

Г. А. НАЗАРЯН

НЕКОТОРЫЕ СРАВНИТЕЛЬНЫЕ СЛОЖНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫЧИСЛЕНИЙ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В статье рассматриваются вопросы реализации булевых функций (б. ф.) в универсальных и неуниверсальных алгорифмических языках [1], или, что почти равносильно, в различных нумерациях рекурсивных функций. В этой связи сравниваются возможности реализации б. ф., с одной стороны, в сравнительно „богатых“ нумерациях, допустимых нумерациях по Роджерсу [2], и, с другой стороны, в сравнительно „бедных“ нумерациях, таких, в которых для всякой рекурсивной функции с заданным номером мы можем распознать, задает ли она (в естественном смысле) какую-либо фиксированную б. ф. или нет. Нумерации, удовлетворяющие некоторому условию только что упомянутого рода, будем называть булевски разрешимыми (точное определение будет дано ниже). Булевски разрешимые нумерации будем называть регулярными, если для всякой б. ф. мы можем указать номер рекурсивной функции, которая вычисляет данную б. ф. При сравнении реализации б. ф. в универсальных и булевски разрешимых нумерациях обнаруживаются следующие два „эффекта“: „эффект сжатия объемов“ и „перекрестный эффект“. „Эффект сжатия объемов“ заключается в том, что существуют б. ф., достаточно коротко кодируемые в нумерациях первого типа и достаточно длинно—в нумерациях второго типа. „Перекрестный эффект“ заключается в том, что существуют пары б. ф., из которых первая кодируется значительно короче второй в нумерациях первого типа и значительно длиннее—в нумерациях второго типа. Мы будем изучать указанные „эффекты“ в связи с поведением сигнализирующих функций, описывающих работу алгорифмов, вычисляющих б. ф. В дальнейшем, рассматривая поведение произвольной сигнализирующей Φ в смысле Блюма [8], мы будем иногда для краткости называть ее „время вычислений“ или просто „время“ (хотя на самом деле в роли Φ может фигурировать любая сигнализирующая). Сравнивая реализацию б. ф. в разрешимой и допустимой нумерациях и говоря при этом о поведении сигнализирующих или о времени вычислений, мы будем всегда подразумевать, что эти характеристики рассматриваются по отношению к допустимой нумерации. Поведение сигнализирующих функций по отношению к разрешимой нумерации нас, как правило, интересоваться не будет. (Если с регулярной булевски разрешимой нумерацией ассоциирована некоторая сигнализирующая функция („времени“), то, как нетрудно убедиться, можно

указать общерекурсивную функцию, которая для всякого λ мажорирует „время“ вычисления всех б. ф. от λ аргументов схемами минимальной сложности, или иначе говоря, б. ф. в регулярной булевски разрешимой нумерации, так сказать, „предсказуемо вычислимы“). Мы покажем (теорема 1), что существуют конструктивные последовательности б. ф., из которых при наличии „эффекта сжатия объема“ время вычислений остается на некоторых булевых векторах достаточно большим. Вместе с тем (при некоторых ограничениях на допустимые нумерации) оказывается (теорема 2), что существуют такие конструктивные последовательности б. ф., на которых, при наличии „эффекта сжатия объема“, сложность схем в допустимой нумерации, вычисляющих б. ф. этих последовательностей и время их вычислений могут быть ограничены независимо от заданной степени „сжатия объемов“. В отношении „перекрестного эффекта“ мы опишем (теорема 3) две псевдопоследовательности* [3], [4] б. ф., для которых имеет место „перекрестный эффект“, такой, что удлинение кодов в допустимой нумерации сопровождается также существенным увеличением времени.

Основное содержание статьи относится к такому определению вычисления б. ф. в заданной нумерации, при котором каждая частично рекурсивная функция (чрф) может определять не более одной б. ф. (2-вычислимость). В заключительном разделе статьи рассматривается иное определение вычисления б. ф., в соответствии с которым фиксированная чрф может одновременно вычислять различные б. ф. разных размерностей (1-вычислимость).

1°. Всюду далее чрф есть сокращение для выражения „частично рекурсивная функция“, орф — „общерекурсивная функция“, б. ф. — „булева функция“, н. ч. — „натуральное число“. Определим н. ч. как слова в алфавите $\{0,1\}$ так, как это сделано, например, в [5]. Булевы функции и связанные с ними понятия, здесь не определяемые, будем понимать как в [6] (в частности, понятие б. ф. рассматривается как частный случай понятия н. ч.). Длину н. ч. x будем обозначать через $l(x)$. Размерность б. ф. будем указывать верхним индексом: так, если F есть б. ф. размерности n , то будем писать F^n наряду с F . Если A есть конечное множество н. ч., то через $d(A)$ будем обозначать мощность этого множества. Если M — множество б. ф., то через M_n будем обозначать множество б. ф. размерности n , принадлежащих M . Пусть α и β — какие-либо псевдофункции ([3], [4]), определенные для н. ч. и принимающие в качестве значений также н. ч. Через $\alpha(n) \rightarrow \infty$ и $\alpha(n) \leq \beta(n)$ будем обозначать соответственно суждения:

