ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 4, 1976 Математика

Х. О. МОВСИСЯН

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОВТОРНО СХОДЯЩИХСЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ХААРА

## § 1. Введение

Будем рассматривать в единичном квадрате $[0,1] \times [0,1] \equiv [0,1]^2$ двойной ряд по системе Хаара

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} \chi_{nm}(x, y). \tag{1.1}$$

Мы скажем, что ряд (1.1) повторно суммируется по строкам к функции $f(x, y)$ на множестве $E = E_1 \times E_2 \subset [0,1]^2$, если при каждом фиксированном $m$, $m = 0, 1, 2, \cdots$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \chi_n(x) \tag{1.2}$$

сходится к функции $\varphi_m(x)$ на множестве $E_1$, и ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x) \chi_m(y) \tag{1.3}$$

сходится к функции $f(x, y)$ на множестве $E = E_1 \times E_2$.

Аналогично определяется повторная суммируемость по столбцам.

Обозначим через $[x_0]$ ($[y_0]$) отрезок, являющийся пересечением прямой $x = x_0$ ($y = y_0$) с единичным квадратом $[0,1]^2$.

В § 2 доказывается теорема единственности для рядов (1.1), повторно суммирующихся к нулю, а именно

Теорема 1. *Пусть*

1°. *Ряд* (1.1) *повторно суммируется к нулю по строкам всюду на единичном квадрате* $[0,1]^2$, *кроме, быть может, точек счетного числа отрезков* $[x_n]$, $n = 1, 2, \cdots$.

2°. *Для любой точки* $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ *и для любого фиксированного значения* $m$, $m=0, 1, 2, \cdots$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{n_k m}}{\chi_{n_k m}(x_0, y_0)} = 0, \tag{1.4}$$

*где* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *возрастающая последовательность всех номеров* $n$, *для которых* $\chi_{nm}(x_0, y_0) \neq 0$.

*Тогда* $a_{nm} = 0$ *при всех* $n, m = 0, 1, 2, \cdots$.

Далее в § 2 приводится пример двойного ряда по системе Хаара, который показывает, что в формулировке теоремы 1 надо потребовать повторную суммируемость ряда (1.1) по строкам для всех $y \in [0,1]$. А именно, существует ряд

$$\sum_{n,\, m=0}^{\infty} b_{nm} \chi_{nm}(x, y), \tag{1.5}$$

обладающий свойствами:

a) для любой точки $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ и для любого фиксированного значения $m$, $m = 0, 1, 2, \cdots$

$$\lim_{n \to \infty} b_{nm} \chi_{nm}(x_0, y_0) = 0; \tag{1.6}$$

в) Для любой точки $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ и для любого фиксированного значения $n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

$$\lim_{m \to \infty} b_{nm} \chi_{nm}(x_0, y_0) = 0; \tag{1.7}$$

c) Ряд (1.5) повторно суммируется к нулю по строкам всюду на единичном квадрате $[0,1]^2$, за исключением точек счетного числ отрезков $[y_n]$, $n = 1, 2, \cdots$;

d) Не все коэффициенты $b_{nm}$ равны нулю.

Этот пример доказывает также, что для двойных рядов Хаара не верны результаты работ [1], [2] о том, что если для каждой точки $x \in [0, 1]$, кроме, быть может счетного множества точек, некоторая зависящая от точки $x$ подпоследовательность $S_{n_k(x)}(x)$ частных сумм ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

сходится к функции $f(x)$*, то

$$a_n = \int_0^1 f(x) \chi_n(x)\, dx.$$

В самом деле, если построен ряд (1.5), удовлетворяющий условиям a), b), c), d), то для каждой точки $(x, y) \in [0,1]^2$, за исключением точек счетного числа отрезков $[y_n]$, $n = 1, 2, \cdots$, очевидно существуют возрастающие последовательности натуральных чисел $\{N_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{M_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что прямоугольные частичные суммы

$$S_{N_k(x,\, y),\, M_k(x,\, y)}(x, y)$$

ряда (1.5) стремятся к нулю при $k \to \infty$.

---

* В работе [1] предполагается ограниченность $f(x)$, а в [2], при более сильных ограничениях на коэффициенты $a_n$, полагается $f(x) \in L_1$.

В § 3 доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть ряд* (1.1) *обладает свойствами:*

1) *Для каждой точки* $(x, y) \in [0,1]^2$, *за исключением точек счетного числа отрезков* $[x_n]$ *и* $[y_n]$, $n = 1, 2, \cdots$ *существует (зависящая от точки* $(x, y)$*) возрастающоя последовательность* $\{N_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\lim_{k \to \infty} S_{N_k(x, y), N_k(x, y)}(x, y) = f(x, y), \tag{1.8}$$

*где* $f(x, y)$ — *ограниченная функция.*

2) *Для любой точки* $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$

$$\lim_{n+m \to \infty} a_{nm} \chi_{nm}(x_0, y_0) = 0. \tag{1.9}$$

*Тогда ряд* (1.1) *является рядом Фурье функции* $f(x, y)$ *по двойной системе Хаара, т. е.*

$$a_{nm} = (L) \iint_{[0,1]^2} f(x, y) \chi_{nm}(x, y)\, dxdy.$$

§ 2. Доказательство теоремы 1. Будем использовать следующую теорему, доказанную Ф. Г. Арутюняном и А. А. Талаляном (см. [3]).

Теорема А. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x), \tag{*}$$

где $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система Хаара, обладает свойствами:

1. Некоторая последовательность $\{S_{N_j}(x)\}$ частных сумм ряда (*) сходится к суммируемой функции $f(x)$ всюду на отрезке [0.1], кроме, быть может, счетного множества точек.

2. Для любой точки $x \in [0,1]$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x)},$$

где $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ суть все те номера $n$, для которых $\chi_n(x) \neq 0$.

Тогда ряд ( * ) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе Хаара.

Заметим тот очевидный факт, что условие (1.4) равносильно условию

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{n_k m}}{\chi_{n_k}(x_0)} = 0 \tag{2.1}$$

для любой точки $x_0 \in [0,1]$ и для любого фиксированного $m$, $m = 0, 1, \cdots$.

Тогда, в силу теоремы А, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что при любом $m$, $m = 0, 1, 2, \cdots$

$$\varphi_m(x) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} a_{im} \chi_i(x) = 0$$

почти всюду на [0.1].

