А. А. АНДРЯН

НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ
УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

В настоящей работе рассматриваются некоторые граничные задачи для систем уравнений составного типа первого порядка. Граничные задачи ставятся в ограниченной области. Доказывается нетеро-вость поставленных задач и вычисляется их индекс. Нам удается также с помощью определения сопряженного граничного условия, данно-го в работе [6], построить сопряженные граничные задачи и сформу-лировать результаты в терминах сопряженных задач. Отметим, что граничные задачи для частного случая системы из двух или трех уравнений составного типа первого порядка в ограниченной области изучены в работе [8].

Отметим также, что метод исследования граничных задач для систем уравнений составного типа первого порядка, используемый в работе [8], в применении к нашему случаю связан с рядом трудностей. В связи с этим, в работе предлагается другой метод исследования рассматриваемых задач.

§ 1. Постановка граничных задач

Через D обозначим конечную область, ограниченную замкнутой гладкой кривой Γ . Если $f(x, y)$ — функция двух переменных x и y , то будем иногда представлять ее в виде $f(z)$, где $z = x + iy$.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка, записанную в виде

$$u_x - A(x, y) u_y - B(x, y) u = g(x, y), \quad (1.1)$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$ — заданные в области D вещественные квадратные матрицы порядка k , $g(x, y)$ — заданная, а $u(x, y)$ — искомая k -мерные вещественные вектор-функции.

Рассмотрим соответствующее системе (1.1) характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (1.2)$$

где E — единичная матрица порядка k .

Предположим, что число действительных корней характеристического уравнения (1.2) и число линейно независимых действительных собственных векторов матрицы $A(x, y)$ для всех точек области D равно m , где $0 < m < k$. Тогда, следуя работе [8], мы можем систему уравнений (1.1) в области D привести к следующему виду:

$$v_x - Q_1 v_y = A_1 v + \operatorname{Re}(B_1 w) + f, \quad (1.3)$$

$$\overline{w}_x - Q_2 \overline{w}_y = A_2 v + B_2 w + C_2 \overline{w} + F, \quad (1.4)$$

где Q_1 — диагональная, а Q_2 — квазидиагональная матрицы с элементами на диагонали $\lambda_1(z), \dots, \lambda_m(z)$; $q_1(z), \dots, q_n(z)$ соответственно, причем $\lambda_1(z), \dots, \lambda_m(z)$ — действительные функции, а $|q_i(z)| < \operatorname{const} < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать систему уравнений вида (1.3), (1.4), где $Q_1, Q_2 \in C^1(D + \Gamma)$ ($0 < \nu \leq 1$), $A_1(z), B_1(z), A_2(z), B_2(z), C_2(z)$ — матрицы-функции, принадлежащие классу $C^1(D + \Gamma)$ размерности $(m, m), (n, m), (m, n), (n, n), (n, n)$, соответственно, причем $A_1(z)$ — действительная матрица: $f(z) \in C^1(D + \Gamma)$ — m -мерная действительная, а $F(z) \in C_\alpha(D + \Gamma)$ $\left\{0 < \alpha < \min\left(\nu, \frac{1}{2}\right)\right\}$ — n -мерная комплексная заданные вектор-функции; $v = (v_1, \dots, v_m)$ — действительная, а $w = (w_1, \dots, w_n)$ — комплексная искомые вектор-функции из класса $C^1(D) \cap C_\alpha(D + \Gamma)$.

В работе подробно рассматривается случай, когда Q_1 — постоянная матрица, а область D — единичный круг. Но нетрудно будет заметить, что полученные результаты справедливы и для $Q_1 \in C^1(D + \Gamma)$ ($0 < \nu \leq 1$). А в качестве D можно брать любую такую область, что каждая характеристика системы (1.3) пересекает ее границу Γ ровно в двух точках.

Проведем произвольный луч l_0 с вершиной в центре окружности Γ . Через Γ_1 обозначим ту часть окружности Γ , которая заключена между касательными, параллельными прямой $y + \lambda_1 x = 0$ и имеет общую точку с лучом, выходящим из центра окружности Γ параллельно прямой $y + \lambda_1 x = 0$ и образующим с l_0 угол, не превосходящий $\frac{\pi}{2}$.

