ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 4. 1976 Математика

П. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

# К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $H$ — сепарабельное гильбертово пространство $[H]$—кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в $H$ и $J$—оператор со свойствами $J^* = -J$, $J^2 = -I$ ($I$ — единичный оператор в $H$). Очевидно, операторы $P_\pm = \frac{1}{2}(I \mp iJ)$ являются взаимно ортогональными проекторами на собственные подпространства $H_\pm = P_\pm H$ оператора $J$, причем $J = iP_+ - iP_-$. В дальнейшем предполагается, что $\dim H_+ = \dim H_-$. В силу этого в $H$ можно построить частично изометрический оператор $K$ с исходным подпространством $H_+$ и финальным подпространством $H_-$, т. е. такой, что $K^*K = P_+$, $KK^* = P_-$. С каждым оператором $K$ связывается проектор $P_K = \frac{1}{2}(I + K + K^*)$, удовлетворяющий условию

$$JP_K + P_K J = J. \tag{0.1}$$

Заметим, что оператор $iJ$ — эрмитов индефинитный и сужение оператора $K$ на $H_-$, которое мы также будем обозначать через $K$, является угловым оператором гипермаксимального $iJ$-нейтрального подпространства $H_k = P_k H$ (см. [1]). Проекторы $P_\pm$, $P_K$ связаны соотношениями

$$P_\pm P_K P_\pm = \frac{1}{2} P_\pm, \quad P_K P_\pm P_K = \frac{1}{2} P_K. \tag{0.2}$$

Известно [2], что дифференциальное выражение

$$J \frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r) \quad (0 \leqslant r < \infty), \tag{0.3}$$

где $V(r)$ — функция, значениями которой являются ограниченные самосопряженные операторы в $H$, равномерно измеримая и такая, что

$$\int_0^\infty \|V(r)\|\, dr < \infty \tag{0.4}$$

и граничное условие

$$P_K\, x(0) = x(0) \tag{0.5}$$

определяют самосопряженный оператор $\mathbf{L}$ в пространстве $L_2(0, \infty; H)$. Через $\mathbf{L}_0$ будем обозначать оператор рассматриваемого типа, соответствующий случаю $V(r)\equiv 0$. В наших рассмотрениях, не ограничивая общности (см. [2]) можно предполагать, что потенциал $V(r)$ нормализован, т. е. $JV(r) = -V(r)J$.

Для канонических дифференциальных операторов (0.3)—(0.5) развиты различные подходы к теории рассеяния. В работе М. Г. Крейна и Ф. Э. Мелик-Адамяна [3] рассмотрено уравнение

$$J\frac{dx(r,\lambda)}{dr} = \lambda x(r,\lambda) + V(r)\,x(r,\lambda) \quad (0\leqslant r<\infty) \tag{0.6}$$

с граничным условием (0.5) в случае $\dim H<\infty$ и матрица рассеяния ($S$-матрица) определена через асимптотическое поведение решения задачи (0.6)—(0.5). Другой подход, связанный с волновыми операторами, развит В. М. Адамяном в [2], где введено понятие суботератора рассеяния. В этой же работе показано, что к каноническим операторам с финитным потенциалом $(V(r)=0$ при $r\geqslant a>0)$ применима схема теории рассеяния, предложенная П. Лаксом и Р. Филлипсом [4].

В § 1 настоящей работы без указанных ограничений показывается, что матрицы рассеяния, фигурирующие в каждом из этих подходов, совпадают.

В § 2, сведением к оператору на полуоси, изучается канонический оператор вида (0.3) на всей вещественной оси. Такой оператор можно рассматривать как самосопряженное расширение с выходом оператора, задаваемого дифференциальным выражением (0.3) на полуоси $[0,\infty)$. Дается описание $S$-матриц (субоператоров рассеяния) для таких расширений в рамках теории унитарных сцеплений полуунитарных операторов [5], являющейся обобщением теории Лакса-Филлипса.

В случае, когда значениями потенциальной функции $V(r)$ при $r<0$ являются конечномерные операторы, приводится решение следующей обратной задачи: восстановление потенциала канонического оператора на отрицательной полуоси с помощью характеристик $S$-матрицы, не зависящих от потенциала на положительной полуоси.

Автор выражает искреннюю благодарность В. М. Адамяну за постановку задач и обсуждение.

## § 1. Эквивалентность различных определений $S$-матрицы канонического оператора на полуоси

1.1. Обозначим через $E(r,\lambda)$ оператор Коши уравнения (0.6), т. е. операторное решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию $E(0,\lambda)=I$, а через $E_0(r,\lambda)=e^{-J\lambda r}$ — оператор Коши уравнения (0.6$_0$), получающегося из (0.6) при $V(r)\equiv 0$.

Известно (см. [6]), что функция $E(r,\lambda)$ $J$-унитарна при $\operatorname{Im}\lambda=0$, $iJ$ — нерастягивающая при $\operatorname{Im}\lambda>0$ и $iJ$ — несжимающая при $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$. Оператор Коши обратим для всех $\lambda$ и имеет место соотношение

$$E^*(r, \bar{\lambda})\, iJE(r, \lambda) = iJ. \tag{1.1}$$

Приведем используемые в дальнейшем формулы, полученные в работе [2].

Оператор Коши $E(r, \lambda)$ допускает оценку

$$\|E(r, \lambda)\| \leqslant e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\, r + \int\limits_0^r \|V(s)\|\, ds}. \tag{1.2}$$

Для функции $A(r, \lambda) = E_0^{-1}(r, \lambda)\, E(r, \lambda)$ справедливо представление

$$A(r, \lambda) = I + \int\limits_0^r e^{2J\lambda r}\, \Gamma(r, s)\, ds, \tag{1.3}$$

где $\Gamma(r, s)\,(r \geqslant s,\ 0 \leqslant r < \infty)$ при фиксированном $r$ принадлежит пространству $L_1(0, r; [H])$.

Из (0.4) и оценки (1.2) следует, что при $r \to \infty$ последовательность функций $A(r, \lambda)$ равномерно по $\lambda \in (-\infty, \infty)$ в равномерной операторной топологии сходится к операторной функции $A(\lambda)$, представимой в виде

$$A(\lambda) = I + \int\limits_0^\infty e^{2J\lambda s}\, \Gamma(s)\, ds. \tag{1.4}$$

Здесь $\Gamma(s) \in L_1(0, \infty; [H])$ является пределом в $L_1(0, \infty; [H])$ последовательности функций $\Gamma(r, s)$ при $r \to \infty$.

Операторная функция $A(\lambda)$ является оператором асимптотической эквивалентности ($A$-оператором) уравнений (0.6) и (0.6$_0$) (см. [6]). Из $J$-унитарности $E(r, \lambda)$ при $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$ следует $J$-унитарность функции $A(\lambda)$.

Обозначим через $\Pi_\pm$, соответственно, замкнутые верхнюю и нижнюю полуплоскости. Из (1.3) и (1.4) видно, что функции $P_\pm A(r, \lambda)$, и $P_\pm A(\lambda)$, первоначально заданные на вещественной оси, формулами

$$P_\pm A(r, \lambda) = P_\pm + \int\limits_0^r e^{\pm 2i\lambda s}\, P_\pm \Gamma(r, s)\, ds, \quad \lambda \in \Pi_\pm,$$

$$P_\pm A(\lambda) = P_\pm + \int\limits_0^\infty e^{\pm 2i\lambda s}\, P_\pm \Gamma(s)\, ds, \quad \lambda \in \Pi_\pm$$

продолжаются до функций, голоморфных в верхней и нижней полуплоскостях. Как и в [2] можно показать, что последовательности $P_\pm A(r, \lambda)$ при $r \to \infty$ сходятся в равномерной операторной топологии равномерно по $\lambda \in \Pi_\pm$ к функциям $P_\pm A(\lambda)$.