Пусть при некотором $m_0 \geqslant 0$

$$\varphi_{m_0}(x) \neq 0, \ x \in G, \ \text{mes}\, G > 0. \tag{2.2}$$

Выберем точку $x_0$ так, чтобы

$$x_0 \in G, \ x_0 \neq x_n, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{2.3}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x_0) \chi_m(y),$$

который сходится к нулю всюду на отрезке [0.1]. Следовательно (см. [4], теорему 1)

$$\varphi_m(x_0) = 0; \ m = 0, 1, 2, \cdots,$$

что противоречит условиям (2.2) и (2.3). Теорема 1 доказана.

Перед тем, как перейти к построению ряда (1.5), дадим несколько определений и докажем несколько простых лемм.

Интервалы вида

$$\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \ 1 \leqslant i \leqslant 2^k, \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

будем называть интервалами Хаара ранга $k$.

Наибольший интервал, на котором функция Хаара $\chi_n(x) \neq 0$ почти всюду назовем носителем функции $\chi_n(x)$.

Через $(\Delta)_x$ и $(\Delta)_y$ будем обозначать проекции прямоугольника $\Delta$ на оси $x$ и $y$ соответственно.

Лемма 1. *Пусть даны положительное число* $\varepsilon$, *натуральные числа* $d_1$, $p'$ *и двоично-рациональный интервал* $(a, b)$. *Тогда существует полином по системе Хаара*

$$P(x) = \sum_{i=p_1}^{p_2} c_i \chi_i(x) \tag{2.4}$$

*и множества* $E$, $F$, *обладающие следующими свойствами:*

1°. $p_2 > p_1 > p'$, $\chi_i(x) = 0$ *при* $x \notin (a, b)$ *для всех* $i$, $p_1 \leqslant i \leqslant p_2$.

2°. *Множество* $E$ *есть сумма конечного числа непересекающихся двоично-рациональных интервалов, причем*

$$d_1 \varepsilon + P(x) = 0, \ x \in E.$$

3°. $F = [a, b] \setminus E = \bigcup_{i=1}^{q} \overline{\gamma}_i$, *где* $\gamma_i$, $i = 1, 2, \cdots, q$ — *непересекающиеся двоично-рациональные интервалы, причем*

$$0 < d_1 \varepsilon + P(x) = b_i \varepsilon \leqslant d_1 \varepsilon + \varepsilon = (d_1 + 1)\varepsilon, \; x \in \gamma_i, \; i = 1, 2, \cdots, q,$$

*где $b_i$ — некоторые натуральные числа.*

4°. $\max\limits_{x \in (a, b)} |c_i \chi_i(x)| = \varepsilon, \; p_1 \leqslant i \leqslant p_2.$

Доказательство. Интервал $(a, b)$ разобьем на интервалы такого ранга $k$, что $2^k > p'$ и перенумеруем их слева направо: $\Delta_k^{(1)}$, $\Delta_k^{(2)}, \cdots, \Delta_k^{(m)}$.

Пусть $\chi_{p_1}(x)$ — функция системы Хаара, носителем которой является интервал $\Delta_k^{(1)}$. Выберем $c_{p_1}$ так, чтобы

$$c_{p_1} \max_{\Delta_k^{(1)}} |\chi_{p_1}(x)| = \varepsilon.$$

Обозначим через $\delta_1'$ и $\delta_1''$ те интервалы, на которых функция $\chi_{p_1}(x)$ принимает соответственно положительные и отрицательные значения. Будем иметь

$$d_1 \varepsilon + c_{p_1} \chi_{p_1}(x) = \begin{cases} (d_1 + 1)\varepsilon & \text{при } x \in \delta_1' \\ (d_1 - 1)\varepsilon & \text{при } x \in \delta_1''. \end{cases}$$

Далее, через $\chi_{p_1}^{(1)}(x)$ обозначим ту функцию системы Хаара, носителем которой является интервал $\delta_1''$. Выберем $c_{p_1}^{(1)}$ так, чтобы

$$c_{p_1}^{(1)} \max_{\delta_1''} |\chi_{p_1}^{(1)}(x)| = \varepsilon.$$

Тогда будем иметь

$$d_1 \varepsilon + c_{p_1} \chi_{p_1}(x) = c_{p_1}^{(1)} \chi_{p_1}^{(1)}(x) = \begin{cases} d_1 \varepsilon & \text{при } x \in \delta_2' \\ (d_1 - 2)\varepsilon & \text{при } x \in \delta_2'', \end{cases}$$

где $\delta_2'$ и $\delta_2''$ те интервалы, на которых функция $\chi_{p_1}^{(1)}(x)$ принимает соответственно положительные и отрицательные значения.

Продолжая аналогичные построения, через $d_1$ шагов получим полином

$$Q_1(x) = c_{p_1} \chi_{p_1}(x) + \sum_{j=1}^{d_1 - 1} c_{p_1}^{(j)} \chi_{p_1}^{(j)}(x),$$

множества $E$ и $F_1$, обладающие следующими свойствами:

а) $d_1 \varepsilon + Q_1(x) = 0$ при $x \in E_1 \subset \Delta_k^{(1)}$, где $E_1$ — некоторый двоично-рациональный интервал.

в) $F_1 = \Delta_k^{(1)} \setminus E_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{q_1} \overline{\gamma}_i^{(1)}$, где $\gamma_i^{(1)}, i = 1, 2, \cdots, q_1$ — непересекающиеся двоично-рациональные интервалы, причем

$$0 < d_1 \varepsilon + Q_1(x) = b_i^{(1)} \varepsilon \leqslant (d_1 + 1)\varepsilon \text{ при } x \in \gamma_i^{(1)}, \; i = 1, 2, \cdots, q_1,$$

где $b_i^{(1)}$ — некоторые натуральные числа.

c) $\max\limits_{x\in(a,b)} |c_{p_1}^{(j)} \chi_{p_1}^{(j)}(x)| = \varepsilon$, $j = 1, 2, \cdots, (d_1 - 1)$, $\max\limits_{x\in(a,b)} |c_{p_1} \chi_{p_1}(x)| = \varepsilon$.

При помощи аналогичных построений на интервалах $\Delta_k^{(i)}$, $i = 2, 3, \cdots, m$, получим полиномы $Q_2(x), \cdots, Q_m(x)$ и множества $E_i$, $F_i$, $i = 2, 3, \cdots, m$, обладающие свойствами, аналогичные свойствам а), в), с).