* Для читателя, незнакомого с терминологией конструктивной математики отметим, что понятия псевдопоследовательности и псевдофункции приблизительно соответствуют применяемым в классической математике понятиям последовательности и функций.

$$\forall m \exists k (n > k \supset \alpha(n) > m)$$

$$\text{и} \quad \forall m \exists d \forall n (n > d \supset \alpha(n) < (1 + 2^{-m}) \beta(n)).$$

Пусть P — одноместный предикат, допустимыми значениями переменной которого являются н. ч. Посредством $\forall_n P(n)$ будем обозначать суждение $\exists k \forall n (n > k \supset P(n))$. Через D_x будем обозначать множество, имеющее номер x в канонической нумерации конечных множеств ([2], [7]). Говорим, что чрф α 1-вычисляет б. ф. F^n , если для всех н. ч. x длины n выполняется $\alpha(x) = F^n(x)$. Говорим, что чфф α 2-вычисляет б. ф. F , если для всех н. ч. x длины n $\alpha(x) = F(x)$ и $\alpha(x) = 2$ для всех н. ч. x с длиной, отличной от n . (Заметим, что формулируемые ниже утверждения сохранили бы свою силу и при несколько более общем определении 2-вычислимости, а именно, мы могли бы определить 2-вычислимость, например, следующим образом: пусть g — какая-либо фиксированная двуместная чрф; говорим, что α 2-вычисляет F^n , если $\alpha(x) = F^n(x)$ при $l(x) = n$ и $\alpha(x) = g(n, x)$ в противном случае). Про нумерацию φ чрф говорим, что она булевы разрешима, если существует такая орф γ , что для любого н. ч. i и любой б. ф. F оказывается: $\gamma(i, F) = 0$ в том и только в том случае, когда φ_i 1-вычисляет F . В дальнейшем предполагаем, что φ -фиксированная булевы разрешимая нумерация. Для простоты изложения (при этом мы несущественно теряем в общности) будем предполагать также, что в φ 2-вычисляются, а следовательно, и 1-вычисляются все б. ф., т. е. для любой б. ф. F в φ имеется функция, вычисляющая данную б. ф.

Зафиксируем некоторую допустимую в смысле [2] нумерацию ψ . Пусть заданы меры объема s_φ и s_ψ ; для нумерации ψ зафиксируем конструктивную последовательность Φ сигнализирующих [8]. В п.п. 2 и 3 мы будем рассматривать, соответственно, свойства 2-вычислимости и 1-вычислимости. В приводимых ниже определениях под вычислимостью б. ф. будем понимать соответственно 2-вычислимость для п. 2 и 1-вычислимость для п. 3. Через $\bar{s}_\psi$ (соответственно $\bar{s}_\varphi$) будем обозначать псевдофункцию*, такую, что для любой б. ф. F и любого н. ч. c $\bar{s}_\psi(F) = c$ в том и только в том случае, когда $\bigcap \bigcap i (s_\psi(i) = c \& \psi_i \text{ вычисляет } F) \& \forall c' (c' < c \supset \bigcap \bigcap i (s_\psi(i) = c' \& \psi_i \text{ вычисляет } F))$ и, кроме того, если F не есть б. ф., то $\bar{s}_\psi(F) = c$ равносильно $c = 0$.

Пусть ξ — некоторая орф, t — н. ч., ψ — нумерация, s_ψ и Φ — соответственно мера объема и последовательность сигнализирующих, ассоциированных с ψ . Говорим, что б. ф. $F^m(\xi, t)$ — неулучшаема в (ψ, s_ψ, Φ) , если $\forall x ((s_\psi(x) < \xi(\bar{s}_\psi(F)) \& \psi_x \text{ вычисляет } F) \supset \bigcap \bigcap x (l(x) = m \& \Phi_x(x) > t))$. В дальнейшем мы будем говорить, что $F(\xi, t)$ — не-

* С классической точки зрения определение $\bar{s}_\psi$ может быть записано в виде:

$$\bar{s}_\psi(F) = \begin{cases} \min \{ s_\psi(i) | \psi_i \text{ вычисляет } F \}, & \text{если } F \text{ — б. ф.} \\ 0, & \text{если } F \text{ не б. ф.} \end{cases}$$