Так как функция $E(r, \lambda)$ обратима, то из (1.1) имеем

$$E^{-1}(r, \lambda) = -JE^*(r, \overline{\lambda})\, J,$$

отсюда, используя оценку (1.2), получим

$$\|x\| = \|E^{-1}(r, \lambda)\, E(r, \lambda)\, x\| \leqslant \|JE^*(r, \overline{\lambda})\, J\| \|E(r, \lambda)\, x\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{|\operatorname{Im}\lambda|\, r + \int\limits_0^r \|V(s)\|\, ds} \|E(r, \lambda)\, x\|$$

или

$$\|E(r, \lambda)\, x\| \geqslant e^{-(|\operatorname{Im}\lambda|\, r + \int\limits_0^r \|V(s)\|\, ds)} \cdot \|x\|. \tag{1.5}$$

1.2. Рассмотрим задачу (0.6)—(0.5). Так как эта задача имеет единственное решение, то оно запишется в виде

$$x(r, \lambda) = E(r, \lambda) \cdot P_K\, x_0, \text{ где } x_0 \in H.$$

Из определения $A$-оператора следует асимптотика

$$x(r, \lambda) = E_0(r, \lambda)\, A(\lambda)\, P_K\, x_0 + o(1), \quad r \to \infty.$$

Рассматривая пространство $H$ как ортогональную сумму

$$H = H_+ \oplus H_-, \tag{1.6}$$

имеем

$$x(r, \lambda) = e^{i\lambda r} \frac{1}{2} (P_- A(\lambda)\, P_+ + P_- A(\lambda)\, P_- K)\, x_+ +$$

$$+ e^{-i\lambda r} \frac{1}{2} (P_+ A(\lambda)\, P_+ + P_+ A(\lambda)\, P_- K)\, x_+ + o(1),$$

где $x_+ = x_{0+} + K^* x_{0-}$, а $x_{0\pm} = P_\pm x_0$. Из $J$-унитарности функции $A(\lambda)$ следует (см. [7]), что для любого оператора $Z$, отображающего $H_+$ в $H_-$ с $\|Z\| \leqslant 1$, оператор $(P_+ A(\lambda)\, P_+ + P_+ A(\lambda)\, P_- Z)$, как оператор, действующий из $H_+$ в $H_-$, имеет ограниченный обратный. Поэтому

$$|x(r, \lambda)| = e^{i\lambda r} S(\lambda)\, y_+ + e^{-i\lambda r} y_+ + o(1), \quad r \to \infty, \tag{1.7}$$

где

$$S(\lambda) = (P_- A(\lambda)\, P_+ + P_- A(\lambda)\, P_- K)(P_+ A(\lambda)\, P_+ + P_+ A(\lambda)\, P_- K)^{-1}, \tag{1.8}$$

а $y_+ = \frac{1}{2}(P_+ A(\lambda)\, P_+ + P_+ A(\lambda)\, P_- K)\, x_+$. Оператор-функция $S(\lambda)$ называется $S$-матрицей оператора $\mathrm{L}$ при асимптотическом подходе (см. [3]).

При разложении (1.6) функция $A(\lambda)$ представляется в виде блочной матрицы. Из (1.8) видно, что $S(\lambda)$ является ассоциированным с этой матрицей дробно-линейным преобразованием углового оператора $K$. Из $J$-унитарности $A(\lambda)$ и изометричности оператора $K$ следует (см. [7]), что $S(\lambda)$ является изометрическим отображением $H_+$ на $H_-$. Поэтому, имея (1.7), $S$-матрицу можно интерпретировать как угловой оператор гипермаксимального нейтрального подпространства $H_\lambda = \{x;\ x = x_+ + S(\lambda)x_+,\ x_+ \in H_+\}$ такого, что решение $x(r, \lambda)$ уравнения (0.6) с граничным условием из $H_K$, на бесконечности асимптотически ведет себя как решение невозмущенного уравнения $(0.6_0)$ с граничным условием из $H_\lambda$.

Обозначим

$S_\pm(\lambda) = P_\pm A(\lambda) P_+ + P_\pm A(\lambda) P_- K$. Так как $P_K = \frac{1}{2}(I + K + K^*)$,

то

$$S_\pm(\lambda) = 2P_\pm A(\lambda) P_K P_+. \tag{1.9}$$

Отсюда, используя (1.4), получим

$$S_\pm(\lambda) = 2\left(P_\pm P_K P_+ + \int\limits_0^\infty e^{\pm 2i\lambda t} P_\pm \Gamma(t) P_K P_+\, dt\right). \tag{1.10}$$

Последнее означает, что $S_\pm(\lambda)$ продолжается до функций, голоморфных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Обозначим через $\mathbf{R}_\pm(N, \Pi_\pm)$ кольца операторных функций $F_\pm(\lambda)$, действующих в гильбертовом пространстве $N$ и представимых в виде

$$F_\pm(\lambda) = C_0 + \int\limits_0^\infty e^{\pm i\lambda t} C(t)\, dt,\quad \lambda \in \Pi_\pm,$$

где $C(t) \in L_1(0, \infty; [N])$, $C_0 \in [N]$.

З а м е ч а н и е 1.1. *Для колец операторных функций* $\mathbf{R}_\pm(N, \Pi_\pm)$ и винеровских колец $R_\pm(\Pi_\pm)$ скалярных функций выполняются условия теоремы 3 работы [8] при указанных там частных предположениях. В силу этого, имеют место операторные обобщения теорем Винера:

*если функции $F_\pm(\lambda) \in \mathbf{R}_\pm(N, \Pi_\pm)$ ограниченно обратимы в каждой точке $\lambda \in \Pi_\pm$, то и $F_\pm^{-1}(\lambda) \in \mathbf{R}_\pm(N; \Pi_\pm)$.*

Т е о р е м а 1.1. *Функции $S_+(\lambda)$ и $K^* S_-(\lambda)$ со своими обратными принадлежат кольцам $\mathbf{R}_\pm(H_+, \Pi_\pm)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $P_- P_K P_+ = \frac{1}{2} KP_+$, то, учитывая соотношения (0.2), из (1.9) имеем $S_+(\lambda) \in \mathbf{R}_+(H_+, \Pi_+)$ и $K^* S_-(\lambda) \in \mathbf{R}_-(H_+, \Pi_-)$. Покажем, что функции $S_+(\lambda)$ и $K^* S_-(\lambda)$ ограниченно обратимы соответственно в каждой точке $\lambda \in \Pi_\pm$.

Достаточно рассмотреть функцию $S_+(\lambda)$, так как для $K^* S_-(\lambda)$ доказательство проводится аналогично.

Используя $iJ$-нерастягиваемость функции $E(r, \lambda)$ в верхней полуплоскости, соотношение $P_K J P_K = 0$, получающееся из (0.1), и обратимость функции $E(r, \lambda)$, при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ имеем

$$(S_+(r,\lambda)x_+,\ S_+(r,\lambda)x_+) = 4(P_+A(r,\lambda)P_Kx_+,\ P_+A(r,\lambda)P_Kx_+) =$$

$$= 2e^{-2\operatorname{Im}\lambda r}(P_KE^*(r,\lambda)(I-iJ)E(r,\lambda)P_Kx_+,\ x_+) \geqslant$$

$$\geqslant 2e^{-2\operatorname{Im}\lambda r}\|E(r,\lambda)P_Kx_+\|^2 \geqslant e^{-(4\operatorname{Im}\lambda r+2\int\limits_0^\infty \|V(s)\|\,ds)}\|x_+\|^2 > 0.$$

Отсюда следует обратимость функции $S_+(r,\lambda)$ и замкнутость области значений оператора $S_+(r,\lambda)$. Покажем, что область значений этого оператора совпадает со всем $H_+$, откуда, по теореме Банаха, будет следовать ограниченность $S_+^{-1}(r,\lambda)$ Для этого докажем, что подпространство нулей оператора $S_+^*(r,\lambda)$ пусто. Допустим, что

$$S_+^*(r,\lambda)\,x_+ = 2P_+P_KA^*(r,\lambda)P_+x_+ = 0, \text{ но } \|x_+\| \neq 0.$$

Так как проектор $P_+$ отображает подпространство $H_K$ на все $H_+$ (см. [1]), то $P_KE^*(r,\lambda)x_+ = 0$. Это означает, что $E^*(r,\lambda)x_\perp \in H_K^\perp$. В силу (0.1) подпространство $H_K^\perp$ является гипермаксимальным нейтральным, поэтому

$$(iJE^*(r,\lambda)x_+,\ E^*(r,\lambda)x_+) = 0.$$

Из (1.1) имеем $E^*(r,\lambda) = -JE^{-1}(r,\bar\lambda)J$. Так как при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ функция $E(r,\bar\lambda)$ является $iJ$-несжимающей, то $E^{-1}(r,\bar\lambda)$ будет $iJ$-нерастягивающей, следовательно такова же и функция $E^*(r,\lambda)$. Отсюда

$$0 = (iJE^*(r,\lambda)x_+),\ E^*(r,\lambda)x_+) = (E(r,\lambda)iJE^*(r,\lambda)x_+,\ x_+) \leqslant$$

$$\leqslant (iJx_+,\ x_+) = -\|x_+\|^2,$$

т. е. $\|x_+\| = 0$, что противоречит допущению.

В силу замечания 1.1 имеем $S_+^{-1}(r,\lambda) \in \mathbf{R}_+(H_+, \Pi_+)$. Из равномерной сходимости последовательности $P_+A(r,\lambda)$ к функции $P_+A(\lambda)$ следует равномерная сходимость $S_+(r,\lambda)$ к функции $S_+(\lambda)$, голоморфной в верхней полуплоскости.