Граничная задача А. Требуется найти решение системы (1.3), (1.4), удовлетворяющее граничным условиям

$$v_i|_{\Gamma_1} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{Re}(\overline{G} w)|_{\Gamma} = 0, \quad (1.6)$$

где $G(z) \in C_\alpha(\Gamma)$ — заданная матрица-функция размерности (n, n) с $\det G(z) \neq 0$ всюду на Γ .

Граничная задача В. Требуется найти решение системы (1.3), (1.4), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left[v_i + \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n a_j^i w_j \right) \right] \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{Re}(\overline{G} w)|_{\Gamma} = 0, \quad (1.8)$$

где $a_j^i(z)$ — функции класса $C^1(\Gamma)$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$, остальные обозначения те же, что и выше.

Граничная задача С. Требуется найти решение системы (1.3), (1.4), удовлетворяющее граничным условиям

$$v_i|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.9)$$

$$[Hv + \operatorname{Re}(\bar{G}w)]_{\Gamma} = 0, \quad (1.10)$$

где $H(z)$ — заданная действительная матрица-функция размерности (m, n) , принадлежащая классу $C^1(\Gamma)$, остальные обозначения те же, что и в задаче А.

Имеет место

Теорема 1. Однородная задача А имеет конечное число линейно независимых решений. Для разрешимости неоднородной задачи А необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{j=1}^m \iint_D f_j(z) \cdot v_{ij}(z) \, dx dy + \operatorname{Re} \sum_{j=-m+1}^{m+n} \iint_D F_j(z) v_{ij}(z) \, dx dy = 0 \quad (1.11)$$

($i = 1, \dots, k'_0$),

где $v'_0 = (v_{1,1}, \dots, v_{1,m+n})$ ($i = 1, \dots, k'_0$) — вектор-функции (первые m компонент которых действительны), являющиеся полной линейно независимой системой решений сопряженной к А однородной задачи А*.

Теорема 1 справедлива также и для граничных задач В и С.

Теорема 2. Индексы граничных задач А, В и С равны

$$\kappa = \frac{1}{\pi} [\arg \det G(z)]_{\Gamma} + n, \quad (1.12)$$

где символ $[\]_{\Gamma}$ обозначает приращение выражения, стоящего в квадратных скобках, при обходе контура Γ один раз в положительном направлении.

§ 2. Исследование граничных задач А, В и С

Рассмотрим задачу Римана—Гильберта для эллиптической системы, т. е. задачу нахождения непрерывно дифференцируемого в области D решения w эллиптической системы

$$w_{\bar{z}} - Q_2 w_z = B_2 w + C_2 \bar{w} + F, \quad (2.1)$$

удовлетворяющего граничному условию

$$\operatorname{Re}(\bar{G}w)|_{\Gamma} = g, \quad (2.2)$$

где $g(z) \in C_0(\Gamma)$ — заданная вектор-функция, остальные обозначения те же, что и в задаче А.

Тогда, как известно [1], задача (2.1), (2.2) нетерова, необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи имеют вид

$$N_j(t) + M_j(g) = 0, \quad j=1, \dots, p, \quad (2.3)$$

где $N_1, \dots, N_p$ — линейно независимые непрерывные функционалы на пространстве $C_\alpha(D + \Gamma)$, а $M_1, \dots, M_p$ — непрерывные функционалы на $C_\alpha(\Gamma)$. Общее решение задачи (2.1), (2.2) представляется формулой

$$w = KF + Mg + \sum_{j=1}^q c_j w_j^0, \quad (2.4)$$

где $w_1^0, \dots, w_q^0$ — полная система линейно независимых решений однородной задачи (2.1), (2.2), $c_1, \dots, c_q$ — произвольные вещественные постоянные; K — вполне непрерывный оператор в $C_\alpha(D + \Gamma)$, M — ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $C_\alpha(D + \Gamma)$, а индекс задачи определяется формулой (1.12)

Известно также [2], что добавление в систему уравнений (2.1) членов вида $K_1 w$, а в граничное условие (2.2) членов вида $\operatorname{Re}(K_2 w)$, где K_1 — ограниченный оператор в $C_\alpha(D + \Gamma)$, а K_2 — вполне непрерывный оператор из $C_\alpha(D + \Gamma)$ в $C_\alpha(\Gamma)$, не меняет вышеупомянутых результатов.