улучшаема, подразумевая, что $F(i, t)$ — неулучшаема в (ψ, s_ψ, Φ) . Пусть δ_ρ (соответственно δ_ρ) есть орф, такая, что $D_{\delta_\rho}(k) = \{i | s_\rho(i) \leq k\}$. Говорим, что мера объема s монотонна, если для любых н. ч. i, j, k, l таких, что $k < l, i \in D_\rho(k), j \in D_\rho(l)$ оказывается $i < j$ (здесь ρ есть орф такая, что для всякого m и для всякого n имеет место $m \in D_\rho(n) \equiv s(m) = n$). Мету объема s будем называть стандартной, если $\forall i (s(i) = l(i))$. Легко видеть, что всякая стандартная мера объема монотонна. Если Π — некоторое рекурсивно перечислимое множество б. ф., то через Π будем обозначать псевдофункцию, удовлетворяющую условию: если Π_n не пусто, то $\Pi(n) = \max_{F \in \Pi_n} (F)$, если Π_n пусто, то $\Pi(n) = 0$. Гово-

рим, что орф g совместима с нумерацией φ относительно меры объема s_φ , если существуют рекурсивное множество Π такое, что $d(\Pi_n)$ — неограниченная и неубывающая орф, и конструктивная последовательность F б. ф. такая, что F_n имеет размерность n , для которых выполнено $g(\Pi(n)) < s_\varphi(F_n)$. Про рекурсивное множество Π б. ф. и последовательность б. ф. F , удовлетворяющих только что указанным условиям, будем говорить, что они удовлетворяют условию совместности орф g с нумерацией φ относительно меры объема s_φ .

2°. В этом пункте мы будем рассматривать 2-вычислимость б. ф.

Теорема 1. Для любых орф f, h и ξ существуют конструктивные последовательности б. ф. $F_k^{m_k}$ и н. ч. z_k такие, что для всех k ψ_{z_k} вычисляет $F_k^{m_k}$ и

$$(a) \forall k (f(s_\psi(z_k)) < s_\varphi(F_k^{m_k})),$$

$$(b) \forall k \forall z (s_\psi(z) < \xi(s_\psi(z_k)) \& (\psi_z \text{ вычисляет } F_k^{m_k}) \supset \neg \neg \exists x (l(x) = m_k \& \Phi_z(x) > h(m_k))).$$

Доказательство. (ср. [13], теорема 1). Не нарушая общности, можем считать, что ξ и f — неубывающие орф. Зададим трехместную орф t инструкциями. Для вычисления $t(k, x, y)$ мы поступаем следующим образом. Вычисляем $Cy = d(D_{\delta_\psi}(\xi(s_\psi(y)))) + d(D_{\delta_\varphi}(s_\psi(y)))$. Пусть двухместная орф v такова, что $\forall yij (2^{2^{v(y, i)}} > Cy) \& (i < j \supset v(y, i) < v(y, j))$.

Из $M_{(y, k)}$ (здесь M — множество всех б. ф.) выберем б. ф. $F_{(y, k)}^{v(y, k)}$ такую, что выполнено: 1) $\forall i (i \in D_{\delta_\psi}(\xi(s_\psi(y))) \& \psi_i \text{ вычисляет } F_{(y, k)}^{v(y, k)} \supset \neg \neg \forall x (l(x) = v(y, k) \supset \Phi_i(x) \leq h(v(y, k)))$ и 2) F_k не вычисляется ни одной функцией φ_i такой, что $i \in D_{\delta_\varphi}(s_\psi(y))$. Выбор подобной функции возможен, поскольку количество б. ф. в множестве $M_{(y, k)}$ больше, чем Cy ; с другой стороны, условие 1) исключает не более $d(D_{\delta_\psi}(\xi(s_\psi(y))))$, а условие 2) исключает не более $d(D_{\delta_\varphi}(s_\psi(y)))$ б. ф. Далее, для x с $l(x) = v(y, k)$ полагаем $t(k, x, y) = F_k(x)$ и равной 2 для x таких, что $l(x) \neq v(y, k)$. По теореме о рекурсии существует такая орф θ , что для любых k и x $\psi_{\theta(k)} = t(k, x, \theta(k))$. Нетрудно убедиться, что для б. ф. $F_k^{v(\theta(k), k)} (k = 1, 2, \dots)$ выполнены условия теоремы.

Пусть ψ и θ — нумерации и ν — неубывающая орф. Говорим, что θ ν -сводится к ψ , если существует орф β такая, что $\forall i (\psi_{\beta}(i) = \theta_i)$ & $l(\beta(k)) \leq \nu(l(k))$. Говорим, что ψ ν -оптимальна, если любая нумерация ν -сводится к ψ . Нетрудно убедиться, что для любой допустимой нумерации ψ можно указать орф ν такую, что ψ ν -оптимальна. В случае, если для ν выполнено $\forall s (\nu(l+s) \leq \nu(l))$ и U (некоторая аддитивно оптимальная нумерация одноместных чрф) ν -сводится к ψ , то, как нетрудно убедиться, ψ ν -оптимальна.