Положим

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} Q_i(x) \equiv \sum_{l=p_1}^{p_2} c_l \chi_l(x),$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i, \quad F = \bigcup_{i=1}^{m} F_i.$$

Ясно, что полином $P(x)$, множества $E$ и $F$ удовлетворяют всем требованиям леммы 1.

Лемма 2. *Существует ряд*

$$\chi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(x), \tag{2.5}$$

*обладающий следующими свойствами:*

1°. *Ряд* (2.5) *сходится к некоторой ограниченной, неотрицательной функции* $F(x)$ *всюду на отрезке* $[0,1]$, *причем* $F(x) = 0$ *вне некоторого нигде не плотного совершенного множества* $P \subset [0,1]$ *положительной меры.*

2°. $\max |c_k \chi_k(x)| \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Возьмем последовательность чисел

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

Положим $c_0 \chi_0(x) = 1$ при $x \in [0,1]$. Применяя лемму 1, где вместо $\varepsilon$, $d_1$, $p'$, $(a, b)$ взяты, соответственно, $\varepsilon_1$, 2, 0, $(0,1)$, получим полином $P_1(x)$ и множества $E$, $F_1$.

Пусть после $n$-кратного применения леммы 1 получен полином

$$P_n(x) = \sum_{l=0}^{q_n} c_l \chi_l(x), \quad c_0 = 1,$$

множества $E_n$ и $F_n$ такие, что:

Множество $E_n$ есть сумма конечного числа непересекающихся двоично-рациональных интервалов, причем

$$P_n(x) = 0 \text{ при } x \in E_n;$$

$F_n = [0,1] \setminus E_n = \bigcup\limits_{i=1}^{m_n} \overline{\gamma_i^{(n)}}$, где $\gamma_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \cdots, m_n$ — непересекающиеся двоично-рациональные интервалы, причем

$$0 < P_n(x) = b_i^{(n)} \varepsilon_{n+1} \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \quad \text{при} \quad x \in \gamma_i^{(n)},$$

где $b_i^{(n)}$ — натуральные числа.

Применяя лемму 1 в каждом интервале $\gamma_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \cdots, m_n$, взяв вместо $\varepsilon$, $d_i\varepsilon$, $p'$, соответственно, $\varepsilon_{n+1}$, $b_i^{(n)} \varepsilon_{n+1}$, $q_n$, получим полином

$$P_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{q_{n+1}} c_i \chi_i(x), \quad q_{n+1} > q_n$$

и множества $E_{n+1}$, $F_{n+1}$, обладающие свойствами:

Множество $E_{n+1}$ есть сумма конечного числа двоично-рациональных интервалов (полуоткрытых или открытых), причем

$$P_{n+1}(x) = 0, \quad x \in E_{n+1} \supset E_n;$$

$F_{n+1} = [0,1] \setminus E_{n+1} = \bigcup\limits_{i=1}^{m_{n+1}} \gamma_i^{(n+1)}$, где $\gamma_i^{(n+1)}$, $i = 1, 2, \cdots, m_{n+1}$ — непересекающиеся двоично-рациональные интервалы, причем

$$0 < P_{n+1}(x) = b_i^{(n+1)} \varepsilon_{n+2} \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \quad \text{при} \quad x \in \gamma_i^{(n+1)};$$

$$\max_{x \in [0,1]} |c_i \chi_i(x)| \leqslant \varepsilon_{n+1} \quad \text{при} \quad q_n < i \leqslant q_{n+1}.$$

Легко убедиться в том, что полученный таким образом ряд удовлетворяет условиям 1°, 2°.

Лемма 3. *Пусть ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

*сходится к ограниченной, неотрицательной функции $f(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$ причем $f(x) = 0$ вне некоторого совершенного нигде не плотного множества $Q \subset [0,1]$.*

*Тогда для любого натурального числа $m \geqslant 1$ существует ряд*

$$\sum_{n=m}^{\infty} b_n \chi_n(x) \tag{A}$$

*и совершенное, нигде не плотное множество $P \subset [0,1]$, такие, что*

а) $P \cap Q = \varnothing$;

в) *ряд (А) сходится к ограниченной неотрицательной функции $F(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$, причем*

$$F(x) = f(x) \quad \textit{при} \quad x \notin P.$$

Доказательство. Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^{m}$ — интервалы постоянств множества функций $\chi_0(x)$, $\chi_1(x), \cdots, \chi_{m-1}(x)$, причем

$$\bigcup_{i=1}^{m} \overline{\Delta}_i = [0,1], \ \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$

Эти интервалы определяются следующим образом.

Если $m-1 = 2^k - 1$, где $k \geqslant 0$, то

$$\Delta_i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \ i = 1, 2, \cdots, m.$$

Если $m-1 = 2^k + p$, где $0 \leqslant p < 2^k - 1$, то

$$\Delta_i = \left(\frac{i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^{k+1}}\right) \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant 2p+2,$$

$$\Delta_i = \left(\frac{i-p-2}{2^k}, \frac{i-p-1}{2^k}\right) \text{ при } 2p+2 < i \leqslant m.$$

Так как множество $Q$ нигде не плотно на $[0,1]$, то существуют интервалы Хаара $\{\delta_i\}_{i=1}^{m}$ такие, что

$$\delta_i \subset \Delta_i, \ i = 1, 2, \cdots, m \text{ и } Q \cap \bigcup_{i=1}^{m} \delta_i = \varnothing.$$

Положим

$$F_1(x) = \begin{cases} m_i & \text{при } x \in \delta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ f(x) & \text{при } x \in [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \delta_i, \end{cases}$$

причем числа $m_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$, выбраны так, чтобы

$$\int_{\Delta_i} F_1(x)\, dx = 0, \ i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.6}$$

Если через $\Delta^{(k)}$ обозначить носитель функции $\chi_k(x)$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, то

$$\Delta_+^{(k)} = \bigcup_{n=1}^{r_k} \Delta_{i_n}, \ \Delta_-^{(k)} = \bigcup_{n=1}^{s_k} \Delta_{j_n}, \ 1 \leqslant i_n, \ j_n \leqslant m-1,$$

где $\Delta_+^{(k)} = \{x;\ \chi_k(x) > 0\}$, $\Delta_-^{(k)} = \{x;\ \chi_k(x) < 0\}$.