Далее, как следует из работы [3] автора, граничная задача

$$v_x - Q_1 v_y = A_1 v + f, \quad (2.5)$$

$$v_i|_{\Gamma_i} = \psi_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.6)$$

поставлена корректно, где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m) \in C^1(\Gamma)$, остальные обозначения те же, что и в задаче A . Общее решение задачи (2.5), (2.6) выражается формулой

$$v = Nf + Tf + P\psi, \quad (2.7)$$

где N — вполне непрерывный оператор в $C_\alpha(D + \Gamma)$, P — ограниченный оператор, действующий из пространства $C^1(\Gamma)$ в $C_\alpha(D + \Gamma)$, $Tf = (T_1 f_1, \dots, T_m f_m)$,

$$(T_i f_i)(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+k_i^2}} \int_{l_i(x, y)} f_i(\xi, \eta) ds, \quad i=1, \dots, m,$$

здесь $l_i(x, y)$ — часть i -ой характеристики системы (2.5), соединяющая точку (x, y) с границей Γ_i .

Пользуясь вышеупомянутыми результатами, исследуем граничную задачу A . Рассматривая граничную задачу (1.3), (1.5) как задачу (2.5), (2.6) с правой частью $\operatorname{Re}(B_1 w) + f$, в силу (2.7) будем иметь

$$v = N \operatorname{Re}(B_1 w) + T \operatorname{Re}(B_1 w) + (N + T) f. \quad (2.8)$$

Подставим v из (2.8) в систему уравнений (1.4), получим

$$w_{\bar{z}} - Q_2 w_z = B_2 w + C_2 \bar{w} + A_2 N \operatorname{Re}(B_1 w) + A_2 T \operatorname{Re}(B_1 w) + A_2 (N + T) f + F. \quad (2.9)$$

Задача (2.9), (1.6) представляет собой задачу Римана—Гильберта для эллиптической системы (2.1) с ограниченным возмущением в системе уравнений, откуда и следует нетеровость задачи A .

Покажем, что индекс задачи A определяется формулой (1.12). Действительно, очевидно, что число линейно независимых решений однородной задачи A равно числу k_0 линейно независимых решений однородной задачи (2.9), (2.2). С другой стороны, необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи (2.9), (2.2) записываются в виде

$$\bar{N}_j [A_2 (N + T) f + F] = 0, \quad j=1, \dots, k_0', \quad (2.10)$$

где $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_{k_0'}$ — линейно независимые непрерывные функционалы от своего аргумента на пространстве $C_2(D + \Gamma)$, причем $k_0 - k_0' = \kappa$, а κ дается формулой (1.12). Очевидно, что условия (2.10) являются необходимыми и достаточными для разрешимости неоднородной задачи A . Отсюда и из того, что функционалы

$$p_j(f; F) = \bar{N}_j [A_2 (N + T) f + F], \quad j=1, \dots, k_0'$$

— линейно независимые непрерывные функционалы на прямой сумме пространств $C^1(D + \Gamma)$ и $C_2(D + \Gamma)$ следует, что индекс задачи A определяется формулой (1.12).

Аналогичным образом, используя формулу (2.7), можно показать, что задача B нетерова с индексом, определяемым формулой (1.12).

Докажем, что задача C нетерова и ее индекс также определяется формулой (1.12).

Как мы убедились, решение задачи (1.3), (1.9) выражается формулой (2.8). Подставим v из (2.8) в граничные условия (1.10) и систему (1.4), получим

$$w_{\bar{z}} - Q_2 w = B_2 w_{\tau} + \bar{C}_2 w + A_2 N \operatorname{Re}(B_1 w) + A_2 T \operatorname{Re}(B_1 w) + A_2 (N + T) f + F \quad (2.11)$$

$$\{N [N \operatorname{Re}(B_1 w) + T \operatorname{Re}(B_1 w) + (N + T) f] + \operatorname{Re}(\bar{G} w)\}_{\Gamma} = 0. \quad (2.12)$$

Очевидно задача C эквивалентна граничной задаче (2.11), (2.12), которую мы будем исследовать методом, использованным в работе [1]. В силу результата, приведенного в начале § 2 и леммы 2.1, доказываемой ниже, легко убедиться, что задача (2.11), (2.12) нетерова и ее индекс определяется формулой (1.12).