Теорема 2. Пусть ν есть неубывающая орф и ψ — ν -оптимальная нумерация. Тогда существует орф h такая, что для любой орф f существует конструктивная последовательность б. ф. F_k^m и конструктивная последовательность н. ч. q_k и константа C такие, что для любого k функция ψ_{q_k} вычисляет F_k^m и

$$(1) \quad f(s_{\psi}(q_k)) < \overline{s_{\psi}}(F_k),$$

$$(2) \quad l(q_k) \leq \nu(l(k) + c),$$

$$(3) \quad \forall x (l(x) = m_k \supset \Phi_{q_k}(x) < h(m_k)).$$

Лемма 1. (Эта лемма есть слегка модифицированный вариант леммы Я. М. Барздина ([9], гл. 1, § 4, лемма б)). Если нумерация ψ ν -оптимальна и ν — неубывающая орф, то для любой конструктивной последовательности h орф существует константа C и последовательность а. н. ч. такие, что

$$\forall k (\psi_{h_k}(a_k) = \psi_{a_k}) \& l(a_k) \leq \nu(l(k) + C).$$

Доказательство леммы. Пусть A — некоторая четырехместная, универсальная для трехместных чрф функция и B — трехместная чрф такая, что для всех s, x, y, z выполнено $B(2^s(2x+1) + 1, y, z) = A(s, x, y, z)$. Как известно, чрф B , получаемая таким образом, является аддитивно оптимальной для трехместных чрф и для любой трехместной чрф b может быть указана орф d и константа C такие, что $\forall n \forall x y ((B(d(n), x, y) = b(n, x, y)), \forall n (d(n) > n))$ и $\forall n (l(d(n)) < l(n) + C)$. Из ν -оптимальности ψ имеем $\exists \beta \forall n x (B(n, n, x) = \psi(\beta(n), x) \& l(\beta(n)) \leq \nu(l(n)))$. Из аддитивной оптимальности B имеем $\exists q \exists C \forall k (B(q(k), n, x) = \psi(h_k(\beta(n)), x) \& l(q(k)) < l(k) + C)$. Для $n_k = q(k)$ имеем $\psi(\beta(q(k)), x) = B(q(k), q(k), x) = \psi(h_k(\beta(q(k))), x)$. Из ν -оптимальности ψ , аддитивной оптимальности B и того, что ν по предположению неубывающая и $\forall k (q(k) > k)$ имеем требуемое: $l(\beta(q(k))) \leq \nu(l(q(k))) \leq \nu(l(k) + C)$. Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы ([7], § 9.2, гл. IV).

Лемма 2. Для любой допустимой нумерации ψ можно указать орф B , удовлетворяющую следующим условиям:

$$(1) \quad \forall x z (\psi_{B(x, z)} = \psi_z),$$

$$(2) \quad A x_1 x_2 z_1 z_2 (B(x_1, z_1) = B(x_2, z_2) \equiv x_1 = x_2 \& z_1 = z_2),$$

(3) для любого н. ч. m можно указать такие x и z , что $B(x, z) = m$.

Доказательство теоремы. Пусть фиксированы некоторые нумерации n -ок н. ч. ($n = 1, 2, \dots$), причем для нумерации пар выполнено: $\forall x \exists C (l(\langle x, y \rangle) < l(y) + C)$ (мы используем символ $\langle \rangle$ [2] для обозначения кодов n -ок и буквы $\pi_1, \dots, \pi_n$ для инверсных функций нумераций n -ок, т. е. таких, что $\forall y (y = \langle \pi_1(y), \dots, \pi_n(y) \rangle)$. Определим одноместную орф σ , принимающую каждое натуральное значение бесконечно много раз. Определим также двухместную орф τ такую, что

$$\forall w i (\sigma(\tau(w, i)) = w) \& \forall i j (i < j \supset \tau(w, i) < \tau(w, j)) \&$$

