &C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \ni +\infty, \end{aligned} \qquad \text{(vi)}\quad \begin{aligned} &C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \neq \Omega, \\ &C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \not\ni +\infty, \\ &C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \ni +\infty, \end{aligned}$$

$$\text{(vii)}\quad \begin{aligned} &C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \neq \Omega. \\ &C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \ni +\infty, \\ &C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \ni \infty, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \neq \Omega, \\ &C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \ni +\infty, \\ &C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \not\ni +\infty. \end{aligned}$$

Заметим, что последние четыре случая не могут реализоваться. Покажем это, например, для случая (viii). Условие $C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) \ni +\infty$ означает, что угол $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ содержит P-последовательность функции $f(z)$, следовательно

$$C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) = \Omega,$$

что противоречит первому условию. Остальные три случая рассматриваются аналогично.

В случае (iii) каждый угол $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержит хотя бы одну P-последовательность функции $f(z)$ и не содержит ни одной $P^{(p_0)}$-последовательности функции $f(z)$. Следовательно, точка $\zeta = e^{i\theta} \in P_{p_0}^{-}(f)$. В случае (iv) каждый угол $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ содержит по крайней мере одну $P^{(p_0)}$-последовательность функции $f(z)$, следовательно, точка $\zeta = e^{i\theta} \in P_{p_0}(f)$. В статье [6] доказано, что при реализации случаев (i) и (ii) почти все точки $\zeta = e^{i\theta}$ принадлежат множествам $F(f)$ и $I^*(f)$, соответственно.

Ереванский педагогический институт
им. Х. Абовяна,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 6.I.1975

Ա. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Վ. Ի. ԳԱՎՐԻԼՈՎ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների եզրային վարքի վերաբերյալ Մայերի թեորեմի ուժեղացումը *(ամփոփում)*

Հոդվածում նշված է Կոլինգվուդի մաքսիմալության թեորեմի ([2], էջ 379, 395 կամ [3], էջ 108, թեորեմ 4.8) կիրառությունը միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների հորիցիկլերի վրայով եզրային վարքի ուսումնասիրության համար։ Օգտագործվում են նաև $P^{(\rho)}$ հաջորդականությունների հատկությունները [4]։ Ապացուցվող երկու թեորեմներն ուժեղացնում են Մայերի թեորեմը ([3], էջ 204, թեորեմա 3.8) և տարածում են այն հորիցիկլային ուղիների վրա։

A. N. AJRAPETIAN, V. I. GAVRILOV. *Generalizations of a theorem of Meier, concerning the boundary behaviour of meromorphic functions* (summary)

The paper deals with an application on the Collingwood theorem ([2], p. 379, p. 395 or [3], p. 108, theorem 4.8) and properties of $P^{(p)}$-sequences [4] to the study of horycicle behaviour of meromorphic functions in the unit disc. Two theorems are proved that generalise the Meier theorem ([3], p. 204, theorem 3.8) and extend it on the horycicle paths.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. M. Anderson, J. Clunie, Ch. Pommerenke.* On Bloch functions and normal functions, J. reine and angew. Math., 270, 1974, 12—37.
2. *E. F. Collingwood.* On sets of maximum indetermination of anelytic functions, Math. Z., 67, № 4, 1957, 377—396.
3. *Э. Коллингвуд, А. Ловатер.* Теория предельных множеств, М., Изд. „Мир", 1971.
4. *В. И. Гаврилов.* Мероморфные в единичном круге функции с заданным ростом сферической производной, Матем. сб., 71 (113), № 3, 1966, 385—404.
5. *В. И. Гаврилов.* О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными, Матем. сб., 67 (109), № 3, 1965, 408—427.
6. *В. И. Гаврилов.* Поведение вдоль хорд мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 216, № 1, 1974, 21—23.