Из неравенства (1.5) при $\operatorname{Im}\lambda = 0$ имеем

$$\|S_+(r,\lambda)x_+\| = \|2P_+E(r,\lambda)P_Kx_+\| > \sqrt{2}\,e^{-\int\limits_0^\infty \|V(s)\|\,ds}\|P_Kx_+\| =$$

$$= e^{-\int\limits_0^\infty \|V(s)\|\,ds}\|x_+\|.$$

Отсюда

$$\|x_+\| = \|S_+(r,\lambda)S_+^{-1}(r,\lambda)x_+\| \geqslant e^{-\int\limits_0^\infty \|V(s)\|\,ds}\|S_+^{-1}(r,\lambda)x_+\|.$$

Следовательно

$$\|S_+^{-1}(r,\lambda)x_+\| \leqslant e^{\int\limits_0^\infty \|V(s)\|\,ds}\|x_+\|,$$

значит

$$\|S_+^{-1}(r, \lambda)\| \leqslant e^{\int\limits_0^\infty \|V(s)\|\, ds}. \tag{1.11}$$

Используя полученную оценку и принцип максимума модуля голоморфной функции, для $\lambda \in \Pi_+$ имеем

$$|(S_+^{-1}(r, \lambda)\, x_+, y_+)| < \max_{\operatorname{Im}\lambda=0} |(S_+^{-1}(r, \lambda)\, x_+, y_+)| \leqslant \max_{\operatorname{Im}\lambda=0} \|S_+^{-1}(r, \lambda)\|\, \|x_+\|\, \|y_+\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{\int\limits_0^\infty \|V(s)\|\, ds} \|x_+\| \cdot \|y_+\|.$$

Следовательно, оценка (1.11) имеет место и для всех $\lambda \in \Pi_+$. Из равномерной по $\lambda \in \Pi_+$ сходимости последовательности $S_+(r, \lambda)$ отсюда следует, что функции $S_+^{-1}(r, \lambda)$ равномерно по $\lambda \in \Pi_+$ сходятся к некоторой ограниченной голоморфной в $\Pi_+$ функции $\Sigma_+(\lambda)$. Так как

$$I_+ = \lim_{r\to\infty} S_+(r, \lambda)\, S_+^{-1}(r, \lambda) = S_+(\lambda)\, \Sigma_+(\lambda),$$

то $S_+^{-1}(\lambda) = \Sigma_+(\lambda)$. Теорема доказана.

1.3. Рассмотрим самосопряженный канонический оператор $\mathbf{L}$ и оператор $\mathbf{L}_0$, соответствующий случаю $V(r) \equiv 0$. Через $U(t) = e^{i\mathbf{L}t}$ и $U_0(t) = e^{i\mathbf{L}_0 t}$ $(-\infty < t < \infty)$ обозначим сильно непрерывные группы унитарных операторов, порожденные операторами $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_0$. Операторы $W_\pm(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0) = s - \lim\limits_{t\to\pm\infty} U(t)\, U_0(-t)$ называются волновыми. Оператор рассеяния $S(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0)$ определяется через волновые при помощи соотношения

$$S(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0) = W_+^*(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0)\, W_-(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0).$$

Обозначим $Z_+ = \sqrt{2}\, P_+ P_K$, $\Phi(r, \lambda) = E(r, \lambda)\, P_K$,

$$\Delta(\lambda) = 2P_+ (P_K A^*(\lambda)\, A(\lambda)\, P_K)^{-1} P_+, \quad \|f\|_\Delta = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\Delta(\lambda) f(\lambda), f(\lambda))\, d\lambda\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Из результатов работы [2] следует, что формулами

$$\begin{cases} f(r) = \lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_{-R}^{R} \Phi(r, \lambda)\, Z_+^*\, \Delta(\lambda)\, f_+(\lambda)\, d\lambda, \quad f_+(\lambda) \in L_2^\Delta(-\infty, \infty; H_+) \\ f_+(\lambda) = \lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int\limits_0^R Z_+ \Phi^*(r, \lambda)\, f(r)\, dr, \quad f(r) \in L_2(0, \infty; H) \end{cases} \tag{1.12}$$

задается изометрическое отображение пространства $L_2(0, \infty; H)$ на $L_2^{\Delta}(-\infty, \infty; H_+)$ такое, что оператор $\mathbf{L}$ при этом отображении переходит в оператор умножения на независимое переменное $\lambda$. Действие оператора рассеяния при таком отображении задается формулой

$$\left|\begin{aligned} &(S(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0) f)(r) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \Phi_0(r, \lambda) Z_+^* \bar{S}_-(\lambda) \bar{S}_+^{-1}(\lambda) f_+(\lambda)\, d\lambda \\ &f_+(\lambda) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R Z_+ \Phi_0^*(r, \lambda) f(r)\, dr, \end{aligned}\right.$$

где $\bar{S}_\pm(\lambda) = 4P_+ P_K P_\pm A(\lambda) P_K P_+$. Функция $\tilde{S}(\lambda) = \bar{S}_-(\lambda) \bar{S}_+^{-1}(\lambda)$ называется субоператором оператора рассеяния $S(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0)$. Из (0.2) видно, что $\bar{S}_+(\lambda) = S_+(\lambda)$, $\tilde{S}_-(\lambda) = K^* S_-(\lambda)$, где $S_\pm(\lambda)$ являются факторизующими множителями $S$-матрицы, определенной с помощью асимптотических свойств решения задачи (0.6)—(0.5). Отсюда видно, что $S$-матрица совпадает с субоператором рассеяния с точностью до постоянного изометрического оператора.

Непосредственно проверяется, что $\Delta(\lambda) = (S_\pm^*(\lambda) S_\pm(\lambda))^{-1}$, следовательно, если $f(\lambda) \in L_2^{\Delta}(-\infty, \infty; H_+)$, то функции $S_\pm^{*-1}(\lambda) f(\lambda)$ принадлежат соответственно пространствам $L_2(-\infty, \infty; H_\pm)$.

Для дальнейших рассмотрений формулы (1.12) удобно записывать в виде

$$\left|\begin{aligned} &f(r) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \Phi_\pm(r, \lambda) f_\pm(\lambda)\, d\lambda, \quad f_\pm(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty; H_+) \\ &f_\pm(\lambda) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \Phi_\pm^*(r, \lambda) f(r)\, dr, \quad f(r) \in L_2(0, \infty; H), \end{aligned}\right. \tag{1.13$_\pm$}$$

где $\Phi_\pm(r, \lambda) = \Phi(r, \lambda) Z_+^* S_\pm^{-1}(\lambda) = \sqrt{2}\, E(r, \lambda) P_K P_+ S_\pm^{-1}(\lambda)$.

Формулы (1.13$_\pm$) будем называть соответственно ($\pm$)-спектральными представлениями оператора $\mathbf{L}$.

1.4. Рассмотрим задачу Коши

$$-i \frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = J \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} - V(r) f(r, t) \quad (0 \leqslant r < \infty, \; -\infty < t < \infty),$$

$$f(r, 0) = f_0(r) \in L_2(0, \infty; H). \tag{1.14}$$

Ее решением является функция $f(r, t) = U(t) f_0(r)$. В ($\pm$)-спектральных представлениях группа $U(t)$ переходит в изоморфные ей группы $\bar{U}_\pm(t)$ операторов умножения на $e^{i\lambda t}$ в пространствах $L_2(-\infty, \infty; H_\pm)$.

Используя ($1.13_{\pm}$), решение задачи (1.14) запишем в виде

$$f(r, t) = \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} e^{i\lambda t} \Phi_{\pm}(r, \lambda) f_{0\pm}(\lambda)\, d\lambda, \qquad (1.15)$$

$$f_{0\pm}(\lambda) = \mathrm{l.i.m} \int_{0}^{R} \Phi^{*}_{\pm}(r, \lambda) f_0(r)\, dr.$$

Через $D_+$ ($D_-$), как и в [4], обозначим совокупность начальных данных из $L_2(0, \infty; H)$ таких, что отвечающие им решения задачи (1.14) обращаются в нуль при $r < t$, $t > 0$ ($r < -t$, $t < 0$).

Через $\mathrm{H}_2^{\mp}(-\infty, \infty; H_{\pm})$ обозначим классы вектор-функций $\tilde{f}_{\pm}(\lambda)$, представимых в виде

$$\tilde{f}_{\pm}(\lambda) = \int_{0}^{\infty} e^{\pm i\lambda t} f_{\mp}(t)\, dt,$$

где $f_{\pm}(t) \in L_2(0, \infty; H_{\pm})$.

Спектральные представления ($1.13_{\pm}$) позволяют описать множества $D_{\pm}$. Справедлива следующая

Теорема 1.2. *Подпространства $D_{\pm}$ являются прообразами подпространств $\mathrm{H}_2^{\pm}(-\infty, \infty; H_{\pm})$ при отображениях* ($1.13_{\pm}$).

Доказательство. Так как отображение ($1.13_+$) изометрично, достаточно рассмотреть функции $\tilde{f}_+(\lambda)$ из плотного в $\mathrm{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+)$ подмножества $\mathrm{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+) \cap L_1(-\infty, \infty; H_+)$.

