ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XI, № 5, 1976 Математика

Л. Х. МЕГРАБЯН

РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА N_α

Настоящая статья является продолжением работ [4, 5, 6], в которых рассматривался вопрос реализуемости функций классов М. М. Джрбашяна N_α $(-1<\alpha<\infty)$, D_α $(0<\alpha<\infty)$ при α целом. Реализовать функцию $f(z)$ означает построить линейный узел с передаточной функцией $f(z)$.

Реализуемость функций класса $N\equiv N_0$ Неванлинны была доказана в [4]. В работах [5, 6] приводились строения линейных узлов с передаточными функциями классов N_p, D_p $(p=1, 2,\cdots)$. В данной работе приводятся реализации функций классов N_α $(-1<\alpha<\infty)$, D_α $0<\alpha<\infty)$ при не целом α.

В § 1 формулируется ряд понятий и утверждений из теории линейных систем и теории функций классов N_α, D_α.

В § 2 приводятся реализации функций класса N_α $(-1<\alpha<\infty)$.

В § 3 строятся узлы, реализующие функции класса D_α $(0<\alpha<\infty)$.

§ 1. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

1. Пусть имеем пару гильбертовых пространств H (внутреннее), E (внешнее) $(\dim E=1)$, линейный оператор T $(D(T)\subset H;\ T: D(T)\to\to H)$ элементы p, $q\in H$ $(zI-T)^{-1}q\in H)$, k — комплексное число. Совокупность

$$L=\begin{pmatrix} T & q \\ p & k\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

называется линейным узлом*.

Функция

$$S(z)=k+((zI-T)^{-1}q,\ p)_H \tag{1.2}$$

называется передаточной функцией открытой системы F

$$R=(zI-T)^{-1}q,$$

$$S=k+((zI-T)^{-1}q,\ p)_H.$$

Если $L_n=\begin{pmatrix} T_n & q_n \\ p_n & k_n\end{pmatrix}$ $(n=1, 2)$ — узлы с внутренними пространствами

* В отличие от узлов, рассматриваемых в работе [5], оператор T является произвольным и не связан с элементами p, q, k дополнительными соотношениями.

H_n $(n=1,\ 2)$ и внешним пространством E, то узел $L=\begin{pmatrix} T & q \\ p & k \end{pmatrix}$, задаваемый равенствами

$$\begin{gathered} H = H_1 + H_2, \\ Tf = T_1 f_1 + T_2 f_2 + (f_1,\ p_1)\ q_2\ \ (f = f_1 + f_2) \\ q = q_1 + q_2 k_1,\ p = k_2 p_1 + p_2,\ k = k_1 k_2 \end{gathered} \tag{1.3}$$

называется сцеплением узлов L_1, L_2 $(L = L_1 \vee L_2)$.

Рассмотрим специальный вид ([4, 6]) линейных узлов. Пусть

$$H \equiv H(x_1,\ x_2) = L_2(F;\ x_1,\ x_2) \tag{1.4}$$

— пространство векторнозначных функций $f(x)$ $(x_1 < x < x_2)$ со значениями в заданном пространстве F и со скалярным произведением

$$(f,\ g)_H = \int\limits_{x_1}^{x_2} (f(x),\ g(x))_F\, dx. \tag{1.5}$$

Строится семейство узлов $L \equiv L(x_1,\ x_2)$

$$\begin{gathered} (Tf)(x) = Q_1(x)(Bf)(x) + Q_0(x) \int\limits_{x_1}^{x} e^{\beta(x-t)} (f,\ p_0)_F\, q_0 dt, \\ q = q_0 Q_0(x)\ e^{\beta(x-x_1)}, \\ p = p_0\ e^{\beta(x_2 - x)}, \\ k = e^{\beta(x_2 - x_1)}, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где B — линейный оператор в F; $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ $(x_1 < x < x_2)$ — комплекснозначные функции; p_0, q_0 (каналовые элементы) $\in H$, причем $(zI - Q_1(x)\ B)^{-1}\ q_0 \in F$. Тогда передаточная функция узла (1.6) будет иметь вид

$$S(z) = \exp\left\{\beta\ (x_2 - x_1) + \int\limits_{x_1}^{x_2} ((zI - Q_1(x)\ B)^{-1}\ q_0,\ p_0)_F\ Q_0(x)\ dx\right\}. \tag{1.7}$$

2. М. М. Джрбашяном были открыты новые классы D_α $(0 < \alpha < \infty)$, а позже — классы N_α $(-1 < \alpha < \infty)$ мероморфных в круге $|z| < 1$ функций, которые, по существу, являются сколь угодно широкими ([2, 3]). В частном случае при $\alpha = 0$ класс N_0 совпадает с классом N Неванлинны. Приведем некоторые результаты из этих работ, на которые мы будем существенно опираться.

Пусть

$$U_\alpha(z;\ \zeta) = \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (1-r^2)^{\alpha-1}\ \frac{\log\left|1 - \dfrac{re^{i\theta}}{\zeta}\right|}{(1 - zr\ e^{-i\theta})^{\alpha+1}}\ r dr d\theta. \tag{1.8}$$

Теорема А (М. М. Джрбашян [2]). Если функция $F(z)$ принадлежит классу D_α, то она представима в следующем виде:

$$F(z)=cz^\lambda \frac{\pi_\alpha(z;a_\mu)}{\pi_\alpha(z;b_\nu)} \exp\left\{\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)^{\alpha-1}\frac{\log|F(re^{i\vartheta})|}{(1-zr\,e^{-i\vartheta})^{\alpha+1}}\,rdrd\vartheta\right\}, \tag{1.9}$$

где c — константа, λ — целое число, $\{a_\mu\}$, $\{b_\nu\}$ ($\mu, \nu=1,2,\cdots$)—отличные от $z=0$ нули и полюсы $F(z)$, а

$$\pi_\alpha(z;\; z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\{-U_\alpha(z,z_k)\} \tag{1.10}$$

—аналитическая в круге $|z|<1$ функция, обращающаяся в нуль в точках множества $\{z_k\}_1^\infty$.

Теорема В (М. М. Джрбашян [3]). Класс N_α $(-1<\alpha<\infty)$ совпадает с множеством функций, допускающих представление в круге $|z|<1$

$$F(z)=cz^\lambda\frac{B_\alpha(z;a_\mu)}{B_\alpha(z;b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma(1+\alpha)\left[\frac{2}{(1-ze^{-i\vartheta})^{\alpha+1}}-1\right]d\psi(\vartheta)\right\}, \tag{1.11}$$

где

$$B_\alpha(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left\{-\int_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[z_k^{-n}\int_0^{|z_k|}(1-x)^\alpha x^{n-1}dx-\bar z_k^{\,n}\int_{|z_k|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-n-1}dx\right]z^n\right\} \tag{1.12}$$

— сходящееся произведение типа Бляшке, $\psi(\vartheta)$ — вещественная функция ограниченного изменения на $[0, 2\pi]$, c — комплексное число, λ — целое число.