Тогда, в силу (2.6)

$$\int_0^1 F_1(x)\chi_k(x)\, dx = \max|\chi_k(x)| \int_{\Delta_+^{(k)}} F_1(x)\, dx - \max|\chi_k(x)| \int_{\Delta_-^{(k)}} F_1(x)\, dx =$$

$$= \max|\chi_k(x)| \sum_{n=1}^{r_k} \int_{\Delta_{i_n}} F_1(x)\, dx - \max|\chi_k(x)| \sum_{n=1}^{s_k} \int_{\Delta_{j_n}} F_1(x)\, dx = 0. \tag{2.7}$$

Для каждого $i = 1, 2, \cdots, m$ ряд (2.5) отобразим на отрезок $\overline{\delta}_i$, заранее умножая на $m_i$. Тогда получится ряд

$$m_i + \sum_{k=k_i}^{\infty} c_k^{(i)} \chi_k(x), \tag{2.8}$$

причем $c_k^{(i)} = 0$, когда носитель функции $\chi_k(x)$ не содержится в $\delta_i$. Ряд (2.8) при каждом $i$, $i = 1, 2, \cdots, m$, всюду сходится к ограниченной, неотрицательной функции $\varphi_i(x)$ на отрезке $\bar{\delta}_i$, причем $\varphi_i(x) = 0$ вне некоторого совершенного, нигде не плотного множества $P_i \subset \delta_i$.

Положим

$$F(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) \text{ при } x \in \delta_i, \ i = 1, 2, \cdots, m \\ f(x) \text{ при } x \in [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \delta_i. \end{cases}$$

Обозначим через $b_n$ коэффициенты Фурье функции $F(x)$ по системе Хаара. В силу условия (2.7) и определения ряда (2.8)

$$b_k = \int_0^1 F(x) \chi_k(x)\, dx = \int_0^1 F_1(x) \chi_k(x)\, dx = 0, \ k = 0, 1, \cdots, m-1,$$

так как

$$\int_{\delta_i} \varphi_i(x)\, dx = \int_{\delta_i} m_i\, dx.$$

Ряд

$$\sum_{n=m}^{\infty} b_n \chi_n(x), \tag{2.9}$$

являющийся суммой рядов Фурье функций $f(x)$, $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, \cdots, m$, сходится к функции $F(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$.

Положим

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i.$$

Ясно, что ряд (2.9) и множество $P$ удовлетворяют требованиям леммы 3.

Перейдем к построению ряда (1.5).

Положим

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n0} \chi_n(x) \chi_0(y) \equiv \chi_0(y) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(x), \tag{2.10}$$

где ряд, стоящий в правой части (2.10), совпадает с рядом (2.5). Этот одномерный ряд сходится всюду на отрезке $[0,1]$ к ограниченной, неотрицательной функции $F_0(x)$, причем $F_0(x) = 0$ вне некоторого совершенного, нигде не плотного множества $P_0 \subset [0,1]$. Поэтому ряд (2.10) будет сходиться всюду на единичном квадрате $[0,1]^2$ к ограниченной функции $F_0(x)\chi_0(y)$, причем $F_0(x)\chi_0(y) = 0$ вне множества $P_0 \times [0,1]$.

Пусть уже построены ряды

$$\sum_{n=i}^{\infty} b_{ni} \chi_n(x), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, s, \tag{2.11}$$

обладающие следующими свойствами:

для каждого $i$, $i = 0, 1, \cdots, s$, ряд (2.11) сходится всюду на $[0,1]$ к ограниченной функции $F_i(x)$;

$F_i(x) = 0$ вне множества $\bigcup_{k=0}^{i} P_k$, где $P_k$, $k = 0, 1, \cdots, i$ — непересекающиеся, совершенные, нигде не плотные множества.

Построим ряд

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} b_{n,\, s+1} \chi_n(x) \tag{2.12}$$

следующим образом.

Положим

$$\sigma_s(x, y) = \sum_{i=0}^{s} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_{ni} \chi_n(x) \right] \chi_i(y) = \sum_{i=0}^{s} F_i(x) \chi_i(y). \tag{2.13}$$

Пусть $\{\chi_{i_k}(y)\}_{k=0}^{\tau_s}$* — все функции системы Хаара носители которых содержат внутри себя интервал $\Delta_{s+1}$, являющийся носителем функции $\chi_{s+1}(y)$. Положим

$$\Phi_{i_k}(x) = \max_{y \in [0,1]} |\chi_{i_k}(y)| F_{i_k}(x), \quad k = 0, 1, \cdots, \tau_s. \tag{2.14}$$

Тогда, так как при $(x, y) \in [0,1] \times \Delta_{s+1}$

$$\sigma_s(x, y) = \sum_{k=0}^{\tau_s} F_{i_k}(x) \chi_{i_k}(y),$$

то

$$\sigma_s(x, y) = \sum_{k=0}^{\tau_s} \lambda_k \Phi_{i_k}(x), \tag{2.15}$$

где

$$\lambda_k = 1, \text{ когда } \Delta_{s+1} \subset \Delta_{i_k}^{+} \equiv \{y;\ \chi_{i_k}(y) > 0\},$$

$$\lambda_k = -1, \text{ когда } \Delta_{s+1} \subset \Delta_{i_k}^{-} \equiv \{y;\ \chi_{i_k}(y) < 0\}. \tag{2.16}$$

Ясно, что при любом фиксированном $x \in [0,1]$

$$\sigma_s(x, y) = \text{const при } y \in \Delta_{s+1}. \tag{2.17}$$

Положим

$$f_s(x) = \frac{1}{\max\limits_{[0,1]} |\chi_{s+1}(y)|} \sum_{k=0}^{\tau_s} \lambda_k \Phi_{i_k}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} d_k \chi_k(x). \tag{2.18}$$

---

* Ясно, что $\chi_{i_0}(y) \equiv \chi_0(y)$.

Ряд (2.18) сходится всюду на отрезке [0,1], причем

$$f_s(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in} Q_s = \bigcup_{l=0}^{s} P_l. \tag{2.19}$$

Применяя лемму 3, где вместо $f(x)$, $Q$, $m$ взяты, соответственно, $f_s(x)$, $Q_s$, $s+1$, получим всюду сходящийся на [0,1] ряд

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} b_{n, s+1} \chi_n(x) = F_{s+1}(x) \tag{2.20}$$

и совершенное, нигде не плотное множество $P_{s+1}$, такие, что

$$P_{s+1} \cap \bigcup_{l=0}^{s} P_l = \varnothing, \tag{2.21}$$

$$F_{s+1}(x) = f_s(x) \text{ при } x \overline{\in} P_{s+1}. \tag{2.22}$$

Таким образом, ряд (2.12) построен.