Лемма 2.1. Пусть E — пространство аналитических в области D функций класса $\bar{C}_\alpha(D + \Gamma)$. Тогда оператор S , действующий по формуле

$$(S\varphi)(x, y) = \operatorname{Re} \int_{\sqrt{1-y^2}}^x \varphi(\tau, y) d\tau \quad (\varphi \in E)$$

вполне непрерывен из E в $C_\alpha(\Gamma)$.

Доказательство. Так как $\varphi(z)$ — аналитическая функция, то по теореме Коши имеем

$$\int_{\sqrt{1-y^2}}^x \varphi(\tau, y) d\tau = \int_{AB} \varphi(z) dz, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2.13)$$

где AB — дуга окружности Γ , соединяющая точку $A(x, y)$ с точкой $B(\sqrt{1-y^2}, y)$ при движении по Γ , в положительном направлении.

Легко показать, что оператор S удовлетворяет неравенствам

$$|(S\varphi)(x, y)| \leq \text{const} \|\varphi\|_{C_\alpha(D+\Gamma)}, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2.14)$$

$$|(S\varphi)(x_1, y_1) - (S\varphi)(x_2, y_2)| \leq \text{const} \|\varphi\|_{C_\alpha(D+\Gamma)} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|). \quad (2.15)$$

Из неравенств (2.14), (2.15), на основании теоремы о вполне непрерывности оператора вложения $C_\mu \rightarrow C_\alpha$ при $\mu > \alpha$, следует вполне непрерывность оператора $S: E \rightarrow C_\alpha(\Gamma)$, что и требовалось доказать.

Вполне непрерывность операторов $T_1, \dots, T_m$ доказывается аналогично.

Заметим, что решения задачи (2.11), (2.12) представляются в виде

$$w = \varphi + \psi, \quad (2.16)$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая в области D вектор-функция класса $C_\alpha(D+\Gamma)$, а $\psi(z)$ — вектор-функция класса $C^1(D+\Gamma)$.

Подставляя (2.16) в (2.7) и учитывая аналитичность вектор-функции $\varphi(z)$, легко убедиться в том, что решение v граничной задачи (1.3), (1.9) принадлежит классу $C^1(D) \cap C_\alpha(D+\Gamma)$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.1. *Граничные задачи А, В и С нетеровы, их индексы равны $\kappa = \frac{1}{\pi} [\arg \det G(z)]_\Gamma + n$.*

Замечание 1. Пусть Γ_1 — часть окружности Γ , заключенная между касательными к окружности Γ , параллельными прямой $y + \lambda_1 x = 0$. Других дополнительных условий на Γ_1 мы не налагаем. В этом случае справедливость теоремы 2.1 доказывается с помощью результатов, полученных выше, и леммы 2.2, приводимой ниже.

Пусть H_1 и H_2 — нетеровые операторы, действующие из банаховых пространств E_1 и E_2 в банаховые пространства F_1 и F_2 соответственно.

Пусть T — ограниченный оператор, действующий из E_2 в F_1 , а K — вполне непрерывный оператор — из E_1 в F_2 .

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$H_1 v = T w + f, \quad (2.17)$$

$$H_2 w = K v + g. \quad (2.18)$$

где $v \in E_1$, $w \in E_2$ — искомые, а $f \in F_1$, $g \in F_2$ — заданные элементы.

Под нетеровостью системы уравнений (2.17), (2.18) и ее индексом понимаются общепринятые определения (см., например, [5]). Имеет место

Лемма 2.2. Система уравнений (2.17), (2.18) нетерова, ее индекс равен сумме индексов операторов H_1 и H_2 .