Пусть $t = r + \tau$, $\tau > 0$. Тогда

$$f(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} e^{i\lambda r} \Phi_+(r, \lambda) \tilde{f}_+(\lambda)\, d\lambda. \qquad (1.16)$$

Здесь $\Phi_+(r, \lambda) = \sqrt{2}\, E(r, \lambda) P_K P_+ S_+^{-1}(\lambda)$. Из (1.3) имеем

$$e^{i\lambda r} E(r, \lambda) = P_+ + P_- e^{2i\lambda r} + \int_{0}^{r} e^{2i\lambda s} [P_+ \Gamma(r, s) + P_- \Gamma(r, r - s)]\, ds.$$

Подставляя верхнее выражение в (1.16), получим

$$f(r, t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(\tau + 2r)} P_- P_K S_+^{-1}(\lambda) \tilde{f}_+(\lambda)\, d\lambda +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} [P_+ + \int_{0}^{r} e^{2i\lambda s} (P_+ \Gamma(r, s) + P_- \Gamma(r, r - s))\, ds] \times$$

$$\times P_K S_+^{-1}(\lambda) \tilde{f}_+(\lambda)\, d\lambda.$$

Так как $S_+^{-1}(\lambda) \in \mathbf{R}_+(H_+, \Pi_+)$, то $S_+^{-1}(\lambda)\tilde{f}_+(\lambda) \in \mathrm{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+)$. Поэтому первое слагаемое обращается в нуль по теореме Пэли—Винера. Выражение в квадратных скобках второго слагаемого также является элементом кольца $\mathbf{R}_+(H, \Pi_+)$. Следовательно, подынтегральное выражение также принадлежит $\mathrm{H}_2^+(-\infty, \infty; H)$ и по той же теореме обращается в нуль и второе слагаемое. Отсюда $f(r, t) = 0$ при $r < t$.

Пусть теперь $\tilde{f}(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty; H_+) \cap L_1(-\infty, \infty; H_+)$ и

$$f(r, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\Phi_+(r, \lambda)\,\tilde{f}(\lambda)\,d\lambda = 0$$

при $r < t$. Покажем, что $\tilde{f}(\lambda) \in \mathrm{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+)$. Так как $P_+ f(r, t) = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\, e^{i\lambda r} P_+ E(r, \lambda) P_K P_+ S_+^{-1}(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = 0, \quad \tau = t - r.$$

Но $e^{i\lambda r} P_+ E(r, \lambda) P_K P_+ = S_+(r, \lambda)$. Из верхнего равенства следует, что $S_+(r, \lambda) S_+^{-1}(\lambda)\tilde{f}(\lambda) = g(\lambda) \in \mathrm{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+)$. При доказательстве теоремы 1.1 было установлено, что $S_+^{-1}(r, \lambda) \in \mathbf{R}_+(H_+, \Pi_+)$. Поэтому $\tilde{f}(\lambda) = S_+(\lambda) S_+^{-1}(r, \lambda)\, g(\lambda) \in \mathrm{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+)$. Аналогично доказывается, что $D_-$ является прообразом подпространства $\mathrm{H}_2^-(-\infty, \infty; H_-)$. Теорема доказана.

Пусть $U(t)$ — группа унитарных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(0, \infty; H)$, порожденная самосопряженным оператором $\mathbf{L}$, а $D_\pm$ те же, что и в теореме 1.2.

Покажем, что имеют место

1). $U(\pm t) D_\pm \subset D_\pm,\ t > 0,$

2). $\bigcap_{t>0} U(\pm t) D_\pm = \{0\},$

3). $\overline{\bigcup_t U(t) D_\pm} = L_2(0, \infty; H).$

Действительно, формулы $(1.13_\pm)$ задают изометрические отображения пространства $L_2(0, \infty; H)$ на $L_2(-\infty, \infty; H_\pm)$ такие, что группа $U(t)$ переходит в умножение на $e^{i\lambda t}$ в пространствах $L_2(-\infty, \infty; H_\pm)$, а образами подпространств $D_\pm$ по теореме 1.2 являются подпространства $\mathrm{H}_2^\pm(-\infty, \infty; H_\pm)$. Для этих объектов соотношения 1)—3) очевидны. Поэтому, в силу изометричности отображений $(1.13_\pm)$, условия 1)—3) выполняются и для $U(t)$, $D_\pm$.

В схеме теории рассеяния Лакса—Филлипса [4] рассматривается группа унитарных операторов, действующая в гильбертовом пространстве $N$, для которой существуют ортогональные в $N$ подпространства $D_+$ и $D_-$, называемые соответственно уходящим и приходящим, такие, что для них имеют место соотношения 1)—3). Из этих соотношений следует, что с каждым из $D_\pm$ связывается специальное (уходящее и приходящее) спектральное представление группы. В уходящем представлении подпространство $D_+$ представлено вектор-функциями, голоморфными в верхней полуплоскости, а в приходящем представлении — $D_-$ представлено вектор-функциями, голоморфными в нижней полуплоскости. Матрица рассеяния $S$ определяется как оператор, переводящий уходящий представитель $f_+$ элемента из $N$ в его приходящий представитель $f_-$, т. е. $Sf_+ = f_-$.

Заметим, что условие ортогональности подпространств $D_\pm$ не играет роли при построении спектральных представлений. Для задач, рассмотренных в [4], ортогональность подпространств $D_\pm$ была обусловлена ограниченностью носителя возмущения.

Предыдущие рассмотрения показывают, что отображения $(1.13_\pm)$ являются, соответственно, уходящим и приходящим представлениями группы $U(t)$. Из формул $(1.13_\pm)$ видно, что соответствие $Sf_+ = f_-$ в нашем случае задается соотношением $S(\lambda)\,\tilde{f}_+(\lambda) = \tilde{f}_-(\lambda)$, где $S(\lambda) = S_-^{*-1}(\lambda)\,S_+^*(\lambda) = S_-(\lambda)\,S_+^{-1}(\lambda)$. Последнее и доказывает, что матрица рассеяния, определяемая по этой схеме, совпадает с введенными ранее.

## § 2. $S$-матрицы канонического оператора, отвечающие самосопряженным расширениям с выходом на полную ось

2.1. Пусть задан канонический дифференциальный оператор

$$J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\,x(r) \quad (-\infty < r < \infty) \tag{2.1}$$

с суммируемым нормализованным потенциалом $V(r)$ в пространстве $L_2(-\infty, \infty; H)$. Рассмотрим сдвоенное пространство $\mathbf{H} = H \oplus H$. Оператор (2.1) эквивалентен оператору в $L_2(0, \infty; \mathbf{H})$, который задается дифференциальным выражением

$$\mathbf{J}\frac{dX(r)}{dr} - \mathbf{V}(r)\,X(r), \quad (0 \leqslant r < \infty) \tag{2.2}$$

и граничным условием

$$\mathbf{P}\,X(0) = X(0). \tag{2.3}$$

Здесь

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}(r) = \begin{pmatrix} V_+(r) & 0 \\ 0 & V_-(r) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_\pm(r) = V(\pm r), \quad r > 0, \quad X(r) = \begin{pmatrix} x_1(r) \\ x_2(r) \end{pmatrix} \in L_2(0, \infty; \mathbf{H}).$$

Очевидно, потенциал $\mathbf{V}(r)$ суммируем на полуоси и $\mathbf{J}\mathbf{V}(r) = -\mathbf{V}(r)\mathbf{J}$. Проектор $\mathbf{P}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{JP} + \mathbf{PJ} = \mathbf{J}.$$

Следовательно, оператор (2.2) — (2.3), а значит и (2.1), является самосопряженным. Одновременно оператор (2.1) можно рассматривать как самосопряженное расширение с выходом дифференциального выражения (0.3) с потенциалом $V_+(r)$.

Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{J}\frac{dX(r,\lambda)}{dr} = \lambda X(r, \lambda) + \mathbf{V}(r) X(r, \lambda) \quad (0 \leqslant r < \infty) \tag{2.4}$$

с граничным условием (2.3). Обозначим через $\mathbf{E}(r, \lambda)$ и $\mathbf{A}(\lambda)$, соответственно, оператор Коши и $A$-оператор уравнения (2.4). Известно (см. [9]), что $\mathbf{E}(r, \lambda)$ и $\mathbf{A}(\lambda)$ блочно-диагональны, т. е.

$$\mathbf{E}(r, \lambda) = \begin{pmatrix} E_+(r, \lambda) & 0 \\ 0 & E_-(r, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_+(\lambda) & 0 \\ 0 & A_-(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $E_\pm(r, \lambda)$, $A_\pm(\lambda)$ — соответственно операторы Коши и $A$-операторы уравнений вида (0.6) с потенциалами $V_\pm(r)$ и $J_\pm = \pm J$. При разложении (1.6) функции $A_\pm(\lambda)$ записываются в виде

$$A_+(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad A_-(\lambda) = \begin{pmatrix} B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \\ B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим разложение пространства $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ \oplus \mathbf{H}_-, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{H}_\pm = \mathbf{P}_\pm \mathbf{H}$, $\mathbf{P}_\pm = \frac{1}{2}(I_{\mathbf{H}} \mp i\mathbf{J})$. Введем следующие обозначения: $iP_+^+ - iP_-^+ = J$, $iP_+^- - iP_-^- = -J$. Тогда $\mathbf{P}_\pm = P_\pm^\pm + P_\pm^\mp$, поэтому $\mathbf{H}_\pm = H_\pm^\pm \oplus H_\pm^\mp$, где $H_\pm^\pm = P_\pm^\pm H$. (Заметим, что $H_+^+ = H_-^-$, $H_-^+ = H_+^-$, следовательно $\mathbf{H}_+ = \mathbf{H}_-$, но мы будем пользоваться этими обозначениями, чтобы отличать в $\mathbf{H}$ те подпространства, которые связаны с положительной и отрицательной полуосями в уравнении (2.4)).