Докажем, что если $x_0 \overline{\in} P_{s+1}$, то $\sigma_{s+1}(x_0, y) = 0$ при $y \in \Delta_{s+1}^{-}$. Из (2.15), (2.18), (2.19), (2.20), (2.22) следует, что

$$\sigma_{s+1}(x_0, y) = \sigma_s(x_0, y) + \chi_{s+1}(y) \sum_{n=s+1}^{\infty} b_{n, s+1} \chi_n(x_0) = \sigma_s(x_0, y) +$$

$$+ \chi_{s+1}(y) F_{s+1}(x_0) = \sigma_s(x_0, y) + \chi_{s+1}(y) f_s(x_0) = \sum_{k=0}^{\tau_s} \lambda_k \Phi_{i_k}(x_0) +$$

$$+ \frac{\chi_{s+1}(y)}{\max |\chi_{s+1}(y)|} \sum_{k=0}^{\tau_s} \lambda_k \Phi_{i_k}(x_0) = 0$$

при $y \in \Delta_{s+1}^{-}$

Применим лемму 3 бесконечное число раз. Докажем, что построенный таким образом двойной ряд повторно суммируется к нулю всюду на единичном квадрате $[0,1]^2$, за исключением точек счетного числа отрезков $[y_n]$, $n = 1, 2, \cdots$, где $y_n$ — все двоично-рациональные точки отрезка [0,1].

Пусть $y_0 \in [0,1]$ — произвольное двоично-иррациональное число. Покажем, что построенный двойной ряд повторно суммируется к нулю в произвольно взятой точке $(x_0, y_0) \in [y_0]$.

Если $x_0 \overline{\in} \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k$, то утверждение очевидно. Пусть $k_0$ — то наименьшее целое число ($k_0 \geqslant 0$), что $x_0 \in P_{k_0}$. Обозначим через $\{\Delta_{k_i}\}_{i=0}^{\infty}$ последовательность вложенных интервалов Хаара, которые стягиваются в точке $y_0$ ($\Delta_{k_i}$ — носитель функции $\chi_{k_i}(y)$). Обозначим через $\Delta_{m_1}$ тот первый интервал из последовательности $\{\Delta_{k_i}\}_{i=0}^{\infty}$, для которого $y_0 \in \Delta_{m_1}^{-}$ (такой интервал существует, так как $y_0$ — двоично-иррациональное число).

Так как $P_{k_0} \cap P_{m_1} = \varnothing$, то $x_0 \overline{\in} P_{m_1}$. Тогда по вышеуказанному свойству будем иметь $\sigma_{m_1}(x_0, y) = 0$ при $y \in \Delta_{m_1}^{-}$ и, в частности, $\sigma_{m_1}(x_0, y_0) = 0$.

Так как $P_j \cap \bigcup_{l=0}^{m_1} P_l = \varnothing$ при $j > m_1$, то $s_j(x_0, y_0) = 0$ при $j > m_1$, т. е. построенный двойной ряд повторно суммируется к нулю в точке $(x_0, y_0)$.

§ 3. Доказательство теоремы 2. Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 3.1. *Пусть при некотором* $p_0$

$$S_{p_0p_0}(x, y) > c > 0 \tag{3.1}$$

*при* $(x, y) \in \Delta_{p_0p_0}$, *где* $\Delta_{p_0p_0}$ — *некоторый прямоугольник постоянства частной суммы* $S_{p_0p_0}(x, y)$. *Тогда для любого отрезка* $[x_0]$ *можно найти число* $p > p_0$ *и прямоугольник* $\Delta_{pp}$ *такие, что*

1°. $\bar{\Delta}_{pp} \subset \bar{\Delta}_{p_0p_0}$,

2°. $[x_0] \cap \bar{\Delta}_{pp} = \varnothing$,

3°. $S_{nn}(x, y) > c$ *при* $(x, y) \in \Delta_{pp}$, $p_0 < n \leqslant p$.

Лемма 3.2. *Пусть при некотором* $p$

$$S_{pp}(x, y) > c > 0$$

*при* $(x, y) \in \Delta_{pp}$, *где* $\Delta_{pp}$ — *некоторый прямоугольник постоянства частной суммы* $S_{pp}(x, y)$. *Тогда для любого отрезка* $[y_0]$ *можно найти число* $p_1 > p$ *и прямоугольник* $\Delta_{p_1p_1}$ *такие, что*

1°. $\bar{\Delta}_{p_1p_1} \subset \bar{\Delta}_{pp}$,

2°. $[y_0] \cap \bar{\Delta}_{p_1p_1} = \varnothing$,

3°. $S_{nn}(x, y) > c$ *при* $(x, y) \in \Delta_{p_1p_1}$, $p < n \leqslant p_1$.

Лемма 3.3. *Пусть при некотором* $p_0$ $S_{p_0p_0}(x, y) > c > 0$ *при* $(x, y) \in \Delta_{p_0p_0}$, *где* $\Delta_{p_0p_0}$ — *некоторый прямоугольник постоянства частной суммы* $S_{p_0p_0}(x, y)$. *Тогда для любых отрезков* $[x_0]$ *и* $[y_0]$ *можно найти число* $p_1 > p_0$ *и прямоугольник* $\Delta_{p_1p_1}$ *такие, что*

1°. $\bar{\Delta}_{p_1p_1} \subset \bar{\Delta}_{p_0p_0}$,

2°. $[x_0] \cap \bar{\Delta}_{p_1p_1} = \varnothing$, $[y_0] \cap \bar{\Delta}_{p_1p_1} = \varnothing$,

3°. $S_{nn}(x, y) > c$ *при* $(x, y) \in \Delta_{p_1p_1}$, $p_0 \leqslant n \leqslant p_1$.

Лемма 3.3 вытекает из лемм 3.1 и 3.2. Докажем лемму 3.1. Лемма 3.2 доказывается аналогично.