$$\& \forall w y (\sigma(y) = w \supset \exists i (y = \tau(w, i))).$$

Пусть t — чрф, определяемая следующими инструкциями: для вычисления $t(i, x, z)$ вычисляем сначала $\psi_i(s_\varphi(z))$, затем (если процесс вычисления $\psi_i(s_\varphi(z))$ закончился) по тройке $\langle i, z, \Phi_i(s_\varphi(z)) \rangle = w$ находим $\mu p [2^{\tau(w, p)} > d(D_{\psi_i}(\psi_i(s_\varphi(z))))]$. Из множества $M_{\tau(w, p)}$ (здесь M — множество всех б. ф.) выберем б. ф. F ($F = F_{i, z}$) размерности $\tau(w, p)$ такую, что F не вычисляется ни одной ψ_j с $j \in D_{\psi_i}(\psi_i(s_\varphi(z)))$ и положим $t(i, x, z)$ равной F , если $l(x) = \tau(w, p)$ и двойке в противном случае. Вследствие допустимости нумерации ψ существует двухместная орф r такая, что $t(i, x, z) = \psi_{r(i, z)}(x)$. Пусть далее B — функция, удовлетворяющая условию леммы 2 для нумерации ψ , и пусть G — орф, такая, что $\forall y (G(y) = B(\pi_1(y), \pi_2(y)))$. Как следует из свойств B , функция G есть орф, взаимно-однозначно отображающая натуральный ряд на себя. Через R обозначим нумерацию такую, что для любых y и j будет $R_y(j) = r(G(y), j)$. Применим лемму 1 к последовательности орф R . Тогда существует одноместная орф a такая, что всегда $\psi_a(y) = \psi_{R_y(a(y))}$ и $l(a(y)) \leq \nu(l(y) + c)$. Пусть $\bar{i}$ таково, что $\psi_{\bar{i}} = f$. Рассмотрим последовательность функций $R_{\langle \bar{i}, k \rangle}$. По предположению, сделанному про функцию пересчета пар $\langle \rangle$, имеем $\exists c \forall k (l(\langle \bar{i}, k \rangle) < l(k) + C)$. Обозначим $a(\langle \bar{i}, k \rangle)$ через q_k . Нетрудно убедиться, что для б. ф. $F_{B(\bar{i}, k), q_k}$ и н. ч. q_k ($k = 1, 2, \dots$) выполнены условия (1) и (2) теоремы.

Определим функцию h . Зададим процедуру вычисления h в точке n . Найдем такие w и l , что $n = \tau(w, l)$. Пусть w_1, w_2 и w_3 такие н. ч., что $w = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$. Найдем y такое, что $G(y) = w_1$. Далее, если

$$w_2 = a(y) \text{ и } w_3 = \Phi_{w_1}(s_\varphi(w_2)) \text{ и } l = \mu p [2^{\tau(w, p)} > d(l)_{\psi_{w_1}(\psi_{\bar{i}}(w_1))}],$$

то полагаем $h(n) = \max_{l(x)=n} \Phi_{w_1}(x)$, и полагаем $h(n) = 0$ в противном случае. Нетрудно убедиться, что h искомая. Теорема доказана.

Для иллюстрации теоремы обратимся к языку машин Тьюринга (м. т.). В [10] на основании результатов из [11], было показано, что нумерация м. т. с числом внешних символов, рав-

ным k (м. т. упорядочены по возрастанию числа внутренних состояний), является γ -оптимальной, где $\gamma(l) = \frac{k}{k-1}l$, и эта оценка непонижаема из мощностных соображений. Если в качестве допустимой нумерации в теореме 2 рассматривается нумерация м. т., то, как следует из теоремы, оценки для м. т., коротко кодирующих б. ф. по сравнению с некоторым булевски разрешимым языком, асимптотически наилучшие, причем при некотором общерекурсивном ограничении на время их работы.

Теорема 3. Пусть орф g совместима с нумерацией φ относительно меры объема s_φ , ψ — аддитивно оптимальная нумерация и s_φ — стандартная мера сложности. Тогда для любых орф ξ, f, h (где для всех $n: \xi(n) > n$) существуют псевдопоследовательности $F_k^{m_k}$ и $G_k^{m_k}$ б. ф. и з. ч. такие, что для всех $k: \psi_{z_k}$ вычисляет $G_k^{m_k}$ и

$$(a) g(\bar{s}_\varphi(F_k^{m_k})) < \bar{s}_\varphi(G_k^{m_k}),$$

$$(b) f(s_\varphi(z_k)) < \bar{s}_\varphi(F_k^{m_k}),$$

$$(в) F_k^{m_k} = (\xi, h(\max_{1 \leq x \leq m_k} \Phi_{z_k}(x))) \text{ — неулучшаема.}$$

Замечание 1. Теорема осталась бы верной, если бы про ψ мы предположили, что она равномерная нумерация [10]. (в [10] определяется понятие γ -равности нумерации, равномерной мы будем называть такую нумерацию, которая γ -равномерна для некоторой γ), и s_φ — произвольная монотонная мера объема.