При разложении (2.6) асимптотика решения задачи (2.4) — (2.3) запишется в виде

$$X(r, \lambda) = e^{i\lambda r}\, \mathbf{S}(\lambda) X_+ + e^{-i\lambda r} X_- + o(1), \quad r \to \infty,$$

где

$$X_+ \in \mathbf{H}_+, \quad \mathbf{S}(\lambda) = (P_-^+ A_+(\lambda) + P_-^- A_-(\lambda))\,(P_+^+ A_+(\lambda) + P_+^- A_-(\lambda))^{-1}.$$

Функция $\mathbf{S}(\lambda)$ ($S$-матрица уравнения (2.4)), является изометрическим отображением пространства $\mathbf{H}_+$ на $\mathbf{H}_-$. Рассмотрим функции

$$\mathbf{S}_\pm(\lambda) = P_\pm^+ A_+(\lambda) + P_\pm^- A_-(\lambda). \tag{2.7}$$

Из (2.5) имеем

$$S_+(\lambda)=\begin{pmatrix}A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda)\\ B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda)\end{pmatrix},\quad S_-(\lambda)=\begin{pmatrix}B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda)\\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda)\end{pmatrix}. \qquad (2.7')$$

Аналогично формулам ($1.13_\pm$), спектральные представления оператора (2.2)—(2.3) в пространствах $L_2(-\infty,\infty;\mathrm{H}_\pm)$ запишем в виде

$$\left|\begin{aligned}&F(r)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R}\Phi_\pm(r,\lambda)F_\pm(\lambda)\,d\lambda,\quad F_\pm(\lambda)\in L_2(-\infty,\infty;\mathrm{H}_\pm)\\ &F_\pm(\lambda)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int\limits_{0}^{R}\Phi^*_\pm(r,\lambda)F(r)\,dr,\quad F(r)\in L_2(0,\infty;\mathrm{H}),\end{aligned}\right. \qquad (2.8_\pm)$$

где $\Phi_\pm(r,\lambda)=\sqrt{2}\,\mathrm{E}(r,\lambda)\,\mathrm{P}\,\mathrm{P}_+\,\mathrm{S}_\pm^{-1}(\lambda)$.

2.2. Как и в § 1, обозначим через $\mathrm{U}(t)$ группу унитарных операторов, порожденную самосопряженным оператором (2.2)—(2.3), а через $\mathrm{D}_\pm$ — начальные данные $F_0(r)$ задачи Коши

$$-i\frac{\partial F(r,t)}{\partial t}=\mathrm{J}\frac{\partial F(r,t)}{\partial r}-\mathrm{V}(r)F(r,t)\quad(0\leqslant r<\infty;\ -\infty<t<\infty),$$

$$F(r,0)=F_0(r)\in L_2(0,\infty;\mathrm{H})$$

такие, что отвечающие им решения обращаются в нуль при $r<t$, $t>0$ и $r<-t$, $t<0$.

В пространстве $\mathrm{H}$ рассмотрим проектор $\mathrm{P}^+$, который при разложении (2.6) выделяет подпространство $\mathrm{H}^+=H_+^+\oplus H_-^+$, связанное с положительной полуосью в уравнении (2.4). Образуем подпространства $D_\pm^+=\mathrm{P}^+\mathrm{D}_\pm$. Функции из $D_\pm^+$ могут рассматриваться как элементы пространства $L_2(0,\infty;H)$. Из свойств подпространств $\mathrm{D}_\pm$ следует, что решения задачи Коши (1.14) с потенциалом $V_+(r)$, отвечающие начальным условиям из $D_\pm^+$, обращаются в нуль при $r<t$, $t>0$; $r<-t$, $t<0$. С другой стороны, функции из $L_2(0,\infty;\mathrm{H})$, совпадающие с такими начальными условиями на $L_2(0,\infty;\mathrm{H}^+)$ и равные нулю на $L_2(0,\infty;\mathrm{H}^-)$, принадлежат $\mathrm{D}_\pm$. Это означает, что подпространства $D_\pm^+$ совпадают с подпространствами $D_\pm$, введенными в § 1, если в (1.14) потенциал равен $V_+(r)$.

Найдем образы подпространств $D_\pm^+$ при отображениях ($1.13_\pm$) и ($2.8_\pm$). Так как $\mathrm{D}_\pm$ являются прообразами пространств $\mathrm{H}_2^\pm(-\infty,\infty;\mathrm{H}_\pm)$ при отображениях ($2.8_\pm$), то

$$D_\pm^+\ni f_\pm(r)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{\pi}\mathrm{P}^+\int\limits_{-R}^{R}\Phi_\pm(r,\lambda)F_\pm(\lambda)\,d\lambda,$$

где $F_{\pm}(\lambda) \in H_2^{\pm}(-\infty, \infty; H_{\pm})$. Поэтому образами $D_{\pm}^{-}$ при отображениях ($1.13_{\pm}$) и ($2.8_{-}$) будут функции

$$\hat{f}_{\pm}(\lambda) = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^R \Phi_{\pm}(r, \lambda)\left\{\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m}}\int\limits_{-N}^{N} P^{+}\Phi_{\pm}(r, \mu) F_{\pm}(\mu)\, d\mu\right\} dr, \tag{2.9}$$

$$\tilde{f}_{\pm}(\lambda) = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^R \Phi_{\pm}(r, \lambda)\left\{\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m}}\int\limits_{-N}^{N} P^{+}\Phi_{\pm}(r, \mu) F_{\pm}(\mu)\, d\mu\right\} dr. \tag{2.10}$$

В силу изометричности этих отображений, в формулах (2.9) и (2.10) достаточно брать функции $F_{\pm}(\mu)$ из плотного в $H_2^{\pm}(-\infty, \infty; H_{\pm})$ подмножества $H_2^{\pm}(-\infty, \infty; H_{\pm}) \cap L_1(-\infty, \infty; H_{\pm})$. Рассмотрим $f_{+}(r) \in D_{+}^{+}$. Из (2.10) имеем

$$\tilde{f}_{+}(R, \lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^R \Phi_{+}^{*}(r, \lambda) P^{+}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{+}(r, \mu) F_{+}(\mu)\, d\mu\, dr.$$

Так как функция $\Phi_{+}^{*}(r, \lambda) P^{+}\Phi_{+}(r, \mu) F_{+}(\mu)$ интегрируема по Бохнеру в полосе $(0 \leqslant r < R, -\infty < \mu < \infty)$, то, меняя порядок интегрирования, имеем

$$\tilde{f}_{+}(R, \lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_0^R \Phi_{+}^{*}(r, \lambda) P^{+}\Phi_{+}(r, \mu)\, dr\right\} F_{+}(\mu)\, d\mu.$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$\tilde{f}_{+}(R, \lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{+}^{*-1}(\lambda)\left\{\int\limits_0^R E_{+}^{*}(r, \lambda) E_{+}(r, \mu)\, dr\right\} S_{+}^{-1}(\mu) F_{+}(\mu)\, d\mu. \tag{2.11}$$

Из уравнения (0.6) имеем соотношение

$$\int\limits_0^R E_{+}^{*}(r, \lambda) E_{+}(r, \mu)\, dr = \frac{1}{\mu - \lambda}\left[E_{+}^{*}(R, \lambda) J E_{+}(R, \mu) - J\right],$$

которое перепишем в виде

$$\int\limits_0^R E_{+}^{*}(r, \lambda) E_{+}(r, \mu)\, dr = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu - \lambda - i\varepsilon} + \frac{1}{\mu - \lambda + i\varepsilon}\right)\times$$

$$\times\left[E_{+}^{*}(R, \lambda) J E_{+}(R, \mu) - J\right]. \tag{2.12}$$

Используя оценку (1.2), получим

$$\left\|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu - \lambda - i\varepsilon} + \frac{1}{\mu - \lambda + i\varepsilon}\right)\left[E_{+}^{*}(R, \lambda) J E_{+}(R, \mu) - J\right]\right\| =$$

$$= \left\| \frac{E_+^*(R, \lambda) J E_+(R, \mu) - J}{\mu - \lambda} \right\| \frac{(\mu - \lambda)^2}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2} <$$

$$< \left\| \int_0^R E_+^*(r, \lambda) E_+(r, \mu)\, dr \right\| < R e^{2\int_0^R \|V_+(r)\| dr}. \qquad (2.13)$$

Подставим (2.12) в (2.11). Учитывая неравенство (2.13), в полученном интеграле можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ под знаком интеграла. Получим

$$\bar{f}_+(R, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_+^{*-1}(\lambda) \left( \frac{1}{\mu - \lambda - i0} + \frac{1}{\mu - \lambda + i0} \right) \times$$

$$\times E_+^*(R, \lambda) J E_+(R, \mu) S_+^{-1}(\mu) F_+(\mu)\, d\mu -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_+^{*-1}(\lambda) \left( \frac{1}{\mu - \lambda - i0} + \frac{1}{\mu - \lambda + i0} \right) J S_+^{-1}(\mu) F_+(\mu)\, d\mu.$$