Возьмем $\varepsilon$ такое, что

$$S_{p_0p_0}(x, y) = c + \varepsilon. \tag{3.2}$$

Пусть $\chi_{k_1}(x)$ и $\chi_{m_1}(y)$ — первые функции системы Хаара, равные нулю вне интервалов $(\Delta_{p_0p_0})_x$ и $(\Delta_{p_0p_0})_y$ соответственно.

Допустим, что

$$k_1 \geqslant m_1. \tag{3.3}$$

Если $k_1 < m_1$, то лемма доказывается аналогичными рассуждениями.

При $(x, y) \in \Delta_{p_0p_0}$ будем иметь

$$S_{p_0m_1}(x, y) = S_{p_0p_0}(x, y) + \chi_{m_1}(y) \sum_{l=0}^{p_0} a_{lm_1} \chi_l(x) = c + \varepsilon +$$

$$+ \chi_{m_1}(y) \sum_{l=0}^{p_0} a_{lm_1} \chi_l(x). \tag{3.4}$$

Ясно, что

$$\sum_{l=0}^{p_0} a_{lm_1} \chi_l(x) \equiv \text{const} \tag{3.5}$$

при $x \in (\Delta_{p_0p_0})_x$. Поэтому

$$S_{p_0m_1}(x, y) \geqslant c + \varepsilon \tag{3.6}$$

на некотором своем прямоугольнике постоянства $\Delta_{p_0m_1}$, причем

$$\Delta_{p_0m_1} \subset \Delta_{p_0p_0}, \ (\Delta_{p_0p_0})_x \equiv (\Delta_{p_0m_1})_x, \ \text{mes}\, \Delta_{p_0m_1} = \frac{1}{2} \text{mes}\, \Delta_{p_0p_0}. \tag{3.7}$$

При $(x, y) \in \Delta_{p_0m_1}$ будем иметь

$$S_{k_1m_1}(x, y) = S_{p_0m_1}(x, y) + \chi_{k_1}(x) \sum_{l=\rho}^{m_1} a_{k_1l} \chi_l(y). \tag{3.8}$$

Обозначим через $\Delta_{k_1m_1}^{(i)}$, $i = 1, 2$, те прямоугольники постоянства частной суммы $S_{k_1m_1}(x, y)$, для которых

$$\Delta_{k_1m_1}^{(i)} \subset \Delta_{p_0m_1}, \ (\Delta_{k_1m_1}^{(1)})_y \equiv (\Delta_{k_1m_1}^{(2)})_y, \ \text{mes}\, \Delta_{k_1m_1}^{(i)} = \frac{1}{2} \text{mes}\, \Delta_{p_0m_1}, \ i=1, 2. \tag{3.9}$$

Так как

$$\sum_{l=0}^{m_1} a_{k_1l} \chi_l(y) \equiv \text{const} \quad \text{при } y \in (\Delta_{p_0m_1})_y,$$

то априори возможны два случая:

I) $S_{k_1m_1}(x, y) > c$ при $(x, y) \in \Delta_{k_1m_1}^{(i)}$, $i = 1, 2$,

II) $S_{k_1m_1}(x, y) > c$ при $(x, y) \in \Delta_{k_1m_1}^{(1)}$ и $S_{k_1m_1}(x, y) < c$ при $(x, y) \in \Delta_{k_1m_1}^{(2)}$.

Предположим, что имеет место случай II). Тогда ясно, что

$$\max_{(x, y) \in \Delta_{p_0m_1}} \left| \chi_{k_1}(x) \sum_{l=0}^{m_1} a_{k_1l} \chi_l(y) \right| > \varepsilon, \tag{3.10}$$

и поэтому

$$\max_{[0, 1]^2} |a_{k_1l_1} \chi_{k_1}(x) \chi_{l_1}(y)| > \frac{\varepsilon}{m_1} \tag{3.11}$$

при некотором $i_1$, $0 \leqslant i_1 \leqslant m_1$.

Ясно, что тогда

$$S_{k_1 m_1}(x, y) > c + 2\varepsilon \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(1)}_{k_1 m_1}. \tag{3.12}$$

Пусть $\chi_{k_1}(x)$ и $\chi_{m_1}(y)$ — первые функции системы Хаара, равные нулю вне интервалов $(\Delta_{k_1 m_1})_x$ и $(\Delta_{k_1 m_1})_y$, соответственно. Из условия (3.3) вытекает, что $k_2 \geqslant m_2$, а из (3.12) ясно, что

$$S_{k_1 m_2}(x, y) > c + 2\varepsilon \tag{3.13}$$

на некотором своем прямоугольнике постоянства $\Delta_{k_1 m_2}$, причем

$$\Delta_{k_1 m_2} \subset \Delta_{k_1 m_1}, \ (\Delta_{k_1 m_1})_x \equiv (\Delta_{k_1 m_2})_x, \ \text{mes}\, \Delta_{k_1 m_2} = \frac{1}{2} \text{mes}\, \Delta_{k_1 m_1}. \tag{3.14}$$

Обозначим через $\Delta^{(i)}_{k_2 m_2}$, $i = 1, 2$, те прямоугольники постоянства частной суммы $S_{k_2 m_2}(x, y)$, для которых

$$\Delta^{(i)}_{k_2 m_2} \subset \Delta_{k_1 m_2}, \ (\Delta^{(1)}_{k_2 m_2})_y \equiv (\Delta^{(2)}_{k_2 m_2})_y, \ \text{mes}\, \Delta^{(i)}_{k_2 m_2} = \frac{1}{2} \text{mes}\, \Delta_{k_1 m_2}, \ i = 1, 2. \tag{3.15}$$

Так как

$$\sum_{l=0}^{m_2} a_{k_2 l}\, \chi_l(y) \equiv \text{const} \quad \text{при } y \in (\Delta_{k_1 m_2})_y,$$

то опять возможны только два случая

I) $S_{k_2 m_2}(x, y) > c$ при $(x, y) \in \Delta^{(i)}_{k_2 m_2}$, $i = 1, 2$;

II) $S_{k_2 m_2}(x, y) > c + 2\varepsilon$ при $(x, y) \in \Delta^{(1)}_{k_2 m_2}$

и $S_{k_2 m_2}(x, y) < c$ при $(x, y) \in \Delta^{(2)}_{k_2 m_2}$.