Доказательство теоремы. Пусть рекурсивное множество б. ф. Π и последовательность P б. ф. удовлетворяют условию совместности орф g с нумерацией φ относительно меры объема s_φ . Через ξ^{-1} будем обозначать чрф, связанную с чрф ξ соотношением $\xi^{-1}(n) = \mu m[\xi(m) > n] - 1$. Так как по предположению $\xi(n) > n$ для всех n , то $\xi^{-1}(n) < n$ и $\xi(\xi^{-1}(n)) < n$. Пусть ν_1 и ν_2 — произвольные неограниченные и неубывающие орф. Определим возрастающую последовательность з. ч. n_k . Для всякого k $n_k = \mu m[f(l(k) + \nu_1(k)) < \xi^{-1}(l(\gamma(m)) - 4) - \nu_2(k)]$ (здесь γ — орф такая, что $\gamma(n) = d(\Pi_n)$). В силу аддитивной оптимальности нумерации ψ выполнено $\psi_{z_k}(\psi_{z_k} \text{ вычисляет } P_k^{n_k} \& (l(z_k) < l(k) + C_1))$. Определим последовательность R б. ф. Пусть H — орф такая, что для всех n : если $n = n_k$ для некоторого k , то $H(n_k) = h(\max_{1 \leq x \leq n_k} \Phi_{z_k}(x))$ и $H(n) = 0$ в противном случае.

Пусть далее Q есть рекурсивное множество б. ф., удовлетворяющее следующим условиям: если $n = n_k$ для некоторого k , то Q_{n_k} есть множество б. ф., мощность $d(Q_{n_k})$ которого удовлетворяет условию $l(d(Q_{n_k})) = \xi^{-1}(l(\gamma(n_k)) - 4) - \nu_2(k)$, и $Q_{n_k} \subset \Pi_{n_k}$ и б. ф. из Q_{n_k} не вычисляются функциями ψ_z с $z < \frac{\gamma(n_k)}{2}$ за время, меньшее, чем $H(n_k)$.

т. е. для б. ф. E из Q_{n_k} выполнено: $\forall z (z < \gamma(n_k)/2 \& \psi_z$ вычисляет $E \supset \neg \forall x (l(x) = n_k \supset \Phi_x(x) < H(n_k))$. Построение такого множества возможно, поскольку количество б. ф. в множестве Π_{n_k} равно $\gamma(n_k)$, с другой стороны, условие невычислимости их функциями ψ_z с номерами $z < \gamma(n_k)/2$ за время, меньшее, чем $H(n_k)$, исключает не более, чем $\gamma(n_k)/2$ б. ф., и, кроме того, из $l(d(Q_{n_k})) = \xi^{-1}(l(\gamma(n_k)) - 4) - v_2(k) \leq \xi^{-1}(l(\gamma(n_k)) - 4) \leq l(\gamma(n_k)) - 4$ имеем $d(Q_{n_k}) < \gamma(n_k)/2$. Пусть $R_k^{n_k}$ есть псевдопоследовательность „самых сложных“ б. ф. из Q_{n_k} , т. е. таких, что $s_\psi(R_k^{n_k}) = \max_{E \in Q_{n_k}} \bar{s}_\psi(E)$. Из оптимальности нумера-

ции ψ имеем $\exists C_2 \forall k (l(d(Q_{n_k})) \leq \bar{s}_\psi(R_k) \leq l(d(Q_{n_k})) + C_2)$.

Пусть $k_0 = \mu k [v_1(k) > c_1 \& v_2(k) > c_2]$. Для псевдопоследовательностей $F_k^{m_k} = R_{k+k_0}^{n_k+k_0}$, $G_k^{m_k} = P_{k+k_0}^{n_k+k_0}$ и $y_k = z_{k+k_0}$ условия теоремы выполнены. Убедимся в этом. Пункт (а) выполнен, и в этом нетрудно убедиться.

Пункт (б). Имеем

$$\forall k (f(s_\psi(y_k)) = f(s_\psi(z_{k+k_0})) \leq f(l(k+k_0) + C_1) \leq f(l(k+k_0) + v_1(k+k_0)) \leq \xi^{-1}(l(\gamma(n_{k+k_0})) - 4) - v_2(k) \leq l(d(Q_{n_{k+k_0}})) \leq \bar{s}_\psi(F_k^{m_k}).$$

Пункт (в).

$$\xi(\bar{s}_\psi(F_k^{m_k})) = \xi(\bar{s}_\psi(G_{k+k_0}^{n_k+k_0})) \leq \xi(l(d(Q_{n_{k+k_0}})) + C_2) \leq$$

$$\leq \xi(\xi^{-1}l(\gamma(n_{k+k_0})) - 4) - v_2(k) + C_2 \leq \xi(\xi^{-1}(l(\gamma(n_{k+k_0})) - 4)) \leq l(\gamma(n_{k+k_0})) - 4.$$

Так как мера объема s_ψ — стандартная, т. е. $\forall z (s_\psi(z) = l(z))$, то, как убедились, индексы z , объем которых $(l(z))$ не более, чем в ξ раз превосходит $\bar{s}_\psi(F_k)$, ограничены числом $\gamma(n_{k+k_0})/2$; но по определению множества Q , все б. ф. из $Q_{n_{k+k_0}}$ индексами $z < \gamma(n_{k+k_0})/2$ „вычисляются не быстрее“, чем $H(n_{k+k_0})$, и, таким образом, функция $F_k^{m_k} — (\xi, H(m_k))$ неулучшаема.