§ 2. Реализация функций класса N_α $(-1<\alpha<\infty)$

1. Задача реализации для классов N_α, D_α в случае, когда $\alpha=0$ 1, 2,$\cdots$, была решена в работах [4, 5, 6]. В данной статье мы будем предполагать, что α не является целым числом.

Из теоремы В следует, что любая функция $F(z)$ класса N_α представима в виде

$$F(z)=\prod_{l=1}^{4}f_l(z), \tag{2.1}$$

где

$$f_1(z) \equiv B_\alpha(z;\ z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\alpha(z;\ z_k), \tag{2.2}$$

а

$$A_\alpha(z;\zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\left\{ -\int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(1+k)} \left[\zeta^{-k} \int_{0}^{|\zeta|} (1-x)^\alpha x^{k-1}\, dx - \right.$$

$$\left. \left. - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{1} (1-x)^\alpha x^{-k-1}\, dx \right] z^k \right\}, \tag{2.3}$$

$$f_2(z) = \exp\left\{ \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{(1 - z e^{-i\theta})^{\alpha+1}} - 1 \right] d\psi(\theta) \right\}, \tag{2.4}$$

$\psi(\theta)$ — функция ограниченного изменения на $[0, 2\pi]$,

$$f_3(z) = \frac{1}{B_\alpha(z;\ z_k)}, \tag{2.5}$$

$$f_4(z) = c \cdot z^\lambda \quad (\lambda \text{ — целое число}). \tag{2.6}$$

Вначале мы рассмотрим случай $\alpha > 0$.

2. Проведем разрез плоскости z вдоль луча r $(r \geqslant 1)$ и рассмотрим в этой области ту однозначную ветвь функции

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^{\alpha_0}} \quad (0 < \alpha_0 < 1), \tag{2.7}$$

которая при $z = 0$ принимает значение $e^{-i\pi\alpha_0}$.

Обозначим ее через $f_0(z)$. Имеет место

Лемма 1. *Функция $f_0(z)$ имеет следующее интегральное представление*:

$$f_0(z) = \frac{1 - \exp(-2\pi\alpha_0 i)}{2\pi i} \int_1^{\infty} \frac{1}{(t-1)^{\alpha_0}} \frac{dt}{t - z}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $D_{R,\varepsilon}$ — внутренность круга $|z| < R$ $(R > 1)$ без множества $\Delta = \{z:\ |z| \leqslant R,\ \mathrm{Re}\, z \geqslant 1 - \varepsilon,\ |\mathrm{Im}\, z| \leqslant \varepsilon\}$, где ε — произвольное число $(\varepsilon > 0)$. Обозначим через $\Gamma_{R,\varepsilon}$ границу области $D_{R,\varepsilon}$, Γ_R — границу круга $|z| < R$ без дуги $\smile AB$, где $A = (\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}, \varepsilon)$, $B = (\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}, -\varepsilon)$, $\Gamma^*_{R,\varepsilon}$ — границу множества Δ без дуги $\smile AB$. Тогда $f_0(z)$ представима интегралом Коши

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{f_0(t)}{t-z} dt$$

или

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f_0(t)}{t-z}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\circ}{\Gamma}_{R,\varepsilon}} \frac{f_0(t)}{t-z}\, dt, \tag{2.9}$$

где во втором интеграле обход интегрирования берется в отрицательном направлении.

Очевидно при $R \to \infty$

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{f_0(t)}{t-z} dt \to 0. \tag{2.10}$$

Далее, ε можно взять настолько малым, что при $t \in \{1-\varepsilon+ir\colon |r|<\varepsilon\}$

$$|t-z|^{-1} < c_0 \quad (0 < c_0 < \infty,\ c_0(\varepsilon) = \mathrm{const}).$$

Тогда, при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{1-\varepsilon-i\varepsilon}^{1-\varepsilon+i\varepsilon} \frac{f_0(t)}{t-z}\, dt \to 0.$$

Легко заметить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{R}^{1-\varepsilon} \frac{f_0(t-i\varepsilon)}{t-i\varepsilon-z}\, dt = -\exp(-2\pi\alpha_0 i) \int\limits_{1}^{R} \frac{f_0(t)}{t-z}\, dt, \tag{2.11}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon-\varepsilon}^{R} \frac{f_0(t+i\varepsilon)}{t+i\varepsilon-z}\, dt = \int\limits_{1}^{R} \frac{f_0(t)}{t-z}\, dt. \tag{2.12}$$

Теперь, устремив в (2.11), (2.12) R к бесконечности, и учитывая (2.9), (2.10), получим лемму.

3. Реализуем функцию $B_\alpha(z; z_k)$ $(0 < \alpha < \infty)$ (2.2).

3.1. Лемма 2. *Функция* $A_\alpha(z; \zeta)$ $(|z| < 1,\ |\zeta| < 1,\ (0 < \alpha < \infty)$ *представима в виде*

$$A_\alpha(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1-\bar\zeta z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp\left\{ \sum_{k=0}^{p} \left[\frac{a_k}{(|\zeta|-\bar\zeta z)^{k+\alpha_0}} + b_k \right] - \right.$$

$$- \int\limits_{|\zeta|}^{1} \left[\frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\varphi_\alpha^{(p+1)}(x)}{(x-\bar\zeta z)^{\alpha_0}} + \frac{1}{x-\bar\zeta z} + \frac{1}{x(1-x)^{1-\alpha_0}} \right] dx -$$

$$\left. - \int\limits_{1}^{|\zeta|^{-1}} \left[\frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(x-1)^{\alpha_0-1}}{(x-\zeta^{-1}z)^{\alpha}} - \frac{1}{x-\zeta^{-1}z} + \frac{1}{x} \right] dx \right\}, \tag{2.13}$$

где

$$a_k = -\frac{\Gamma(k+\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\varphi_\alpha^{(p-k)}(|\zeta|) - \varphi_\alpha^{(p-k)}(|\zeta|)^{-1}|\zeta|^{2(k+\alpha_0)}\right],$$

$$b_k = -\frac{(1-|\zeta|)^{k+\alpha_0}}{k+\alpha_0}, \tag{2.14}$$

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha(1-x)^\alpha, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-1)^\alpha, & \text{при } x \geqslant 1, \end{cases}$$

$$p = [\alpha],\ \alpha_0 = \alpha - p\ (0 < \alpha_0 < 1).$$

Доказательство. Поступая так же, как и в [6] получим, что имеет место соотношение

$$A_\alpha(z;\zeta) = \frac{\zeta - z}{1-\bar\zeta z}\frac{|\zeta|}{\zeta}\exp\{-\omega_\alpha(z;\zeta)\}, \tag{2.15}$$

где

$$\omega_\alpha(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{1}\left\{\left(\frac{x}{x-\bar\zeta z}\right)^{\alpha+1} + \left(\frac{\zeta}{\zeta - xz}\right)^{\alpha+1} - 1\right\}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx +$$

$$+\log\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}\frac{|\zeta|}{\zeta} \tag{2.16}$$

— аналитическая функция во всей плоскости с разрезом вдоль отрезка $[re^{i\arg\zeta},\ 1 \leqslant r \leqslant |\zeta|^{-1}]$*.