Так как функция $S_+^{-1}(\mu) F_+(\mu)$ голоморфна в верхней полуплоскости, то второе слагаемое в верхнем равенстве есть

$$- \frac{1}{2} S_+^{*-1}(\lambda)\, i J S_+^{-1}(\lambda) F_+(\lambda).$$

Рассмотрим первое слагаемое. Так как

$$\|E_+(R, \lambda) - e^{-J\lambda R} A_+(\lambda)\| = \|A_+(R, \lambda) - A_+(\lambda)\|$$

и функция $A_+(R, \lambda)$ при $R \to \infty$ стремится к $A_+(\lambda)$ равномерно по $\lambda$, имеем

$$\underset{R \to \infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_+^{*-1}(\lambda) \left( \frac{1}{\mu - \lambda - i0} + \frac{1}{\mu - \lambda + i0} \right) \times$$

$$\times E_+^*(R, \lambda) J E_+(R, \mu) S_+^{-1}(\mu) F_+(\mu)\, d\mu =$$

$$= \underset{R \to \infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_+^{*-1}(\lambda) \left( \frac{1}{\mu - \lambda - i0} + \frac{1}{\mu - \lambda + i0} \right) \times$$

$$\times A_+^*(\lambda) e^{J\lambda R} J e^{-J\mu R} A_+(\mu) S_+^{-1}(\mu) F_+(\mu)\, d\mu. \qquad (2.14)$$

Но

$$A_+^*(\lambda) e^{J\lambda R} J e^{-J\mu R} A_+(\mu) = -i\, [e^{i(\mu - \lambda) R} A_+^*(\lambda) P_- A_+(\mu) -$$

$$- e^{-i(\mu - \lambda) R} A_+^*(\lambda) P_+ A_+(\mu)].$$

Поэтому (2.14) можно переписать в виде

$$\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}S_+^{*-1}(\lambda)\left(\frac{1}{\mu-\lambda-i0}+\frac{1}{\mu-\lambda+i0}\right)\times$$

$$\times\left(e^{i(\mu-\lambda)R}A_+^*(\lambda)P_-A_+(\mu)-e^{-i(\mu-\lambda)R}A_+^*(\lambda)P_-A_-(\mu)\right)\times$$

$$\times S_+^{-1}(\mu)F_-(\mu)\,d\mu. \tag{2.15}$$

В силу соотношений (см. [5])

$$\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pm i(\mu-\lambda)R}f(\mu)}{\mu-(\lambda\pm i0)}\,d\mu=\pm f(\lambda),$$

$$\mathrm{l.i.m}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pm i(\mu-\lambda)R}f(\mu)}{\mu-(\lambda\mp i0)}\,d\mu=0,\ f(\lambda)\in H_2^{\pm}(-\infty,\infty;N),$$

интеграл (2.15) равен

$$\frac{1}{2}S_+^{*-1}(\lambda)\left[A_+^*(\lambda)P_-A_+(\lambda)+A_+^*(\lambda)P_+A_+(\lambda)\right]S_+^{-1}(\lambda)F_+(\lambda)=$$

$$=\frac{1}{2}S_+^{*-1}(\lambda)A_+^*(\lambda)A_+(\lambda)S_+^{-1}(\lambda)F_+(\lambda).$$

Таким образом, для функции $f_+(\lambda)$ в (2.10) получим

$$\bar{f}_-(\lambda)=\frac{1}{2}S_+^{*-1}(\lambda)\left(A_+^*(\lambda)A_+(\lambda)-iJ\right)S_+^{-1}(\lambda)F_+(\lambda).$$

Из (2.7) видно, что

$$S_+^*(\lambda)P_+S_+(\lambda)=A_+^*(\lambda)P_+A_+(\lambda)=\frac{1}{2}\left(A_+^*(\lambda)A_+(\lambda)-iJ\right).$$

Следовательно

$$\bar{f}_+(\lambda)=S_+^{*-1}(\lambda)S_+^*(\lambda)P_+S_+(\lambda)\ S_+^{-1}(\lambda)F_+(\lambda)=P_+F_+(\lambda).$$

Аналогично можно показать, что образом $D_-^+$ при отображении (2.8$_-$) является функция

$$\bar{f}_-(\lambda)=P_-F_-(\lambda).$$

Определим функцию $\dot{f}_+(\lambda)$ из равенства (2.9). Имеем

$$\Phi_+^*(r,\lambda)P^+\Phi_+(r,\mu)=2S_+^{*-1}(\lambda)P_+P_K E_+^*(r,\lambda)\,\mathrm{P}\,\mathrm{E}(r,\mu)\mathrm{P}\mathrm{P}_+\mathrm{S}_+^{-1}(\mu).$$

Записав $E_+^*(r,\lambda)$ при разложении (2.6), получим

$$E_+^*(r,\lambda)\,\mathrm{P}^+\,\mathrm{E}(r,\mu)=E_+^*(r,\lambda)E_+(r,\mu).$$

Повторяя те же вычисления, что и выше, нетрудно убедиться, что

$$\hat{f}_+(\lambda) = 4\, S_+^{*-1}(\lambda)\; P_+ P_K \mathrm{S}_+^*(\lambda)\, \mathrm{P}_+ S_+(\lambda)\, \mathrm{PP}_+\mathrm{S}_+^{-1}(\lambda)\, F_+(\lambda) =$$

$$= 2 S_+^{*-1}(\lambda)\, P_+ P_K \mathrm{S}_+^*(\lambda)\, P_+ F_+(\lambda).$$

Но $\mathrm{S}_+^*(\lambda) P_+ = A_+^*(\lambda) P_+$, $2P_+ P_K A_+^*(\lambda) P_+ = S_+^*(\lambda)$. Следовательно, $\hat{f}_+(\lambda) = P_+ F_+(\lambda)$. Аналогично доказывается, что $\hat{f}_-(\lambda) = P_-F_-(\lambda)$. Этим доказана следующая

Теорема 2.1. *Подпространства* $D_\pm^+ = \mathrm{P}^+ \mathrm{D}_\pm$ *совпадают с уходящим и приходящим подпространствами для группы* $U(t)$, *связанной с оператором* L, *потенциал которого равен* $V_+(r)$. *Спектральные представления* (1.13$_\pm$) *и* (2.8$_\pm$) *совпадают на* $D_\pm^+$.

Поэтому в дальнейшем вместо $D_\pm^+$ можно писать $D_\pm$.

Замечание 2.1. Так как образами пространств $\mathrm{D}_\pm$ являются пространства $\mathrm{H}_2^\pm(-\infty, \infty; \mathrm{H}_\pm)$, то из теоремы 2.1 следует, что образами $D_\pm$ при отображениях (2.8$_\pm$) будут пространства $\mathrm{H}_2^\pm(-\infty, \infty; H_\pm^+)$.

Обозначим через N гильбертово пространство $L_2(0, \infty; \mathrm{H})$, а через $\mathrm{N}_\pm$ — подпространства $\overline{\bigcup_t \mathrm{U}(t) D_\pm}$. Покажем, что

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}_+ + \mathrm{N}_-. \tag{2.16}$$

В силу изометричности отображений (2.8$_\pm$), достаточно доказать (2.16), например, для (+)-образов этих пространств.

Образом пространства N в (+)-представлении является пространство $L_2(-\infty, \infty; \mathrm{H}_+)$. Так как $\mathrm{H}_\pm = H_\pm^\pm \oplus H_\pm^\mp$, то в силу замечания 2.1 ($\pm$)-образами $\mathrm{N}_\pm$ являются пространства $L_2(-\infty, \infty; H_\pm^+)$

Найдем образ пространства $\mathrm{N}_-$ в (+)-представлении. Пусть $F(r) \in \mathrm{N}_-$. Его (—)-образ обозначим $F_-(\lambda)$. Тогда

$$P_- F_-(\lambda) = F_-(\lambda) = \mathrm{S}^{*-1}(\lambda) F_0(\lambda),$$

где

$$F_0(\lambda) = \sqrt{2}\, \mathrm{P}_+ \mathrm{P} \int_0^\infty \mathrm{E}^*(r, \lambda) F(r)\, dr, \quad F_0(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty; \mathrm{H}_+).$$

Поэтому

$$F_0(\lambda) = \mathrm{S}_-^*(\lambda) F_-(\lambda) = \mathrm{S}_-^*(\lambda) P_- F_-(\lambda).$$

В (+)-представлении образом функции $F(r)$ является функция

$$F_+(\lambda) = \mathrm{S}_+^{*-1}(\lambda) F_0(\lambda) = \mathrm{S}_+^{*-1}(\lambda)\, \mathrm{S}_-^*(\lambda)\, P_- F_-(\lambda) = \mathrm{S}^*(\lambda) P_- F_-(\lambda).$$

Записав функцию $\mathrm{S}(\lambda)$ в матричном виде, получим

$$F_{+}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & S_{21}^{*}(\lambda)\\ 0 & S_{22}^{*}(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ f_0(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_{21}^{*}(\lambda)f_0(\lambda)\\ S_{22}^{*}(\lambda)f_0(\lambda)\end{pmatrix},$$

где $f_0(\lambda)\in L_2(-\infty,\infty;H_{-}^{+})$.