Предположим, что опять имеет место случай II). Тогда аналогично предыдущему (см. (3.10) и (3.11)) будем иметь

$$\max_{[0,1]^2} |a_{k_2 i_2} \chi_{k_2}(x) \chi_{i_2}(y)| > \frac{2\varepsilon}{m_1 + 1}, \ 0 \leqslant i_2 \leqslant m_2, \tag{3.16}$$

$$S_{k_2 m_2}(x, y) > c + 4\varepsilon \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(1)}_{k_2 m_2}. \tag{3.17}$$

Проведем аналогичные рассуждения при условии, что на любом $i$-ом шагу $i = 1, 2, 3, \cdots$ имеет место случай II). Тогда на $n$-ом шагу будем иметь:

$$S_{k_n m_n}(x, y) > c + 2^{n-1} \cdot \varepsilon \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(1)}_{k_n m_n} \text{ и } S_{k_n m_n}(x, y) < c$$

при $(x, y) \in \Delta^{(2)}_{k_n m_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, $k_n \geqslant m_n$.

Ясно, что при некотором $i_n$

$$\max_{[0,1]^2} |a_{k_n i_n} \chi_{k_n}(x) \cdot \chi_{i_n}(y)| > \frac{2^{n-1}\varepsilon}{m_1 + n - 1}, \ 0 \leqslant i_n \leqslant m_n, \ n = 1, 2, \cdots, \tag{3.18}$$

$$S_{k_n m_n}(x, y) > c + 2^n \varepsilon \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(i)}_{k_n m_n}, \tag{3.19}$$

причем

$$\Delta^{(i)}_{k_n m_n} \subset \Delta_{k_{n-1} m_n}, \quad (\Delta^{(1)}_{k_n m_n})_y \equiv (\Delta^{(2)}_{k_n m_n})_y, \tag{3.20}$$

$$\operatorname{mes} \Delta^{(i)}_{k_n m_n} = \frac{1}{2} \operatorname{mes} \Delta_{k_{n-1} m_n}, \quad i=1, 2, \; n=1, 2, \cdots.$$

Из условия (3.20) вытекает, что прямоугольники $\overline{\Delta}_{k_n m_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, имеют некоторую общую точку $(\xi_0, \eta_0) \in [0,1]^2$. Так как

$$|a_{k_n l_n} \chi_{k_n}(\xi_0) \chi_{l_n}(\eta_0)| \geqslant \frac{1}{4} \max_{[0,1]^2} |a_{k_n l_n} \chi_{k_n}(x) \chi_{l_n}(y)|,$$

то из (3.18) следует, что в точке $(\xi_0, \eta_0)$ нарушается условие (1.9). Следовательно, на некотором шагу должен иметь место случай I.

Пусть $n_0$—наименьшее натуральное число, при котором имеет место случай I, т. е.

$$S_{k_{n_0} m_{n_0}}(x, y) > c \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(i)}_{k_{n_0} m_{n_0}}, \quad i = 1, 2.$$

Если

$$[x_0] \cap \{\overline{\Delta}^{(1)}_{k_{n_0} m_{n_0}} \cap \overline{\Delta}^{(2)}_{k_{n_0} m_{n_0}}\} = \varnothing, \tag{3.21}$$

то в качестве $\Delta_{pp}$ возьмем тот из $\Delta^{(i)}_{k_{n_0} m_{n_0}}$, $i = 1, 2$, который не пересекается с отрезком $[x_0]$. В качестве $S_{pp}(x, y)$ возьмем $S_{k_{n_0} k_{n_0}}(x, y)$. Ясно, что прямоугольник $\Delta_{k_{n_0} m_{n_0}}$ является прямоугольником постоянства для частной суммы $S_{k_{n_0} k_{n_0}}(x, y)$, причем

$$S_{k_{n_0} k_{n_0}}(x, y) = S_{k_{n_0} m_{n_0}}(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Delta_{k_{n_0} m_{n_0}}.$$

Выполнение условия 3° следует из (3.19).

Если

$$[x_0] \cap \{\overline{\Delta}^{(1)}_{k_{n_0} m_{n_0}} \cap \overline{\Delta}^{(2)}_{k_{n_0} m_{n_0}}\} \neq \varnothing,$$

то путем аналогичных рассуждений в любом из прямоугольников $\Delta^{(i)}_{k_{n_0} m_{n_0}}$, $i = 1, 2$, придем к условию, аналогичному (3.21).

Лемма 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Не нарушая общности можно считать, что

$$|f(x, y)| \leqslant 1 \text{ при } (x, y) \in [0,1]^2. \tag{3.22}$$

Положим

$$b_{ij} = \iint\limits_{[0,1]^2} f(x, y) \chi_i(x) \chi_j(y) \, dxdy$$

и

$$\sigma_{nm}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \chi_i(x) \chi_j(y). \tag{3.23}$$

Нетрудно доказать, что частные суммы $\sigma_{nm}(x, y)$ на своих прямоугольниках постоянства равны интегральному среднему функции $f(x, y)$ в соответствующих прямоугольниках. Тогда по теореме 5 работы [5]

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{nn}(x, y) = f(x, y) \text{ почти всюду на } [0,1]^2. \tag{3.24}$$

В силу (3.22) и вышеуказанного свойства частичных сумм $\sigma_{nm}(x, y)$

$$|\sigma_{nm}(x, y)| \leqslant 1, \ (x, y) \in [0,1]^2, \ n, \ m = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.25}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} c_{nm} \chi_{nm}(x, y), \tag{3.26}$$

где $c_{nm} = a_{nm} - b_{nm}$ и положим

$$Q_{nm}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} \chi_i(x) \chi_j(y).$$

А'приори возможны два случая.

I) Частные суммы $Q_{nn}(x, y)$ равномерно ограничены на $[0,1]^2$.

II) Частные суммы $Q_{nn}(x, y)$ не ограничены в совокупности.

Пусть имеет место случай II. Тогда существует точка $(x_0, y_0) \in \in [0,1]^2$ с двоично-иррациональными координатами и число $p_0$ такие, что

$$|Q_{p_0 p_0}(x_0, y_0)| > 3. \tag{3.27}$$

В силу (3.26)

$$Q_{nn}(x, y) = S_{nn}(x, y) - \sigma_{nn}(x, y), \tag{3.28}$$

а ввиду (3.25) и (3.28)

$$S_{p_0 p_0}(x_0, y_0) \geqslant 2 \text{ или } S_{p_0 p_0}(x_0, y_0) \leqslant -2. \tag{3.29}$$

Не нарушая общности можно предполагать, что имеет место первое неравенство. В противном случае нужно рассматривать ряд

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} - a_{nm} \chi_{nm}(x, y).$$

Так как $x_0$ и $y_0$—двоично-иррациональные числа, то

$$S_{p_0 p_0}(x, y) > 2 \tag{3.30}$$

при $(x, y) \in \Delta_{p_0 p_0}$, где $\Delta_{p_0 p_0}$ — прямоугольник постоянства частной суммы $S_{p_0 p_0}(x, y)$, содержащий точку $(x_0, y_0)$.