Введем обозначения

$$J_{\alpha,1}(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{1}\frac{x^\alpha(1-x)^\alpha}{(x-\bar\zeta z)^{\alpha+1}}\,dx - \log\frac{1-\bar\zeta z}{|\zeta| - \bar\zeta z},$$

$$J_{\alpha,2}(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{1}\frac{x^{-1}(1-x)^\alpha\zeta^{\alpha+1}}{(\zeta - xz)^{\alpha+1}}\,dx + \log\frac{\zeta - z}{\zeta - |\zeta| z},$$

$$J_{\alpha,3}(z;\zeta) = -\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx.$$

Учитывая (2.16), можем записать

$$\omega_\alpha(z;\zeta) = \sum_{j=1}^{3} J_{\alpha,j}(z;\zeta). \tag{2.17}$$

Пусть $p = [\alpha]$, $\alpha_0 = \alpha - p$ $(0 < \alpha_0 < 1)$. Произведя интегрирование по частям, $J_{\alpha,1}(z;\zeta)$ можно привести к виду

---

* Интеграл в (2.16) понимается в смысле главного значения Коши.

$$J_{\alpha,1}(z;\zeta)=\sum_{k=0}^{p}\frac{\Gamma(k+\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\varphi_\alpha^{(p-k)}(|\zeta|)}{(|\zeta|-\bar{\zeta}z)^{k+\alpha_0}}+\frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\varphi^{(p+1)}(x)}{(x-\bar{\zeta}z)^{\alpha_0}}\,dx-$$

$$-\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{|\zeta|-\bar{\zeta}z}. \qquad (2.18)$$

Делая замену переменных в $J_{\alpha,2}(z;\zeta)$ и проинтегрировав по частям $p+1$ раз, получим

$$J_{\alpha,2}(z;\zeta)=-\sum_{k=0}^{p}\frac{\Gamma(k+\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\varphi_\alpha^{(p-k)}(|\zeta|^{-1})}{(|\zeta|^{-1}\zeta^{-1}z)^{k+\alpha_0}}+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_{1}^{|\zeta|^{-1}}\frac{\varphi_\alpha^{(p+1)}(x)\,dx}{(x-\zeta^{-1}z)^{\alpha_0}}+\log\frac{\zeta-z}{\zeta-|\zeta|z}, \qquad (2.19)$$

$$J_{\alpha,3}(z;\zeta)=\sum_{k=0}^{p}\frac{(1-|\zeta|)^{k+\alpha_0}}{k+\alpha_0}-\int\limits_{1}^{|\zeta|^{-1}}\frac{\varphi_\alpha^{(p+1)}(x)}{x^{\alpha_0}}\,dx. \qquad (2.20)$$

Записывая логарифмы в (2.18), (2.19) в виде интеграла типа Коши по соответствующим отрезкам, учитывая (2.15), (2.17), после некоторых преобразований получим лемму.

3.2. Реализуем функцию

$$g_n(z)=\exp\left\{\frac{a_n}{|\zeta|-\bar{\zeta}z)^{n+\alpha_0}}+b_n\right\}\ (0<\alpha_0<1), \qquad (2.21)$$

где a_n, b_n определяются из (2.14).

Пусть $H_n=L_2(F_n;\ x_1,\ x_2)$ — пространство векторнозначных функций $f(x)$ $(x_1<x<x_2)$ со значениями в пространстве

$$F_n=L_2(1,\ \infty)\dotplus L_2(1,\ \infty)\dotplus\cdots\dotplus L_2(1,\ \infty), \qquad (2.22)$$

где $L_2(1,\ \infty)$ повторяется $n+1$ раз.

Положим $\beta=-1$, $x_1=0$. Так как при $z\to\infty$ $g_n(z)\to b_n$, то из (1.7) следует, что надо положить $x_2=-b_n$.

Рассмотрим оператор B_n, задаваемый в пространстве F_n равенством

$$(B_nf)(t)=\tilde{B}_n(t)f(t)\ (1<t<\infty),$$

где

$$\tilde{B}_n(t)=\begin{vmatrix} \frac{|\zeta|}{\zeta} & \rho_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{|\zeta|}{\zeta} & \rho_2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{|\zeta|}{\zeta} & \rho_n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{|\zeta|}{\zeta}t \end{vmatrix}. \qquad (2.23)$$

Очевидно B_n — неограниченный оператор в F_n с плотной областью определения. Пусть

$$Q_0(x) \equiv Q_1(x) \equiv 1, \ \prod_{k=1}^{n} \rho_k = \frac{1-\exp(-2\pi\alpha_0 i)}{2\pi i} \, \frac{(-1)^{n+\alpha_0} |\zeta|^{1-\alpha_0} a_n}{b_n \, \overline{\zeta}^{n+1}}, \tag{2.24}$$

тогда резольвентный оператор $R_z(Q_1(x) B_n)$ запишется в виде

$$R_z(Q_1(x) B_n) = \frac{\overline{\zeta}^{n+1}}{(|\zeta| - \overline{\zeta} z)^n} \, \frac{(-1)^{n+1}}{|\zeta| t - \overline{\zeta} z} \, C_n, \tag{2.25}$$

где C_n — треугольная матрица $[c_{ik}]$ $(i, k = 1, 2, \cdots, n+1)$, причем

$$c_{1\, n+1} = \prod_{k=1}^{n} \rho_k.$$

Положим

$$q_n^0 = \left(0, 0, \cdots, (t-1)^{-\frac{\alpha_0}{2}}\right), \tag{2.26}$$

$$p_n^0 = \left((t-1)^{-\frac{\alpha_0}{2}}, 0, \cdots, 0, 0\right).$$

Легко заметить, что элементы p_n^0, q_n^0 не принадлежат пространству F_n. Покажем, что они являются его обобщенными элементами (в смысле Березанского). Для этого рассмотрим множество F_n^+ элементов $f \in F_n$ таких, что элемент

$$g_f(t) = \begin{cases} \sqrt{t-1}\, f(t), & \text{при } t > 2 \\ f(t), & \text{при } 1 < t \leq 2 \end{cases} \tag{2.27}$$