Пусть $G(\lambda)=\begin{pmatrix}g_{+}(\lambda)\\ g_{-}(\lambda)\end{pmatrix}\in L_2(-\infty,\infty;\mathbf{H}_{+})$. Покажем, что существуют функции $f_{\pm}(\lambda)\in L_2(-\infty,\infty;H_{\pm}^{+})$, для которых имеет место

$$\begin{pmatrix}g_{+}(\lambda)\\ g_{-}(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{+}(\lambda)\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}S_{21}^{*}(\lambda)f_{-}(\lambda)\\ S_{22}^{*}(\lambda)f_{-}(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Из $J$-унитарности $A_{+}(\lambda)$ следует обратимость функции $S_{22}^{*}(\lambda)$. Поэтому функции $f_{-}(\lambda)=S_{22}^{*-1}(\lambda)\,g_{-}(\lambda)$, $f_{+}(\lambda)=S_{21}^{*}(\lambda)\,S_{22}^{*-1}(\lambda)\,g_{-}(\lambda)-g_{+}(\lambda)$, очевидно, удовлетворяют равенству (2.17), что и доказывает (2.16).

Таким образом, мы показали, что подпространства $D_{\pm}$, связанные с группой $\mathbf{U}(t)$, удовлетворяют соотношениям

1′) $\mathbf{U}(\pm t)D_{\pm}\subset D_{\pm},\ t>0,$

2′) $\bigcap\limits_{t>0}\mathbf{U}(\pm t)D_{\pm}=\{0\},$

3′) $\mathbf{N}=\mathbf{N}_{+}+\mathbf{N}_{-},\ \mathbf{N}_{\pm}=\overline{\bigcup\limits_{t}\ \mathbf{U}(t)D_{\pm}}$.

Если положить $\mathbf{V}_{\pm}(t)=\mathbf{U}(\pm t)|_{D_{\pm}}$, $t>0$, то 1′) — 3″) означают, что группа $\mathbf{U}(t)$ является минимальным унитарным сцеплением в пространстве $\mathbf{N}$ полугрупп $\mathbf{V}_{\pm}(t)$, $t>0$ полуунитарных операторов (см. [5]). В рамках теории сцеплений $S$-матрица (субоператор рассеяния) определяется по правилу: для любого элемента $f\in\mathbf{N}_{+}$ $(-)$-образ $f_{-}$ его проекции на $\mathbf{N}_{-}$ связан с $(+)$-образом $f_{+}$ самого $f$ соотношением $f_{-}=Sf_{+}$.

Имея теорему 2.1, матрицу рассеяния, определенную таким образом, будем называть $S$-матрицей канонического оператора (0.3), соответствующей самосопряженному расширению с выходом в пространство $L_2(-\infty,\infty;H)$.

Найдем $S$-матрицу $S(\lambda)$. Обозначим через $F_0(\lambda)$ функцию

$$F_0(\lambda)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\sqrt{2}\,\mathbf{P}_{+}\mathbf{P}\int\limits_0^R\mathbf{E}(r,\lambda)\,F(r)\,dr,$$

где $F(r)\in\mathbf{N}$. С помощью $F_0(\lambda)$ $(\pm)$-представители $F_{\pm}(\lambda)$ элемента $F(r)$ получаются следующим образом:

$$F_{\pm}(\lambda)=\mathbf{S}_{\pm}^{*-1}(\lambda)\,F_0(\lambda).$$

Если $F(r)\in\mathbf{N}_{+}$, то его $(+)$-представитель $F_{+}(\lambda)$ принадлежит пространству $L_2(-\infty,\infty;H_{+})$, поэтому

$$f_{+}(\lambda)=F_{+}(\lambda)=P_{+}F_{+}(\lambda)=\mathbf{S}_{+}^{*-1}(\lambda)\,F_0(\lambda).$$

Отсюда

$$F_0(\lambda)=\mathbf{S}_{+}^{*}(\lambda)\,P_{+}F_{+}(\lambda).$$

$(-)$-представитель $F_-(\lambda)$ элемента $F(r)$ есть

$$F_-(\lambda) = \mathbf{S}_-^{*-1}(\lambda)\, F_0(\lambda).$$

Следовательно, его проекцией на $(-)$-образ подпространства $\mathbf{N}_+$ будет функция

$$f_-(\lambda) = P_- F_-(\lambda) = P_- \mathbf{S}_-^{*-1}(\lambda) F_0(\lambda) = P_- \mathbf{S}_-^{*-1}(\lambda)\, \mathbf{S}_+^*(\lambda)\, P_+ F_+(\lambda) =$$

$$= P_- \mathbf{S}_-^{*-1}(\lambda)\, \mathbf{S}_+^*(\lambda)\, P_+ f_+(\lambda) = P_- \mathbf{S}(\lambda)\, P_+ f_+(\lambda).$$

Отсюда следует, что матрица рассеяния $S(\lambda)$ совпадает с блоком $S_{21}(\lambda)$ функции $\mathbf{S}(\lambda)$. Воспользовавшись формулами (2.7′), для функции $S(\lambda)$ можно получить выражение

$$S(\lambda) = (A_{21}(\lambda) - A_{22}(\lambda)\,\theta(\lambda))(A_{11}(\lambda) - A_{12}(\lambda)\,\theta(\lambda))^{-1}, \qquad (2.18)$$

где $\theta(\lambda) = B_{22}^{-1}(\lambda)\, B_{21}(\lambda)$. Из $J$-унитарности функции $A_-(\lambda)$ следует, что $\|\theta(\lambda)\| < 1$.

Из (2.18) видно, что $S(\lambda)$ является дробно-линейным преобразованием сжимающей функции $\theta(\lambda)$, ассоциированным с матрицей оператора $A_+(\lambda)$, поэтому сжимающей будет и функция $S(\lambda)$ (см. [7]). При $\theta(\lambda)$, равном постоянному изометрическому отображению $H_+$ на $H_-$, функция $S(\lambda)$ совпадает с $S$-матрицей, введенной в § 1.

З а м е ч а н и е 2.2. Формула, аналогичная (2.18), уже фигурировала в работах [10] и [11]. В первой из них эта формула описывала субоператоры рассеяния эквивалентных сцеплений. В другой—давала описание сжимающих функций на вещественной оси, представимых в виде суммы фиксированной функции класса $\mathrm{R}_+(N, \Pi_+)$ и функций, являющихся граничными значениями на оси ограниченных, голоморфных в верхней полуплоскости функций.

Изучим свойства функции $\theta(\lambda)$. Так как $\theta(\lambda) = B_{22}^{-1}(\lambda)\, B_{21}(\lambda)$ и функции $A_\pm(\lambda)$ имеют одинаковые свойства, то исследование функции $\theta(\lambda)$ сводится к исследованию $A$-оператора уравнения (0.6). Пусть $A$-оператор $A(\lambda)$ при разложении (1.6) имеет вид

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $A(\lambda)$ $J$-унитарна и имеет представление (1.4). Рассмотрим функцию $A_{11}(\lambda) = P_+ A(\lambda) P_+$. Из (1.4) видно, что

$$A_{11}(\lambda) = I_+ + \int_0^\infty e^{2i\lambda t}\,\Gamma_{11}(t)\, dt, \quad \Gamma_{11}(t) = P_+ \Gamma(t) P_+. \qquad (2.19)$$

Следовательно, формулой (2.19) функция $A_{11}(\lambda)$ голоморфно продолжается в верхнюю полуплоскость. Следуя схеме доказательства теоремы 1.1 можно показать, что $A_{11}(\lambda)$ ограниченно обратима в верхней полуплоскости. Поэтому функция $A_{11}^{-1}(\lambda)$ принадлежит кольцу $\mathrm{R}_+(H_+, \Pi_+)$. Учитывая представление (1.14), отсюда имеем

$$\theta(\lambda)=\int_0^\infty e^{i\lambda t}\,Q(t)\,dt,\quad Q(t)\in L_1(0,\infty;[H_+;H_-]). \tag{2.20}$$

Из $J$-унитарности функции $A(\lambda)$ имеем

$$\|\theta(\lambda)\|<1,\quad \lambda\in\Pi_+. \tag{2.21}$$

Обозначим через $\mathrm{R}(N)$ кольцо операторных функций $F(\lambda)$, представимых в виде

$$F(\lambda)=C_0+\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,C(t)\,dt,$$

где $C(t)\in L_1(-\infty,\infty;[N])$, $C_0\in[N]$.

Рассмотрим $(I_+-\theta(\lambda)\,\theta^*(\lambda))\in\mathrm{R}(H_+)$ и $(I_--\theta^*(\lambda)\,\theta(\lambda))\in\in\mathrm{R}(H_-)$. Из $J$-унитарности $A(\lambda)$ имеем

$$I_+-\theta(\lambda)\,\theta^*(\lambda)=A_{11}^{-1}(\lambda)\,(A_{11}(\lambda)\,A_{11}^*(\lambda)-A_{12}(\lambda)\,A_{12}^*(\lambda))\,A_{11}^{*-1}(\lambda)=$$
$$=A_{11}^{-1}(\lambda)\,A_{11}^{*-1}(\lambda)>0,$$
$$I_--\theta^*(\lambda)\,\theta(\lambda)=A_{22}^{-1}(\lambda)\,(A_{22}(\lambda)\,A_{22}^*(\lambda)-A_{21}(\lambda)\,A_{21}^*(\lambda))\,A_{21}^{*-1}(\lambda)=$$
$$=A_{22}^{-1}(\lambda)\,A_{22}^{*-1}(\lambda)>0.$$

Отсюда получаем

$$\begin{gathered}0<(I_+-\theta(\lambda)\,\theta^*(\lambda))^{-1}\in\mathrm{R}(H_+),\\ 0<(I_--\theta^*(\lambda)\,\theta(\lambda))^{-1}\in\mathrm{R}(H_-).\end{gathered} \tag{2.22}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.2. *Матрицы рассеяния канонического оператора* (0.3), *соответствующие самосопряженным расширениям вида* (2.1) *с выходом на всю вещественную ось, задаются формулой* (2.18), *где* $\theta(\lambda)$ *—операторная функция со значениями из* $[H_+:H_-]$, *удовлетворяющая условиям* (2.20) — (2.22).