3°. В этом пункте мы будем рассматривать 1-вычислимость б. ф. Легко видеть, что при переходе от булевски разрешимой нумерации φ к допустимой нумерации ψ имеет место „сжатие объемов“. Действительно, для всякой конструктивной последовательности б. ф. F можно указать орф (т. е. указать номер орф), вычисляющую б. ф. последовательности F_n^n для всех n , а следовательно, можно указать константу C такую, что $\forall n (\bar{s}_\psi(F_n^n) < C)$. С другой стороны, так как нумерация φ булевски разрешимая, то можно строить конструктивные последовательности F_n^n б. ф. таких, что $\bar{s}_\varphi(F_n^n) \rightarrow \infty$, и, таким образом, для них будут иметь место „сжатия объемов“. Нетрудно убедиться, что для 1-вычислимости справедливы дословные аналоги утверждений п. 2.

Как уже говорилось в начале этого пункта, если для конструктивной последовательности F_n^n б. ф. выполнено $\bar{s}_\varphi(F_n^n) > q(n)$, где q

орф такая, что $q(n) \rightarrow \infty$, то для б. ф. F_n^n имеет место „сжатие объемов“ при переходе от нумерации φ к ψ (для б. ф. конструктивной последовательности F_n^n выполнено $\exists C \forall n (s_\varphi(F_n^n) < C)$), и „степень сжатия объемов“ для б. ф. конструктивной последовательности F_n^n зависит от того, насколько „быстро растет“ функция q с ростом n . Далее мы будем интересоваться временными характеристиками вычислений конструктивных последовательностей б. ф. и, в частности, тем, насколько они связаны со „степенью сжатия объемов“. Двухместный предикат P , допустимыми значениями аргументов которого является н. ч. (напомним, что б. ф. рассматриваются как н. ч.), будем называть упорядочивающим б. ф., если:

(а) $\forall n$, для любой б. ф. F от n аргументов, $\exists k (1 < k \leq 2^{2^n}) \& P(F, k)$,

(б) $\forall k \forall F_1^n F_2^n (1 \leq k \leq 2^{2^n} \& P(F_1^n, k) \& P(F_2^n, k) \supset F_1^n = F_2^n)$.

Например, предикатом, упорядочивающим б. ф., является предикат P_0 , определяемый следующим образом: для всяких н. ч. k, n и всякой б. ф. F^n , $P_0(F^n, k)$ в том и только в том случае, когда мощность множества б. ф. G от n аргументов, удовлетворяющих условию $[(s_\varphi(G) < s_\varphi(F^n)) \vee (s_\varphi(G) = s_\varphi(F^n) \& (G \text{ лексикографически предшествует } F^n))]$, в точности равна $k-1$. Дальнейшие наши формулировки мы будем связывать с предикатом P_0 , хотя они будут справедливы и для случая произвольного предиката P , упорядочивающего б. ф. Так, мы будем называть орф γ следящей (следящей для конструктивной последовательности F_n^n), если $\forall n (1 \leq \gamma(n) \leq 2^{2^n})$ (если выполнено $\forall n P_0(F_n^n, \gamma(n))$). В последнем случае последовательность F_n^n будем называть γ -последовательностью. В [12], [2] строится взаимно-однозначное соответствие между N и N^ω , где N — множество н. ч., $N^\omega = U N^s$ (здесь N^s — множество кортежей над N длины s , мы их будем называть s -ками н. ч.).

Натуральное число u , соответствующее n -ке н. ч. $x_1, \dots, x_n$, будем называть кодом этой n -ки и обозначать $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$. K -тое н. ч. в лексикографической упорядоченности (напомним, что н. ч. суть слова в алфавите $\{0,1\}$) длины n среди чисел такой же длины будем обозначать через $x_{n,k}$ ($k = 1, \dots, 2^n$). Мы будем использовать запись $! [q, n]$ для обозначения того факта, что чрф q определена на всех н. ч. длины n , и если $! [q, n]$, то через $[q, n]$ будем обозначать $\langle q(x_{n,1}), \dots, q(x_{n,2^n}) \rangle$.

Легко доказываются следующие леммы.

Лемма 1. Пусть орф σ удовлетворяет условию $\forall i \forall n (!\psi_{\sigma(i)}(n) \equiv ![\psi_i, n])$, тогда существует орф H , для которой выполнено:

(а) $\forall i \forall n (!\Phi_{\sigma(i)}(n) \supset \Phi_{\sigma(i)}(n) \leq H([\psi_i, n]))$,

(б) H — неубывающая и неограниченная.