принадлежит пространству F_n. Очевидно F_n^+ плотно в F_n. F_n^+ является, в свою очередь, гильбертовым пространством относительно метрики

$$\|f\|_+ = \sum_{l=1}^{n+1} \int_1^{\infty} |g_l(t)|^2 \, dt, \tag{2.28}$$

где

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}), \ g_l(t) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{t-1}\, f_l(t), & \text{при } t > 2 \\ f_l(t), & \text{при } 1 < t \leq 2 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n+1).$$

Сопряженным к пространству F_n^+ является гильбертово пространство F_n^- с метрикой

$$\|f^*\|_- = \sum_{l=1}^{n+1} \int_1^{\infty} g_l^*(t)|^2 \, dt, \tag{2.29}$$

где

$$f^{\bullet}=(f_1^{\bullet}, f_2^{\bullet}, \cdots, f_{n+1}^{\bullet}),\quad g_i^{\bullet}(t)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{t-1}}f_i^{\bullet}(t), \text{ при } t\geqslant 2\\ f_i^{\bullet}(t), \text{ при } 1<t\leqslant 2.\end{cases}\qquad (i=1, 2, \cdots, n+1)$$

Из (2.28), (2.29) следует, что

$$\|f\|_-\leqslant\|f\|\leqslant\|f\|_+. \tag{2.30}$$

Значит

$$F_n^+\subset F_n\subset F_n^-.$$

Пространства F_n^+, F_n^- называются, соответственно, пространствами основных и обобщенных элементов ([1, 7]). Нетрудно заметить, что p_n^0, $q_n^0\in F_n^-$, т. е. являются обобщенными элементами пространства F_n.

Из (2.25), (2.26) имеем

$$R_z\,(Q_1(x)\,B_n)\,q_n^0\in F_n^-,$$

Подставляя выражения (2.23)—(2.26) в формулу (1.7), получим*

$$S(z)=\exp\left\{b_n+\int\limits_0^{-b_n}dx\,\frac{(-1)^{1+\alpha_0}|\zeta|^{1-\alpha_0}a_n}{b_n(|\zeta|-\bar\zeta z)^n}\,\frac{1-\exp(-2\pi\alpha_0 i)}{2\pi i}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{(t-1)^{\alpha_0}}\,\frac{dt}{|\zeta|\,t-\bar\zeta z}\right\}.$$

Применяя лемму 1, имеем

$$S(z)=\exp\left\{\frac{a_n}{(|\zeta|-\bar\zeta z)^{n+\alpha_0}}+b_n\right\}.$$

Итак, нами доказана

Лемма 3. *Пусть*

$$H_n=L_2(F_n;\ 0,\ -b_n),$$

$$F_n=L_2(1,\ \infty)\dotplus L_2(1,\ \infty)\dotplus\cdots\dotplus L_2(1,\ \infty)$$

($L_2(1, \infty)$ повторяется $n+1$ раз). Тогда передаточная функция узла A_n

$$(T_nf)(x)=(B_nf)(x)+\int\limits_0^{x}e^{y-x}\,(f,\ p_n^0)_{F_n}\,q_n^0\,dy,$$

---

* Хотя $R_z\,(Q_1(x)\,B_n)\,q_n^0$, $p_n^0\subset F_n^-$, но $(R_z\,(Q_1(x)\,B_n)\,q_n^0,\ p_n^0)_{F_n}$ существует.

$$q_n = \overset{0}{q}_n\, e^{-x},\ p_n = \overset{0}{p}_n\, e^{x+b_n},\ k_n = e^{b_n}, \tag{2.31}$$

где B_n, $\overset{0}{p}_n$, $\overset{0}{q}_n$ *определяются по формулам* (2.23), (2.24), (2.26), *является*

$$g_n(z) = \exp\left\{\frac{a_n}{(|\zeta| - \overline{\zeta} z)^{n+\alpha_0}} + b_n\right\},$$

причем каналовые элементы $\overset{0}{p}_n, \overset{0}{q}_n$ *являются обобщенными элементами пространства* F_n.

3.3. Пусть

$$H = L_2(F;\ |\zeta|,\ 1),\ F = C + L_2(1,\ \infty) \tag{2.32}$$

(C — комплексная плоскость). Определим оператор B в пространстве F по формуле

$$(Bf)(t) = \overline{B}(t)\, f(t), \tag{2.33}$$

где

$$\overline{B}(t) = \frac{1}{\overline{\zeta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение фиксированные элементы

$$q_0(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{-\overline{\zeta}}},\ \sqrt{\frac{a(x)}{(t-1)^{\alpha_0}}}\right), \tag{2.34}$$

$$p_0(x) = \overline{q_0(x)} \quad (|\zeta| < x < 1)$$

пространства H. Точнее, элементы $p_0(x)$, $q_0(x)$ являются обобщенными элементами (в смысле Березанского) пространства H. Положим

$$Q_0(x) \equiv 1;\ Q_1(x) = x;\ a(x) = \frac{1 - \exp(-2\pi\, \alpha_0\, i)}{2\pi i}\, \frac{(-1)^{\alpha_0}\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \times$$

$$\times \frac{\varphi^{(p+1)}(x)\, x^{1-\alpha_0}}{\overline{\zeta}}, \tag{2.35}$$

где $\varphi(x)$ определяется из выражений (2.14).

Тогда, применяя лемму 1, учитывая вышесказанное относительно обобщенных элементов, получим

$$((zI - xB)^{-1} q_0(x),\ p_0(x))_F = \frac{1}{x - \overline{\zeta} z} - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)}\, \frac{\varphi^{(p+1)}(x)}{(x - \overline{\zeta} z)^{\alpha_0}}.$$

Тогда, положив

$$\beta = \frac{1}{1 - |\zeta|} \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1-\alpha_0} x} \quad (0 < \alpha_0 < 1) \tag{2.36}$$

и, учитывая (2.32)—(2.35), мы по формуле (1.7) найдем $S(z)$. А именно, нами доказана следующая

Лемма 4. *Функция*

$$h_2(z)=\exp\left\{\int\limits_{|\zeta|}^{1}\left[\frac{-\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0+1)}\frac{\varphi^{(p+1)}(x)}{(x-\overline{\zeta}z)^{\alpha_0}}+\frac{1}{x-\overline{\zeta}z}\right]dx+\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{dx}{(1-x)^{1-\alpha_0}x}\right\} \tag{2.37}$$

реализуется узлом L^2

$$H=L_2(F;\ |\zeta|,\ 1),\ F=C+L_2(1,\ \infty),$$

$$(Tf)(x)=x(Bf)(x)+\int\limits_{|\zeta|}^{x}\exp[\beta(x-y)](f,\ p_0(y))_F\,q_0(y)\,dy,$$

$$q=q_0(x)\exp[\beta(x-|\zeta|)], \tag{2.38}$$

$$p=p_0(x)\exp[\beta(1-x)],$$

$$k=\exp[\beta(1-|\zeta|],$$

где B, $p_0(x)$, $q_0(x)$, β определяются из формул (2.33) — (2.36), а $p_0(x)$, $q_0(x)$ являются обобщенными фиксированными элементами пространства H.