*В случае, когда вместо* $\theta(\lambda)$ *берется не зависящее от* $\lambda$ *изометрическое отображение пространства* $H_+$ *на* $H_-$, *функция* $S(\lambda)$ *в формуле* (2.18) *является* $S$*-матрицей канонического оператора* (0.3), *соответствующей самосопряженным расширениям без выхода.*

2.3. Здесь мы рассмотрим случай, когда значениями функции $V(r)$ при $r<0$ являются операторы, действующие в некотором конечномерном подпространстве $H_0\subset H$ таком, что $\dim H_0^+=\dim H_0^-$, где $H_0^\pm=P_0H_\pm$, а $P_0$ — проектор на подпространство $H_0$. Ясно, что в этом случае функция $\theta(\lambda)$ является некоторой матрицей-функцией. Из условий (2.22) и теоремы 8.2 работы [12] следует, что функции $(I_+-\theta(\lambda)\,\theta^*(\lambda))^{-1}$, $(I_--\theta^*(\lambda)\,\theta(\lambda))^{-1}$ допускают единственные факторизации

$$(I_+ - \theta(\lambda)\,\theta^*(\lambda))^{-1} = G_+^*(\lambda)\,G_+(\lambda),$$

$$(I_- - \theta^*(\lambda)\,\theta(\lambda))^{-1} = G_-^*(\lambda)\,G_-(\lambda)$$

такие, что функции $G_\pm^{-1} \in \mathrm{R}_\pm(H_0^\pm, \Pi_\pm)$. Образуем функции $G_+(\lambda)\,\theta(\lambda)$, $G_-(\lambda)\,\theta^*(\lambda)$. В силу (2.20) они представимы в виде

$$G_+(\lambda)\,\theta(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda t}\,\Gamma_1(t)\,dt, \tag{2.23}$$

$$G_-(\lambda)\theta(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-i\lambda t}\,\Gamma_2(t)\,dt.$$

Нетрудно проверить, что матрица-функция

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11}(\lambda) & \bar{A}_{12}(\lambda) \\ \bar{A}_{21}(\lambda) & \bar{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_+(\lambda) & G_+(\lambda)\,\theta(\lambda) \\ G_-(\lambda)\,\theta^*(\lambda) & G_-(\lambda) \end{pmatrix}$$

$J_0$-унитарна, где $J_0 = P_0 J$. В силу (2.23) и того, что $G_\pm(\lambda) \in \mathrm{R}_\pm(H_0^\pm, \Pi_\pm)$, функция $\bar{A}(\lambda)$ представима в виде (1.4) с $J = J_0$. Поэтому, учитывая условие (2.21), можно утверждать (см. [9]), что по матрице-функции $\bar{A}(\lambda)$ однозначно определяется потенциал канонического уравнения вида (0.6) такого, что $A$-матрицей этого уравнения является функция $\bar{A}(\lambda)$. Таким образом, по матрице-функции $\theta(\lambda)$ со свойствами (2.20)—(2.22) восстанавливается потенциал канонического уравнения на полуоси.

Рассмотрим некоторое самосопряженное расширение с выходом вида (2.1) оператора, задаваемого дифференциальным выражением (0.3) с потенциалом $V_+(r)$ и $S$-матрицу $S(\lambda)$, соответствующую этому расширению. По этим данным, обращая дробно-линейное преобразование (2.18), определим функцию

$$\theta(\lambda) = -(A_{12}(\lambda) - S(\lambda)\,A_{22}(\lambda))^{-1}\,(A_{11}(\lambda) - S(\lambda)\,A_{21}(\lambda)).$$

Здесь $A(\lambda) = \|A_{ij}(\lambda)\|_{i,j=1,2}$ — $A$-матрица канонического уравнения на полуоси с потенциалом $V_+(r)$.

Выше было показано, что по функции $\theta(\lambda)$ можно восстановить потенциал $V_-(r)$ на полуоси $(0, \infty)$. Рассматривая каноническое уравнение на всей оси с потенциалом

$$V(r) = \begin{cases} V_+(r) & \text{при } r > 0 \\ V_-(-r) & \text{при } r < 0 \end{cases}$$

и следуя рассуждениям п. 2.2 можно показать, что матрица рассеяния, соответствующая такому расширению оператора на полуоси с потенциалом $V_+(r)$, совпадает с заданной функцией $S(\lambda)$.

Рассмотрения настоящего пункта вместе с теоремой 2.2 приводят к следующему предложению:

Теорема 2.3. *Формулой* (2.18), *где* $\Theta(\lambda)$*—матрица-функция, удовлетворяющая условиям* (2.20)—(2.22), *дается описание $S$-матриц канонического оператора* (0.3), *соответствующих таким самосопряженным расширениям с выходом вида* (2.1), *что значениями потенциальной функции $V(r)$ при $r<0$ являются конечномерные операторы.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 18.VIII.1975

Պ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ. Կանոնական դիֆերենցիալ օպերատորների ցրման տեսության մասին (*ամփոփում*)

*Աշխատանքը նվիրված է (0.3) տեսքի դիֆերենցիալ արտահայտությամբ որոշվող օպերատորների ցրման տեսությանը։*

*(0.3)—(0.5) դիֆերենցիալ օպերատորի համար դիտարկվում են ասիմպտոտական մոտեցման դեպքում, ալիքային օպերատորների օգնությամբ և ըստ Լաքս-Ֆիլիպսի սխեմայի առաջացող S-մատրիցները և ապացուցվում է նրանց համընկնումը։*

*Այնուհետև, ամբողջ առանցքի վրա (2.1) արտահայտությամբ որոշված օպերատորը դիտարկվում է որպես (0.3) դիֆերենցիալ արտահայտությամբ կիսաառանցքի վրա տրված օպերատորի ինքնահամալուծ լայնացում։ Ապացուցվում է, որ այդպիսի լայնացումներին համապատասխանող S-մատրիցները ներկայացվում են (2.22) տեսքով։*

*Այն դեպքում, երբ բացասական կիսաառանցքի վրա լայնացումները տրվում են հանրագումարելի մատրից-ֆունկցիայով, լուծվում է $V(r)$ պոտենցիալի վերականգնման հակադարձ խնդիրը, ըստ տրված $S(\lambda)$ ֆունկցիայի։*

P. E. MELIK-ADAMIAN. *On the scattering theory of canonical differential operators* (summary)

The paper investigates some problem of the theory of scattering for the operators generated by the differential expression of the type (0.3).

The coincidense of $S$-matrices $S(\lambda)$ which arise in the asimptotical scattering theory under wave operator and Lax-Phillips schemes is proved.

Further the operator defined by (2.1) on the whole axis is considered as a selfadjoint extension of the operator, difined by (0.3) on the half axis. It is proved that the $S$-matrices corresponding to such extensions admit representation in the form (2.22). In the case, when the extensions on the negative half axis are given by summable matrix functions the inverse problem, for the potential $V(r)$ on the negative half axis given the function $S(\lambda)$ is solved.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн.* Введение в геометрию индефинитных $J$-пространств и теорию операторов в этих пространствах, Вторая летняя матем. школа, 1, Киев, „Наукова думка", 1965.
2. *В. М. Адамян.* К теории канонических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 178, № 1, 1966.
3. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.* К теории $S$-матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом, ДАН АрмССР, 46, № 4, 1968.
4. *П. Лакс, Р. Филлипс.* Теория рассеяния, Изд. „Мир", М., 1971.

5. *В. М. Адамян, Д. З. Аров.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов, Матем. исследования, 1, 2, Кишинев, 1966.
6. *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Изд. „Наука", М., 1970.
7. *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян.* О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, Матем. исследования, 2, 3, Кишинев, 1967.
8. *S. Bocher, R. S. Phillips.* Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings, Ann. of Math., 2, 43, 1942.
9. *П. Э. Мелик-Адамян.* О свойствах $S$-матрицы канонических дифференциальных уравнений на всей оси, ДАН Арм.ССР, 58, № 4, 1974.
10. *В. М. Адамян.* Невырожденные унитарные сцепления полуунитарных операторов, Функц. анализ, 7, № 4, 1973.
11. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.* Некоторые приложения теоремы о факторизации унитарной матрицы, Функц. анализ, 4, № 4, 1970.
12. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, вып. 2, 1958.