Л. В. МИКАЕЛЯН

О МНОГОМЕРНОМ КОНТИНУАЛЬНОМ АНАЛОГЕ
 ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Г. СЕГЕ

Пусть $D_n(f)$ — детерминат теплицевой матрицы

$$\|c_{i-j}(f)\|_{i,j=0}^n,$$

образованной коэффициентами Фурье

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

произвольной неотрицательной функции $f(t) \in L_1(-\pi, \pi)$.

В работе [1] Г. Сеге установил формулу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_{n-1}(f)} = G(f),$$

где

$$G(f) = \begin{cases} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(t) dt \right\} & \text{при } \ln f(t) \in L_1(-\pi, \pi) \\ 0 & \text{при } \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(t) dt = -\infty. \end{cases}$$

Пусть задана непрерывная $n \times n$ -матрица-функция $H(t)$ ($-\infty < t < \infty$). Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$f(t) + \lambda \int_0^t H(t-s) f(s) ds = g(t). \quad (0.1)$$

Введем обозначения

$$F(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{при } 0 < t \leq r \\ f_2(t-r) & \text{при } r < t \leq 2r \\ \dots & \dots \\ f_n(t-(n-1)r) & \text{при } (n-1)r < t \leq nr, \end{cases} \quad (0.2)$$

$$G(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{при } 0 < t \leq r \\ g_2(t-r) & \text{при } r < t \leq 2r \\ \dots & \dots \\ g_n(t-(n-1)r) & \text{при } (n-1)r < t \leq nr, \end{cases} \quad (i-1)r < t \leq ir,$$

$$\tilde{H}(t, s) = h_{ij}(t - (i-1)r - s + (j-1)r) \quad \text{при } (j-1)r < s \leq jr,$$

где $h_{ij}(t)$ — элементы матрицы $H(t)$.

Тогда система (0.1) эквивалентна следующему уравнению:

$$F(t) + \lambda \int_0^{nr} \bar{H}(t-s) F(s) ds = G(t) \quad (0 \leq t \leq nr). \quad (0.3)$$

Детерминант Фредгольма уравнения (0.3)

$$D_{nr}(\lambda, \bar{H}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^{nr} \dots \int_0^{nr} \tilde{H} \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_n \quad (0.4)$$

является многомерным континуальным аналогом детерминанта Теплица.

Для скалярного случая ($n = 1$) асимптотические свойства детерминанта (0.4) при $r \rightarrow \infty$ впервые изучал М. Кац [2]. Новые результаты в этом направлении были получены Н. И. Ахиезером [3], Хиршманом [4] и др.*

В настоящей заметке при более общих предположениях, чем в [2], [3], получена следующая формула:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [D_r(H)]^{1/r} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Indet} [I + \hat{H}(\lambda)] d\lambda \right\},$$

где

$$D_r(H) = D_{nr}(1, \bar{H}) \quad \text{и} \quad \hat{H}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} H(t) dt.$$

1°. Пусть $K(t, s) = \|k_{ij}(t, s)\|_{j=1}^n$ — непрерывная матрица-функция в квадрате $[0, R] \times [0, R]$. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$f(t) + \lambda \int_0^r K(t, s) f(s) ds = g(t). \quad (1.1)$$

Предположим, что операторы

$$(K_r f)(t) = \int_0^r K(t, s) f(s) ds \quad (0 < r < \infty) \quad (1.2)$$

ядерные в пространствах $L_2(0, r)$ ($0 < r < R$). Тогда, как известно, детерминант Фредгольма $D_{nr}(\lambda, \bar{K})$, определенный как (0.4), совпадает с выражением

$$D_r(\lambda, K) = \prod_j (1 + \lambda \lambda_j(r)),$$

где $\lambda_j(r)$ — собственные значения оператора K_r .

* Как стало известно автору, при произвольном n этими вопросами занимался И. Ю. Ляник [9].

При $|\lambda| < \frac{1}{M_r}$, где $M = \max_{0 < t, s < R} \|K(t, s)\|^{**}$, ядро резольвенты $\Gamma_r(t, s, \lambda)$ системы (1.1) разлагается в ряд

$$\Gamma_r(t, s, \lambda) = K(t, s) + \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^k \int_0^r \dots \int_0^r K(t, s_1) \dots K(s_k, s) ds_1 \dots ds_k$$

и является голоморфной матрицей-функцией от λ в круге $|\lambda| < \frac{1}{M_r}$.

Легко проверяется, что

$$\begin{aligned} \ln D_r(\lambda, K) &= \text{sp} \ln [I + \lambda K_r] = \text{sp} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p K_r^p = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \text{sp} K_r^p. \end{aligned}$$

Как известно, [5]

$$\text{sp} K_r^p = \int_0^r \dots \int_0^r \text{sp} [K(s_p, s_1) K(s_1, s_2) \dots K(s_{p-1}, s_p)] ds_1 \dots ds_p.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \ln D_r(\lambda, K) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \int_0^r \dots \int_0^r \text{sp} [K(s_p, s_1) \dots \\ &\dots K(s_{p-1}, s_p)] ds_1 \dots ds_p. \end{aligned}$$

Этот ряд сходится равномерно по $r \in [0, R]$, при $|\lambda| < \frac{1}{MR}$.