Без существенных изменений доказывается

Лемма 5. *Функция*

$$h_3(z)=\exp\left\{-\int\limits_{1}^{|\zeta|^{-1}}\left[\frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{(x-1)^{\alpha_0-1}}{(x-\zeta^{-1}z)^{\alpha_0}}-\frac{1}{x-\zeta^{-1}z}\right]dx-\log|\zeta|\right. \tag{2.39}$$

реализуется узлом L^3

$$H=L_2(F;\ 1,\ |\zeta|^{-1}),\ F=C+L_2(1,\ \infty),$$

$$(Tf)(x)=x(Bf)(x)+\int\limits_{1}^{x}\exp[\beta(x-y)](f,\ p_0(y))_F\,q_0(y)\,dy,$$

$$q=q_0(x)\exp[\beta(x-1)],\quad (1<x<|\zeta|^{-1}) \tag{2.40}$$

$$p=p_0(x)\exp[\beta(|\zeta|^{-1}-x)],$$

$$k=|\zeta|,$$

где B — оператор в F, задаваемый равенством

$$(Bf)(t)=\tilde{B}(t)f(t),$$

$$\tilde{B}(t)=\zeta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & t\end{pmatrix},$$

$$q_0(x)=\left(\sqrt{\zeta},\ \frac{\sqrt{b(x)}}{\sqrt{(t-1)^{\alpha_0}}}\right),\ p_0(x)=\overline{q_0(x)}\ .$$

$$\beta=-\frac{\log|\zeta|}{|\zeta|^{-1}-1},\quad b(x)=\frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)}\,\frac{1-\exp(-2\pi\alpha_0 i)}{2\pi i}(-1)^{\alpha_0}\zeta\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha_0-1}.$$

3.4. Вернемся к линейным узлам A_n (2.31) ($n=0, 1, 2,\cdots, p$).

Лемма 6. *Пусть узел $\overset{*}{A_1}$ является сцеплением узлов A_0, A_1. Тогда передаточной функцией узла A_1^* является произведение передаточных функций узлов A_0, A_1.*

Доказательство. Узел A_1^* по формуле (1.3) запишется в виде

$$H^*=H_0\dot{+}H_1,$$

$$T^*f=T_0f_0+T_1f_1+(f_0,\,p_0)_{H_0}q_1,$$

$$q^*=q_0+q_1k_0,\quad p^*=p_0k_1+p_1,\quad k^*=k_0k_1, \tag{2.41}$$

где T_i, p_i, q_i, k_i ($i=0, 1$) определяются из формул (2.31).

Формула (1.2) дает

$$S(z)=k^*+((zI-T^*)^{-1}q^*,\ p^*)_{H^*}. \tag{2.42}$$

Допустим, что

$$f^*=(zI-T^*)^{-1}q^*\quad (f^*=f_0\dot{+}f_1), \tag{2.43}$$

тогда

$$S(z)=k_0k_1+k_1(f_0,\ p_0)_{H_0}+(f_1,\ p_1)_{H_1}. \tag{2.44}$$

Из (2.41), (2.43) следует

$$q_0=(zI-T_0)f_0,$$

$$q_1k_0=-(f_0,\ p_0)_{H_0}q_1+(zI-T_1)f_1$$

или, учитывая (2.31)

$$q_0^0=(zI-B_0)e^{x_0}f_0-\int_0^{x_0}e^y(f_0,\ p_0^0)_{F_0}q_0^0\,dy\quad (0<x_0<-b_0),$$

$$q_1^0[(f_0,\ p_0)_{H_0}+k_0]=(zI-B_1)e^{x_1}f_1-\int_0^{x_1}e^y(f_1,\ p_1^0)_{F_1}q_1^0\,dy\quad (0<x_1<-b_1).$$

Введя обозначения

$$y_i(x)=e^x(f_i,\ p_i^0),$$

$$r_i(x)=((zI-B_i)^{-1}q_i^0,\ p_i^0)_{F_i},\quad (i=0,\ 1) \tag{2.45}$$

$$u_i(x)=\frac{y_i(x)}{r_i(x)}$$

и учитывая (см. (1.2)), что

$$k_0+(f_0,\ p_0)_{H_0}=q_0(z), \tag{2.46}$$

получим

$$g_0(z)\,q_1^0=(zI-B_1)\,e^{x_1}f_1-\int\limits_0^{x_1}e^y(f_1,\,p_1^0)_{F_1}\,q_1^0\,dy. \tag{2.47}$$

Элемент q_1^0 входит в область определения оператора $(zI-B_1)^{-1}$, точнее $(zI-B_1)^{-1}q_1^0\in F_1^-$ $(q_1^0\in F_1^-)$, но $((zI-B_1)^{-1}q_1^0,\,p_1^0)_{F_1}$ существует. Поэтому, применив оператор $(zI-B_1)^{-1}$ к обеим частям выражения (2.47) и, умножив скалярно на p_1^0, получим

$$g_0(z)((zI-B_1)^{-1}\,q_1^0,\,p_1^0)_{F_1}=e^{x_1}(f_1,\,p_1^0)_{F_1}-$$
$$-\int\limits_0^{x_1}e^y(f_1,\,p_1^0)_{F_1}\,dy\cdot((zI-B_1)^{-1}\,q_1^0,\,p_1^0)_{F_1}.$$

Заметив, что

$$r_1(x_1)=((zI-B_1)^{-1}\,q_1^0,\,p_1^0)_{F_1}=\frac{b_1^{-1}\,a_1}{(|\zeta|-\overline{\zeta}\,z)^{1+\varepsilon_0}}$$

можно записать

$$g_0(z)=u_1(x_1)-\int\limits_0^{x_1}u_1(y)\,dy\;r_1(x_1)$$

или

$$y_1(x_1)=r_1(x_1)\,g_0(z)\exp[r_1(x_1)\,x_1], \tag{2.48}$$

Из (2.45), (2.48), (2.31) следует

$$(f_1p_1)_{H_1}=e^{b_1}\int\limits_0^{-b_1}e^x(f_1,\,p_1^0)_{F_1}\,dx=k_1\int\limits_0^{-b_1}y_1(x)\,dx=$$
$$=k_1\,g_0(z)\,(\exp[-b_1r_1(x_1)]-1)$$

или

$$(f_1,\,p_1)_{H_1}=g_0(z)\exp[b_1-b_1r_1(x_1)]-k_1\,g_0(z). \tag{2.49}$$

Учитывая (2.44), (2.46), (2.49), (2.21), получим

$$S(z)=g_0(z)\,g_1(z).$$

Замечание 1. Теорема о композиции узлов (лемма 6), хотя и была доказана для частного случая (для узлов A_0, A_1), применима ко всем узлам, рассматриваемым в данной работе. Действительно, не меняя метода доказательства, убедившись, что оператор $(zI-Q_1(x)\,B)^{-1}$ (обычно фигурирующий в узлах) не выводит каналовый элемент q_0 из пространства обобщенных элементов, причем существует $((zI-Q_1(x)\,B)^{-1}\,q_0,\;p_0)_F$, мы получим тот же результат.