Доказательство. Поскольку оператор K вполне непрерывен, то лемму достаточно доказать для следующей системы уравнений:

$$H_1 v = Tw + f, \quad (2.19)$$

$$H_2 w = g. \quad (2.20)$$

Так как оператор H_2 нетеров, то существует ограниченный оператор $B: E_2 \rightarrow E_2$ такой, что оператор BH_2 канонически фредгольмовый, т. е. имеет вид $J - N$, где J — тождественный, а N — вполне непрерывный операторы в E_2 . Применяя оператор B к обеим частям уравнения (2.20), получим

$$w = Nw + Bg. \quad (2.21)$$

Подставим в (2.19) вместо w ее выражение через правую часть равенства (2.21), получим эквивалентную систему

$$H_1 v = TNw + TBg + f,$$

$$H_2 w = g.$$

Так как оператор $TN: E_2 \rightarrow F_1$ вполне непрерывен, то отсюда следует справедливость леммы 2.2.

§ 3. Построение граничных задач A^* , B^* и C^* , сопряженных к задачам A , B и C

Пусть L — дифференциальный оператор первого порядка, определенный на функциях, заданных в области D и принадлежащих к какому-либо классу функций.

Если $u = (u_1, \dots, u_m)$ и $v = (v_1, \dots, v_m)$ — две m -мерные вектор-функции, то через $[u, v]$ обозначим

$$[u, v] = \operatorname{Re} \iint_D \sum_{i=1}^m u_i(z) v_i(z) dx dy.$$

Сопряженным оператором L^* назовем дифференциальный оператор первого порядка, удовлетворяющий тождеству

$$[\varphi, L\psi] = [\psi, L^*\varphi] \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(D).$$

Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$Lu = f, \quad (3.1)$$

$$Mu|_\Gamma = 0. \quad (3.2)$$

Определение 1. Граничное условие

$$M^* v|_{\Gamma} = 0 \quad (3.3)$$

будем называть сопряженным к граничному условию (3.2) относительно оператора L , если равенство

$$[Lu, v] = [u, L^*v] \quad (3.4)$$

выполняется для любой вектор-функции u , удовлетворяющей на Γ условию (3.2), тогда и только тогда, когда на границе Γ вектор-функция v удовлетворяет условию (3.3) (см. работу [6]).

Граничную задачу

$$L^*v = g \quad (3.5)$$

$$M^*v|_{\Gamma} = 0 \quad (3.6)$$

назовем сопряженной граничной задачей к задаче (3.1), (3.2).

Требование принадлежности решений сопряженной задачи к какому-то определенному классу функций в каждом случае зависит от задачи (3.1), (3.2).

Сопряженные граничные задачи A^* , B^* и C^* будем строить, исходя из определения 1.

Вначале найдем сопряженную систему уравнений к системе (1.3), (1.4). Для этого, вводя матрицы $\bar{Q} = E + iQ_1$, где E — единичная матрица порядка m ,

$$Q = \begin{vmatrix} \frac{i\lambda_1 - 1}{i\lambda_1 + 1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{i\lambda_m - 1}{i\lambda_m + 1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & Q_2 & \dots \end{vmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \bar{Q}^{-1} A_1 & \frac{\bar{Q}^{-1} B_1}{2} \\ \frac{A_2}{2} & B_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\bar{Q}^{-1} A_1}{2} & \frac{\bar{Q}^{-1} \bar{B}_1}{2} \\ \frac{A_2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

и векторы $g = (f; F)$, $u = (v; w)$, перепишем систему уравнений (1.3), (1.4) в виде одного уравнения

$$Lu = g, \quad (3.7)$$

где

$$Lu = u_{\bar{r}} - Qu_x - Au - B\bar{u}.$$

Используя формулу Грина, нетрудно проверить [8], что

$$[Lu, \omega] = [u, L^*\omega] - \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \omega(t) \Lambda(t) u(t) ds, \quad (3.8)$$

где $\Lambda(t) = E t'(s) + Q t'(s)$, $t(s) = x(s) + iy(s)$, E — единичная матрица $m+n$ -го порядка, а

$$L^*\omega = -\omega_{\bar{t}} + Q\omega_s - A'\omega - \bar{B}'\bar{\omega},$$

здесь ('') означает транспонирование. Из (3.8) следует, что оператор L^* является сопряженным к оператору L .