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество абсцисс всех точек, в которых не выполняется условие (1.8), и всех двоично-рациональных точек на [0,1], а $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество ординат всех точек, в которых не выполняется условие (1.8), и всех двоично-рациональных точек на [0,1].

Из (3.30) с применением леммы 3.3 при $[x_0] \equiv [\xi_i]$, $[y_0] \equiv [\eta_i]$ найдем натуральное число $p_1 > p_0$ такое, что

$$[\xi_1]\cap\bar{\Delta}_{p_1p_1}=\varnothing,\ [\eta_1]\cap\bar{\Delta}_{p_1p_1}=\varnothing,\ \bar{\Delta}_{p_1p_1}\subset\bar{\Delta}_{p_0p_0},$$

$$S_{nn}(x,\ y)>2 \text{ при } (x,\ y)\in\Delta_{p_1p_1},\ p_0\leqslant n\leqslant p_1.$$

Далее, применяя лемму 3.3 при $p_0=p_1$, $c=2$, $[x_0]=[\xi_2]$, $[y_0]=$ $=[\eta_2]$, найдем натуральное число $p_2$ такое, что

$$[\xi_2]\cap\bar{\Delta}_{p_2p_2}=\varnothing,\ [\eta_2]\cap\bar{\Delta}_{p_2p_2}=\varnothing,\ \bar{\Delta}_{p_2p_2}\subset\bar{\Delta}_{p_1p_1},$$

$$S_{nn}(x,\ y)>2 \text{ при } (x,\ y)\in\Delta_{p_2p_2},\ p_1\leqslant n\leqslant p_2.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, построим последовательность натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$p_0<p_1<\cdots<p_n<\cdots, \tag{3.31}$$

$$[\xi_k]\cap\bar{\Delta}_{p_kp_k}=\varnothing,\ [\eta_k]\cap\bar{\Delta}_{p_kp_k}=\varnothing,\ \bar{\Delta}_{p_kp_k}\subset\bar{\Delta}_{p_{k-1}\,p_{k-1}},\ k=1,\ 2,\cdots, \tag{3.32}$$

$$S_{nn}(x,\ y)>2 \text{ при } (x,\ y)\in\Delta_{p_kp_k},\ p_0\leqslant n\leqslant p_k,\ k=1,2,\cdots. \tag{3.33}$$

Ясно, что пересечение всех $\bar{\Delta}_{p_kp_k}$, $k=1,\ 2,\cdots$, состоит из некоторой точки $(\xi_0,\ \eta_0)$ с двоично-иррациональными координатами, отличной от всех точек, где не выполняется условие (1.8).

Так как $(\xi_0,\ \eta_0)\in\Delta_{p_kp_k}$ при всех $k=1,\ 2,\cdots$, то, в силу (3.31) и (3.33), будем иметь

$$S_{nn}(\xi_0,\ \eta_0)>2 \text{ при всех } n\geqslant p_0,$$

которое противоречит условию 1) теоремы 2 и (3.22).

Таким образом, случай II) не может выполняться.

Пусть имеет место случай I). Тогда по теореме Рисс—Фишера ряд (3.26) является рядом Фурье некоторой функции $F(x,\ y)\in L_2[0,1]^2$ и, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} Q_{nn}(x,\ y)=F(x,\ y) \text{ почти всюду на } [0,1]^2. \tag{3.34}$$

В силу условия 1) теоремы 2 и (3.24)

$$\lim_{k\to\infty} Q_{N_k(x,y)N_k(x,y)}(x,\ y)=0 \text{ почти всюду на } [0,1]^2. \tag{3.35}$$

Из (3.34) и (3.35) следует, что

$$F(x,\ y)=0 \text{ почти всюду на } [0,1]^2. \tag{3.36}$$

Так как ряд (3.26) является рядом Фурье функции $F(x,\ y)$, то $c_{nm}=0$ при $n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots$ и, следовательно, $a_{nm}=b_{nm}$, $n,\ m=$ $=0,\ 1,\ 2,\cdots$.

Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и оказанную помощь при ее решении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.X.1975

Խ. Հ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ. *Հաջորդաբար զուգամիտող Հաարի կրկնակի շարքերի միակության մասին (ամփոփում)*

*Ապացուցվում է ըստ տողերի հաջորդաբար զուգամիտող Հաարի կրկնակի շարքերի միակության թեորեմ։ Բերվում է Հաարի կրկնակի շարքի օրինակ, որը ցույց է տալիս նշված միակության թեորեմի որոշ իմաստով վերջնական լինելը։*

*Այդ օրինակը նաև ցույց է տալիս, որ կետից կախված ենթահամարներով զուգամիտող Հաարի միապատիկ շարքերի միակության հայտնի թեորեմները չեն տարածվում Հաարի կրկնակի շարքերի վրա։*

Kch. H. MOVSISIAN. *On the uniqueness of successively convergent double Haar series* (summary)

A uniqueness theorem is proved about the Haar series successively convergent over lines. An example of double Haar series is given showing that the mentioned theorem is in some sence final.

The some example shows also that the known uniqueness theorems for onedimensional Haar series, converging over sequences depending on points, can not be extended to double Haar series.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. А. Талалян.* О единственности рядов по некоторым ортогональным системам, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 5, 1970, 401—418.
2. *В. А. Скворцов.* Некоторые обобщения теоремы единственности для рядов по системе Уолша, Матем. заметки, 13, № 3, 1973, 367—372.
3. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системе Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 1391—1408.
4. *В. А. Скворцов.* Теорема типа Кантора для системы Хаара, Вестник МГУ, серия I, № 5, 1964, 3—6.
5. *О. П. Дзагнидзе.* Представление измеримых функций двух переменных двойными рядами, Сообщения АН Груз. ССР, XXXIV, № 2, 1964.