3.6. Рассмотрим сцепление $A_2^* = A_1^* \vee A_2$ (см, (2.31)), т. е.

$$A_2^* = A_0 \vee A_1 \vee A_2.$$

На основании замечания 1 получим, что передаточной функцией узла A_2^* является функция $g_0(z)\, g_1(z)\, g_2(z)$.

Продолжая этот процесс, мы получим, что узел

$$L^1 = A_0 \vee A_1 \vee \cdots \vee A_p \tag{2.50}$$

реализует функцию

$$h_1(z) = \prod_0^p g_n(z) = \exp\left\{ \sum_0^p \left[\frac{a_n}{(|\zeta| - \bar{\zeta} z)^{\alpha + \alpha_n}} + b_n \right] \right\}. \tag{2.51}$$

Проделав последовательно то же, что и выше, можно доказать, что передаточная функция узла

$$A(\zeta) = L^0 \vee L^1 \vee L^2 \vee L^3, \tag{2.52}$$

где

$$L^0 = \begin{pmatrix} \bar{\zeta}^{-1} & |\zeta|^{-1}\sqrt{1 - |\zeta|^2} \\ \zeta^{-1}\sqrt{1 - |\zeta|^2} & |\zeta|^{-1} \end{pmatrix} \quad (|\zeta| < 1)$$

— узел, реализующий фактор Бляшке $\dfrac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \dfrac{|\zeta|}{\zeta}$ ([6]), а L^1, L^2, L^3 определяются выражениями (2.50), (2.38), (2.40), является функция $A_\alpha(z; \zeta)$ (см. (2.13), (2.37), (2.39), (2.51)).

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Существует линейный узел $A(\zeta)$ с передаточной функцией $A_\alpha(z; \zeta)$ $(0 < \alpha < \infty)$.*

Замечание 2. Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию $0 < |z_k| < 1$

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |z_k|)^{\alpha+1} < \infty,$$

тогда, как известно ([3]), произведение

$$B_\alpha(z; z_k) = \sum_{k=1}^\infty A_\alpha(z; z_k)$$

представляет собой аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию.

Пусть $A(z_k)$ является линейным узлом с передаточной функцией $A_\alpha(z, z_k)$. Тогда, сцепляя узлы $A(z_1)$, $A(z_2), \cdots, A(z_n)$, можно доказать, что узел

$$A_n(z_k) = A(z_1) \vee A(z_2) \vee \cdots \vee A(z_n)$$

реализует произведение

$$B_\alpha^n(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^{n} A_\alpha(z;\ z_k).$$

Формально продолжая этот процесс до бесконечности (т. е. устремив n к бесконечности), можно получить узел A с передаточной функцией $B_\alpha(z;\ z_k)$. Свойства операторов узла A в данной работе не исследуются.

4. Реализуем функцию $f_2(z)$ (2.4).

Функция $\psi(\vartheta)$ в определении $f_2(z)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,2\pi]$, поэтому представима в виде

$$\psi(\vartheta)=\psi_1(\vartheta)-\psi_2(\vartheta)\vartheta\in[0,2\pi],$$

где $\psi_j(\vartheta)$ $(j=1,\ 2)$ — неубывающие, ограниченные на $[0,2\pi]$ функции. Пусть $s=\psi_j(\vartheta)$, l_j — вариация $\psi_j(\vartheta)$ на $[0,2\pi]$, а $\sigma_j(s)$ — непрерывная справа, обратная к $s=\psi_j(\vartheta)$ функция, причем, если ϑ_0 — точка разрыва функции $s=\psi_j(\vartheta)$, то в интервале $\psi_j(\vartheta-0)\leqslant s\leqslant\psi_j(\vartheta_0+0)$ функция $\sigma_j(s)$ доопределяется равенством $\sigma_j(s)=\vartheta_0$.

Тогда

$$f_2(z)=g_1(z)\,g_2(z),$$

где

$$g_j(z)=\exp\left\{(-1)^{j+1}\int\limits_0^{l_j}\left[\frac{2}{(1-ze^{-i\sigma_j(s)\alpha+1}}-1\right]ds\ (j=1,\ 2).\right.$$

Реализуем $g_j(s)$. Пусть $H_j=L_2(F_{p+1};\ 0,\ l_j)$ $(p=[\alpha],\ \alpha=p+\alpha_0)$, где F_{p+1} определяется выражением (2.22) $(n=p+1)$. Введем в рассмотрение оператор B в пространстве F_{p+1}, задаваемый равенством

$$(Bf)(t)=\overline{B}(t)\,f(t),$$

где

$$\overline{B}(t)=\begin{pmatrix}1 & \rho_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \rho_2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \rho_{p+1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t\end{pmatrix}, \tag{2.53}$$

оператор B является неограниченным с плотной областью определения. В качестве каналовых элементов примем векторы

$$q_j^0=\left(0,\ 0,\cdots,\ 0,\ (t-1)^{-\frac{\alpha_0}{2}}\right);\ p_j^0=\left((t-1)^{-\frac{\alpha_0}{2}},\ 0,\cdots,\ 0,\ 0\right), \tag{2.54}$$

являющиеся обобщенными элементами пространства F_{p+1}.

Положим

$$Q_1^j(x)=\exp\left[i\sigma_j(x)\right];\ Q_0^j(x)=(-1)^{j+1+p}\exp\left[i\,(p+2)\,\sigma_j(x)\right],$$

$$\beta_j=(-1)^j;\ \rho_1\rho_2\cdots\rho_{p+1}=2\,(-1)^{1+\alpha_0}\,\frac{1-\exp(-2\pi\alpha_0 i)}{2\pi i}. \tag{2.55}$$

Тогда

$$(zI - Q_1^j(x)B)^{-1} = \frac{1}{(z - e^{i\sigma_j(x)})^{p+1}} \frac{1}{z - t e^{i\sigma_j(x)}} C, \tag{2.56}$$

где C — оператор, задаваемый верхней треугольной матрицей $[c_{ik}]_{i,k=1}^{p+2}$, причем $c_{1,p+2} = \rho_1\rho_2 \cdots \rho_{p+1}$.