Пользуясь определением 1 сопряженного граничного условия и тождеством (3.8), легко убедиться, что сопряженные граничные условия к условиям (1.5), (1.6) имеют вид

$$\omega_l|_{\Gamma \setminus \Gamma_l} = 0, \quad l = 1, \dots, m, \quad (3.9)$$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\bar{G}'^{-1} \Lambda^1 \tilde{\omega}}{2i} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (3.10)$$

где Λ^1 — n -мерная диагональная матрица с элементами на диагонали, совпадающими с последними n диагональными элементами матрицы Λ в том порядке, в каком они присутствуют в Λ , а

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m, \bar{\omega}), \quad \bar{\omega} = (\omega_{m+1}, \dots, \omega_{m+n}).$$

Граничная задача A^* . Найти непрерывно дифференцируемое в области D решение системы

$$L^*\omega = h, \quad (3.11)$$

принадлежащее классу $C_\alpha(D + \Gamma)$ ($0 < \alpha < \min(\nu, \frac{1}{2})$) и удовлетворяющее граничным условиям (3.9), (3.10).

Далее, поскольку характеристики системы (1.3) касаясь окружности Γ , делят ее на $2m$ частей $\gamma_1, \dots, \gamma_{2m}$ ($i_1 \neq i_2$ при $i_1 \neq i_2$), то не ограничивая общности, можем предположить, что $\Gamma_l = \bigcup_{j=l}^{l+m-1} \gamma_j$, $l = 1, \dots, m$.

Определим невырожденные матрицы G_k порядка $m+n$ для $k = 1, \dots, 2m$; (см. след. стр.)

$$G_k = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdot & 0 & & & \\ & & & & 0 & \\ & & & i & & \\ & & 0 & & & 0 \\ & & & & & i \\ \hline a_1^1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_k^1 & \\ \vdots & & & & \vdots & \\ a_1^n & & & & a_k^n & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \bar{G} \end{array} \right|$$

на γ_k при $1 \leq k \leq m$,

Граничная задача C^* . Найти непрерывно дифференцируемое в области D решение системы (3.11), принадлежащее классу $C_\alpha(D+\Gamma)$ ($0 < \alpha < \min\left(\frac{1}{2}, \nu\right)$) и удовлетворяющее граничному условию

$$\operatorname{Im} \left(\frac{G_k^{-1} \Lambda \omega}{2i} \right) \Big|_{\Gamma_k} = 0, \quad k = 1, \dots, 2m, \quad (3.13)$$

где (3.13) есть условие, сопряженное к граничному условию (1.9), (1.10).

Замечание 2. Легко проверить, что граничные задачи A^* , B^* и C^* являются задачами типа задач A , B и C для системы составного типа (3.11).

Таким образом, справедлива

Теорема 3.1. *Граничные задачи A^* , B^* и C^* нетеровы, их индексы равны между собой и равны*

$$-\frac{1}{\pi} [\arg \det G(t)]_\Gamma - n.$$

Для того чтобы доказать, что условия разрешимости задач A , B и C действительно записываются в виде (1.11), нам потребуется следующий факт [7].

Пусть B_j и G_j — банаховы пространства, G_j^* — сопряженное пространство к G_j ($j = 1, 2$). Рассмотрим уравнения

$$A_1(x) = T_1(x), \quad (3.14)$$

$$A_2(y) = T_2(y), \quad (3.15)$$

где A_j — нетеровы операторы, действующие из B_j в F_j , T_j — линейный оператор, действующий из G_j в F_j , α, β — заданные элементы из G_1 и G_2 , x, y — искомые элементы из B_1 и B_2 . Имеет место [7]

Теорема 3.2. Если $\operatorname{ind} A_1 + \operatorname{ind} A_2 = 0$ и для разрешимости уравнений (3.14), (3.15) необходимы условия

$$\alpha \perp v_j \quad (j = 1, \dots, k_2, \quad k_2 = \dim N(A_2)), \quad \beta \perp w_j \quad (j = 1, \dots, k_1, \\ k_1 = \dim N(A_1)),$$

где $v_1, \dots, v_{k_2}, w_1, \dots, w_{k_1}$ — некоторые линейно независимые элементы из G_1^* и G_2^* соответственно, то эти же условия достаточны для разрешимости уравнений (3.14), (3.15) и имеют место соотношения

$$\dim N(A_1) = \dim N(A_1^*), \quad \dim N(A_2) = \dim N(A_2^*).$$

Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства вектор-функций $u = (v, \omega)$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m; \omega)$ класса $C_\alpha(D+\Gamma)$, удовлетворяющих на Γ условиям (1.5), (1.6) и (3.9), (3.10), соответственно. G — банахово пространство вектор-функций $(f; F)$ класса $C^1(D+\Gamma) + C_\alpha(D+\Gamma)$.