Лемма 2. Пусть орф σ удовлетворяет условию $\forall i \forall n (!\psi_i(n) \equiv ![\psi_{\sigma(i)}(n)])$, тогда существует орф H , для которой выполнено:

(а) $\forall i \forall n (!\Phi_{\sigma(i)}(n) \supset [\Phi_{\sigma(i)}, n] \leq H([\psi_i(n)]))$,

(б) H — неубывающая и неограниченная.

Из лемм 1 и 2 имеем

Следствие. Существует орф H , удовлетворяющая условию: для любой орф γ такой, что всегда $\gamma(n) \leq 2^n$ выполнено — если F_n^γ есть γ -последовательность, то

$$(a) \forall i (\forall n (\psi_i \text{ вычисляет } F_n^\gamma) \supset \exists j (\psi_j = \gamma \& \forall n (\psi_j(n) < H((\Phi_i, n))))).$$

$$(b) \forall j (\psi_j = \gamma \supset \exists i (\forall n (\psi_i \text{ вычисляет } F_n^\gamma) \& [\Phi_i, n] < H(\psi_j(n)))).$$

Следствие, говоря в принципе, утверждает, что всякая конструктивная последовательность б. ф. вычисляется не за существенно большее время, чем следящая функция для данной последовательности и наоборот. Чтобы убедиться в справедливости следствия, достаточно определить орф γ_1 и γ_2 , удовлетворяющие условиям лемм 1 и 2, такие, что γ_1 по индексу z орф (в нумерации ψ), вычисляющей б. ф. некоторой последовательности (если ψ_z является таковой) выдает индекс орф, следящей для данной последовательности F_n^γ , γ_2 же делает обратное; если далее функции H_1 и H_2 удовлетворяют утверждениям лемм 1 и 2 для орф γ_1 и γ_2 соответственно, то искомая функция H может быть определена как $\max(H_1, H_2)$.

Из следствия вытекает, например, что для всякой разрешимой нумерации φ можно выбрать такую последовательность б. ф. F_n^γ , что при упорядочении б. ф. по сложности в φ номера F_n^γ отличаются от номеров самых простых (относительно φ) б. ф. не более чем на 1, и вместе с тем время их вычисления в нумерации ψ будет превосходить время вычисления булевых функций, самых сложных относительно φ .

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность И. Д. Заславскому за постановку задачи и внимание к работе.

Вычислительный центр

МАТ Арм.ССР

Поступила 4.XI.1974

Հ. Հ. ԱՂԱՐՅԱՆ. Բուլյան ֆունկցիաների հաշվման բաղադրյունների որոշ համեմատական բնութագրեր (ամփոփում)

Նկարագրվում են «Միավոր սեղման էֆեկտը» և «Խաշման էֆեկտը», Բուլյան ֆունկցիաների իրացման ժամանակ ունիվերսալ և բուլյան լուծելի ալգորիթմիկ լեզուներում:

Ուսումնասիրվում են նշված էֆեկտները կախված ալգորիթմների ժամանակային բնութագրերից:

G. A. NAZARIAN. Some comparative complexity characteristics of boolean functions computations (summary)

"Cross effect" and "size shrinkage effect" are described when realization of boolean functions in universal and boolean solvable languages are compared. The mentioned effects are considered from the point of view of computation time.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Д. Заславский. О реализации булевых функций с помощью автоматов, ДАН Арм.ССР, XLVII, № 3, 1968, 129—133.

2. Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., Изд. "Мир", 1972.
3. И. Д. Заславский. О псевдофункциях Шеннона, Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 16, 1969, 65—76.
4. М. Г. Гельфонд. О конструктивных псевдофункциях, Зап. научн. семинаров, ЛОМИ АН СССР. 16, 1969, 20—28.
5. А. К. Звонкин, Л. А. Левин. Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгорифмов, УМН, 25, вып. 2, 1970, 85—127.
6. Г. А. Назарян. Некоторые оценки реализации булевых функций в алгорифмических языках, ДАН Арм.ССР, V, № 3, 1972, 129—133.
7. А. И. Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции, Изд. "Наука", М., 1965.
8. М. А. Blum. A machine-independent theory of the complexity of recursive functions, JACM, 14, № 2, 1967, 322—336.
9. Я. М. Барздинь. Сложность и частотное решение некоторых алгоритмически неразрешимых массовых проблем, Докторская диссертация, ВЦ Латвийского ГУ, Рига, 1971.
10. Г. А. Назарян. О реализации булевых функций в алгорифмических языках, "Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники", Труды ВЦ АН Арм.ССР и ЕрГУ, VIII, 1974.
11. G. J. Chaitin. On the length of programs for computing finite binary Sequences, JACM, 13, 1966, 547—570.
12. В. А. Успенский. Лекции о вычислимых функциях, "Изд. ФМА", М., 1960.
13. М. А. Blum. On the size of machines, Information and Control. 11, № 3, 1967, 257—265.