Подставляя выражения (2.53)—(2.56) в (1.7), получим

$$S(z) \equiv g_j(z).$$

Итак, узел $L(g_j)$

$$H = (F_{p+1};\ 0,\ L_l),\ F_{p+1} = L_2(1, \infty) \dotplus L_2(1, \infty) \dotplus \cdots$$
$$\cdots \dotplus L_2(1, \infty)\ (p+2\text{-раза}),$$

$$(T_j f)(x) = e^{i\sigma_j(x)}(Bf)(x) + (-1)^{j+1} e^{i\sigma_j(x)(p+2)} \int_0^x e^{\beta_j(x-y)} (f, p_j^0)\, q_j^0\, dy,$$

$$\begin{aligned} g_j &= (-1)^{j+1} q_j^0 e^{i(p+2)\sigma_j(x) + \beta_j x}, \\ p_j &= p_j^0 e^{\beta_j(l_j - x)}, \\ k_j &= e^{\beta_j l_j} \end{aligned} \tag{2.57}$$

реализует функцию $g_j(z)$, где B, p_j^0, q_j^0, β_j определяются выражениями (2.53)—(2.55).

Рассмотрим узел

$$L = L(g_1) \vee L(g_2). \tag{2.58}$$

Применяя теорему о сцеплении узлов*, получим, что передаточная функция узла L является $f_2(z)$ (2.4).

Имеет место

Теорема 2. *Пусть аналитическая в $|z| < 1$ функция $f(z)$ принадлежит классу N_α $(0 < \alpha < \infty)$ и $f(z) \neq 0$ $(|z| < 1)$. Тогда существует линейный узел L с передаточной функцией $f(z)$.*

Доказательство. При α целом теорема была доказана в [6]. Пусть α—не целое. Известно ([3]), что функция, удовлетворяющая условиям теоремы, представима в виде (2.4). Тогда узел (2.58) реализует $f(z)$ и т. д.

5. Реализация функций $f_3(z)$, $f_4(z)$.

Имея реализацию функции $B_\alpha(z, z_k)$, построение узла с передаточной функцией

$$f_3(z) = \frac{1}{B_\alpha(z;\ z_k')} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{B(z;\ z_k')} \exp \sum_{j=1}^{3} J_{\alpha,j}(z;\ z_k')$$

$(B(z;\ z_k')$ — фактор Бляшке)

* См. замечание 1 леммы 6.

(см. (2.15), (2.18)—(2.20)) не представляет трудности и мы здесь не будем приводить его.

Как было показано [6], для реализации функции $f_4(z) = cz^\lambda$ (c—константа, λ — целое число) через передаточную функцию $S(z)$, необходимо потребовать условие $\lambda \leqslant 0$.

Тогда узел

$$H = C \dotplus C \dotplus \cdots \dotplus C$$

$(-\lambda)$-мерное комплексное пространство

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_{-\lambda}) = (0, x_1, \cdots, x_{-\lambda-1}),$$

$$q = (c, 0, \cdots, 0),$$

$$p = (0, 0, \cdots, 1),$$

$$k = 0$$

реализует функцию $f_4(z)$.

В случае $\lambda > 0$ функцию $f_4(z)$ можно реализовать через передаточную функцию $W(z) = S\left(\frac{1}{z}\right)$([4, 6]).

Теорема 3. *Пусть* $F(z) \in N_\alpha$ ($F(0) \neq 0$, $-1 < \alpha < \infty$). *Тогда можно построить узел с передаточной функцией* $F(z)$.

Доказательство. При α целом теорема была доказана в работах [4, 5, 6]. Пусть α—не целое и $0 < \alpha < \infty$. На основании теорем 1,2 после сцепления узлов, реализующих функции $f_i(z)$ (i=1, 2, 3, 4) (см. (2.1)—(2.6)), получим узел, реализующий функцию $F(z)$.

Пусть $-1 < \alpha < 0$. Обозначим через $\gamma = 1 + \alpha$ $(0 < \gamma < 1)$. Поступая так же как и при доказательстве лемм 2—4, теорем 1, 2, легко получить узлы, реализующие функции

$$A_\gamma(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp\left\{-\int\limits_{|\zeta|}^{1}\left[\left(\frac{x}{x - \bar{\zeta} z}\right)^\gamma + \left(\frac{\zeta}{\zeta - xz}\right)^\gamma - 1\right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(1-x)^{\gamma-1}}{x} dx - \log \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \frac{|\zeta|}{\zeta}\right\},$$

$$h(z) = \exp\left\{\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{(1 - e^{-i\theta} z)^\gamma} - 1\right] d\psi(\theta)\right\},$$

а значит можно реализовать и функцию $F(z) \in N_\alpha$ $(-1 < \alpha < 0)$*.

§ 3. Реализация функций класса D_α $(0 < \alpha < \infty)$

1. Из теоремы А вытекает следующее представление функции $G(z) \in D_\alpha$:

* См. замечания 1, 2.

$$G(z)=\prod_{k=1}^{4} g_k(z), \tag{3.1}$$

где

$$g_1(z)=\pi_\alpha^*(z;\,z_k)=\prod_{k=1}^{\infty} M_\alpha(z;\,z_k), \tag{3.2}$$

$$M_\alpha(z;\,\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-U_\alpha(z;\,\zeta)+\frac{1}{2}U_\alpha(0;\,\zeta)\right\}, \tag{3.3}$$

$$g_2(z)=\frac{1}{\pi_\alpha^*(z;\,z_k)}, \tag{3.4}$$

$$g_3(z)=c\,z^\lambda \ (c \text{ — константа, } \lambda \text{ — целое число}), \tag{3.5}$$

$$g_4(z)=\exp\left\{\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)^{\alpha-1}\frac{\log|F(re^{i\vartheta})|}{(1-re^{-i\vartheta}z)^{\alpha+1}}\,rdrd\vartheta\right\}. \tag{3.6}$$

2. Пусть α — не целое, $p=[\alpha]$, $\alpha=p+\alpha_0$. Пользуясь методом, примененным при доказательстве леммы 2, можно доказать, что имеет место

Лемма 7. *Функция $M_\alpha(z;\,\zeta)$ представима в виде*

$$M_\alpha(z;\,\zeta)=\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}\frac{|\zeta|}{\zeta}\exp\left\{\sum_{k=0}^{p}\frac{(1-|\zeta|^2)^{k+\alpha_0}}{k+\alpha_0}\left[\frac{1}{(1-\bar\zeta z)^{k+\alpha_0}}-\frac{1}{2}\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\int_1^{|\zeta|^{-2}}\left(\frac{(x-1)^{\alpha_0-1}}{\left(x-\frac{z}{\zeta}\right)^{\alpha_0}}-\frac{1}{x-\frac{z}{\zeta}}\right)dx-\frac{1}{2}\int_1^{|\zeta|^{-2}}\frac{(x-1)^{\alpha_0-1}-x^{\alpha_0}}{x^{\alpha_0-1}}\,dx\right]\right\}. \tag{3.7}$$

Доказательства мы не приводим, заметим лишь, что необходимо пользоваться следующим представлением:

$$U_\alpha(z;\,\zeta)=\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^\alpha}{\left(1-\frac{z}{\zeta}t\right)^{\alpha+1}}\frac{dt}{t}.$$

3. Построение узлов, реализующих отдельные факторы выражения (3.1) подобны результатам предыдущего параграфа и мы их опускаем. Приведем лишь несколько лемм и теорем без доказательства.