Дифференциальные операторы L и L^* можно рассматривать как линейные операторы, действующие из E_1 в G и из E_2 в G , соответственно, с областями определения $D(L) = \{u \in E_1 \cap C^1(D) | Lu \in G\}$ и $D(L^*) = \{\omega \in E_2 \cap C^1(D) | L^*\omega \in G\}$.

При таком подходе задачи A и A^* эквивалентны, соответственно, уравнениям

$$Lu = g, \quad (3.16)$$

$$L^*\omega = h, \quad (3.17)$$

где g и h — заданные элементы пространства G , а u и ω — искомые элементы из $D(L)$ и $D(L^*)$ соответственно.

Теоремы 2.1 и 3.1 эквивалентны тому, что операторы L и L^* как операторы, действующие из E_1 в G и из E_2 в G , соответственно, нетеровы, причем $\text{ind } L + \text{ind } L^* = 0$.

Обращаясь к равенству (3.8), нетрудно заметить, что для разрешимости уравнений (3.16), (3.17) необходимы условия

$$[g, \omega_j^*] = 0 \quad (j = 1, \dots, k_1, k_1 = \dim N(L^*)), \quad (3.18)$$

$$[h, u_i^*] = 0 \quad (i = 1, \dots, k_2, k_2 = \dim N(L)), \quad (3.19)$$

где $\omega_j^*, \dots, \omega_{k_1}^*$ и $u_i^*, \dots, u_{k_2}^*$ являются полной линейно независимой системой решений однородных задач A и A^* соответственно. Далее, заметим, что теорема 3.2 справедлива и в том случае, когда операторы A_1 и A_2 не обязательно ограниченные, но имеют всюду плотную область определения.

Используя теорему 3.2, получим, что условия (3.18), (3.19) достаточны для разрешимости уравнений (3.16), (3.17).

Таким образом, справедливость теоремы 1 установлена.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю, профессору Н. Е. Товмасяну за постановку задач и ценные указания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 13.VII.1974

Ա. Ա. Անդրյան. Մի էանի եզրային խնդիրներ բազադրյալ տիպի հավասարումների սխեմայի համար (ամփոփում)

Առաջին կարգի բազադրյալ տիպի հավասարումների սխեմայի համար (հավասարումների թիվը ցանկացած է) ուսումնասիրվում են եզրային խնդիրներ սահմանափակ տիրույթներում.

Ապացուցված է, որ դրված խնդիրները նյութերի տիպի են, ենդեքսի համար ստացված է բանաձև.

Անհամասեռ խնդրի լուծելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները ձևակերպվում են համալուծ խնդրի լեզվով.

A. A. ANDRIAN. *Some boundary value problems for the systems of composite type (summary)*

For the systems of first order of composite type, with arbitrary number of equations, the boundary value problems in finite domain are considered.

All problems considered are of Njster type.

The formula for the index is given and the theory of conjugate problems is constructed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. В. Боярский. Некоторые граничные задачи для системы уравнений эллиптического типа на плоскости, ДАН СССР, 124, № 1, 1959, 15—18.
2. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
3. А. А. Андриян. Об одной граничной задаче для системы уравнений гиперболического типа, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., X, № 4, 1975, 329—341.
4. Н. И. Мухелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, М., 1972.
5. С. Г. Кривин. Липшицевы уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.
6. Н. Е. Товмасян. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, 11, № 1, 1966, 3—23.
7. Н. Е. Товмасян. Некоторые уравнения в банаховом пространстве и их приложения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 3, 1973, 181—189.
8. А. Джураев. Системы уравнений составного типа, М., 1972.