Лемма 8. *Передаточной функцией узла*

$$H=L_2(F_{k+1};\,0,\,x_2),\ F_{k+1}=L_2(1,\,\infty)\dotplus L_2(1,\,\infty)+\cdots+L_2(1,\,\infty),$$

$$(Tf)(x)=(Bf)(x)+\int_0^x e^{-\frac{1}{2}(x-y)}(f,\,p_0)_{F_{k+1}}\,q_0\,dy,$$

$$q=q_0\,e^{-\frac{1}{2}x},$$

$$p=p_0\,e^{-\frac{1}{2}(x_2-x)},$$

$$k = e^{-\frac{1}{2} x_2},$$

где

$$q_0 = (0,\ 0, \cdots, (t-1)^{-\frac{\alpha_0}{2}}),$$

$$p_0 = ((t-1)^{-\frac{\alpha_0}{2}},\ 0, \cdots,\ 0,\ 0)$$

— обобщенные элементы пространства F_{k+1}, B *— оператор в* F_{k+1}, *задаваемый равенством*

$$(Bf)(t) = \widetilde{B}(t)\, f(t) \quad (1 < t < \infty)$$

$$\widetilde{B}(t) = \begin{pmatrix} \overline{\zeta}^{-1} & \rho_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\zeta}^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{\zeta}^{-1} & \rho_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{\zeta}^{-1} t \end{pmatrix},$$

а

$$\prod_1^k \rho_l = \frac{(-1)^{k+\alpha_0}}{\overline{\zeta}^{k+1}}\, \frac{1 - \exp(-2\pi\alpha_0 i)}{2\pi i}, \quad x_2 = \frac{(1-|\zeta|^2)^{k+\alpha_0}}{k+\alpha_0},$$

является функция

$$h_k(z) = \exp\left\{\frac{(1-|\zeta|^2)^{k+\alpha_0}}{k+\alpha_0}\left[\frac{1}{(1-\overline{\zeta} z)^{k+\alpha_0}} - \frac{1}{2}\right]\right\}.$$

Лемма 9. *Линейный узел*

$$H = L_2(F;\ 1,\ |\zeta|^{-2}),\quad F = C \dotplus L_2(1,\ \infty),$$

$$(Tf)(x) = x\,(Bf)(x) + \int_1^x e^{\beta(x-y)} (f, p_0)_F\, q_0\, dy,$$

$$q = q_0\, e^{\beta(x-1)},$$

$$p = p_0\, e^{\beta(|\zeta|^{-2} - x)},$$

$$k = e^{\beta(|\zeta|^{-2} - 1)},$$

где B *— оператор, задаваемый равенством*

$$(Bg)(t) = \widetilde{B}(t)\, g(t) \quad (t \in (1,\ \infty))$$

$$\widetilde{B}(t) = \zeta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

а

$$q_0(x)=\left(\sqrt{\zeta},\ \frac{\sqrt{b(x)}}{\sqrt{(t-1)^{\alpha_0}}}\right),\quad p_0(x)=\overline{q_0(x)}$$

— *канальные элементы*,

$$b(x)=\frac{1-\exp(-2\pi\alpha_0 i)}{2\pi i}(-1)^{1+\alpha_0}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{1-\alpha_0},$$

$$\beta=-\frac{1}{2(|\zeta|^{-2}-1)}\int\limits_1^{|\zeta|^{-2}}\frac{(x-1)^{\alpha_0-1}-x^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\,dx,$$

реализует функцию

$$g(z)=\exp\left\{\int\limits_1^{|\zeta|^{-2}}\left(\frac{(x-1)^{\alpha_0-1}}{\left(x-\frac{z}{\zeta}\right)^{\alpha_0}}-\frac{1}{x-\frac{z}{\zeta}}\right)dx-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_1^{|\zeta|^{-2}}\frac{(x-1)^{\alpha_0-1}-x^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\,dx\right\}.$$

Из лемм 8, 9, пункта 5 § 2 следует, что имеет место

Теорема 4. *Существует линейный узел, реализующий функцию*

$$F(z)=cz^{\lambda}\frac{\pi^*(z,z_k)}{\pi^*(z,z_k)}.$$

Замечание. Так как функция $f(z)\in D_\alpha$ $(0<\alpha<\infty)$ принадлежит пространству N_α [3], то, конечно, $f(z)$ можно было реализовать как элемент класса N_α (§ 2). Учитывая, что классы D_α представляют самостоятельный интерес с точки зрения теории систем с дискретным временем [4, 6], мы дали реализацию отдельных факторов представления (3.1).

В заключение выражаю глубокую признательность М. С. Лившицу за постановку задачи и внимание при выполнении работы.

Харьковский государственный университет,
Институт математики АН Арм.ССР

Поступила 29.X.1975

Լ. Խ. ՄԵՀՐԱԲՅԱՆ. N_α դասի ֆունկցիաների ռեալիզացումը *(ամփոփում)*

Հայտնի է, որ եթե $f\in N_p$ $(f\in D_p)(p=0, 1, 2,\cdots)$, *ապա գոյություն ունի գծային հանգույց, որի փոխանցման ֆունկցիան հանդիսանում է* $f(z)$: *Տվյալ աշխատանքում ապացուցվում է նմանապես թեորեմա* N_α *դասի համար ոչ ամբողջ* α*-ի դեպքում* $(-1<\alpha<\infty)$:

Բերվում է նաև D_α *դասի ֆունկցիաների ռեալիզացիան:*

L. Kh. MEHRABIAN. *Realization of functions from the class N_α*

(summary)

It is known (4, 5, 6) that if $f \in N_p$ $(f \in D_p)$ $(p = 1, 2, \cdots)$ than there exists linear knot with transmission function $f(z)$. The paper proves an analogous theorem for the class N_α for non-integer α. Some realizations of functions of the class D_α are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. М. Березанский.* Пространства с негативной нормой, УМН. 28, вып. 1, 1963.
2. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщен. Института мат, и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука", 1966.
4. *М. С. Лившиц.* Линейные дискретные системы и их связь с теорией факторизации мероморфных функций М. М. Джрбашяна, ДАН СССР, 219, № 4, 1974.
5. *М. С. Лившиц, А. А. Янцевич.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, Харьков, ХГУ, 1971.
6. *Л. Х. Меграбян.* Реализация некоторых классов мероморфных функций в теории систем с дискретным временем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., X, №, 6, 1975, 560—580.
7. *Э. Р. Цекановский.* Обобщенные расширения неограниченных операторов, ДАН СССР, 165, № 1, 1965.