Покажем, что его можно почленно дифференцировать.

В самом деле, ряд

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \frac{d}{dr} \int_0^r \dots \int_0^r \text{sp} [K(s_p, s_1) \dots K(s_{p-1}, s_p)] ds_1 \dots ds_p = \\ &= \lambda \text{sp} K(r, r) + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \sum_{j=1}^p \int_0^r \dots \int_0^r \text{sp} [K(s_p, s_1) \dots K(s_{j-1}, r) \times \\ &\times K(r, s_{j+1}) \dots K(s_{p-1}, s_p)] ds_1 \dots ds_{j-1} ds_{j+1} \dots ds_p = \end{aligned}$$

* Под символом $\|\cdot\|$ понимаем гильбертову норму в пространстве матриц порядка $n \times n$.

$$\begin{aligned}
&= \lambda \operatorname{sp} K(r, r) + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \sum_{j=1}^p \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} [K(r, s_{j+1}) K(s_p, s_1) \times \\
&\quad \times K(s_1, s_2) \cdots K(s_{p-1}, s_p) K(s_{j-1}, r)] ds_1 \cdots ds_{j-1} ds_{j+1} \cdots ds_p = \\
&= \lambda \left\{ \operatorname{sp} K(r, r) + \sum_{p=1}^{\infty} (-\lambda)^p \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} [K(r, s_1) \cdots \right. \\
&\quad \left. \cdots K(s_{p-1}, r)] ds_1 \cdots ds_{p-1} \right\}
\end{aligned}$$

сходится равномерно по $r \in [0, R]$. Следовательно, для всех λ , принадлежащих кругу $|\lambda| < \frac{1}{MR}$, имеет место

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(\lambda, K) = \lambda \operatorname{sp} \Gamma_r(r, r, \lambda). \quad (1.3)$$

Докажем, что $\operatorname{sp} \Gamma_r(r, r, \lambda)$ является голоморфной функцией от λ во всей комплексной плоскости, кроме нулей $D_r(\lambda, K)$.

Используя обозначения, аналогичные (0.2), легко убедиться, что система (1.1) эквивалентна одному уравнению

$$F(t) + \lambda \int_0^{nr} \tilde{K}(t, s) F(s) ds = G(t).$$

Обозначим через $\tilde{\Gamma}(t, s, \lambda)$ ядро резольвенты этого уравнения. Тогда

$$\tilde{\Gamma}(t, s, \lambda) = \frac{D_{nr}(t, s, \lambda)}{D_{nr}(\lambda, \tilde{K})}, \quad (1.4)$$

где $D_{nr}(t, s, \lambda)$ — минор Фредгольма, $D_{nr}(\lambda, \tilde{K})$ — детерминант Фредгольма этого уравнения. Так как они — целые функции от λ и $D_{nr}(\lambda, \tilde{K}) = D_r(\lambda, K)$, то $\tilde{\Gamma}(t, s, \lambda)$ голоморфна всюду, кроме нулей $D_r(\lambda, K)$.

Поскольку ядро резольвенты системы (1.1) связано с $\tilde{\Gamma}(t, s, \lambda)$ следующим образом:

$$\Gamma_r(t, s, \lambda) = \prod_{i,j} \tilde{\Gamma}_{ij}(t, s, \lambda) \Big|_{i,j=1}^r,$$

где

$$\tilde{\Gamma}_{ij}(t, s, \lambda) = \tilde{\Gamma}(t + (i-1)r, s + (j-1)r; \lambda) \quad (0 \leq t, s \leq r),$$

то

$$\operatorname{sp} \Gamma_r(t, s, \lambda) \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma}(t, s, \lambda)$$

имеет одинаковую область голоморфности.

2°. Пусть $H(t)$ — непрерывная $n \times n$ матрица-функция такая, что $H(t) \in L_1^{n \times n}(-\infty, \infty)$, $H^*(t) = H(-t)$ и ее преобразование Фурье

$$\hat{H}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} H(t) dt$$

удовлетворяет условию

$$\det [I + \hat{H}(\lambda)] \neq 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty). \quad (2.1)$$

При этих предположениях легко заметить, что матрица-функция $I + \hat{H}(\lambda)$ положительно определенная при всех $-\infty < \lambda < \infty$. Это, в свою очередь, означает, что при всех $0 < r \leq \infty$ система (0.1) имеет единственное решение $f_r(t)$ и вектор-функции

$$\tilde{f}_r(t) = \begin{cases} f_r(t), & 0 < t \leq r \\ 0, & r < t < \infty \end{cases}$$

сходятся при $r \rightarrow \infty$ по норме пространства $L_p^{n \times 1}$ к решению уравнения

$$f(t) + \int_0^{\infty} H(t-s) f(s) ds = g(t)$$

какова бы ни была вектор-функция $g(t) \in L_p^{n \times 1}(0, \infty)$.

Значит, резольвента системы (0.1) определена при всех $0 < p \leq \infty$ и ядро ее $\Gamma_r(t, s, \lambda)$ голоморфно по λ в верхней полуплоскости и в некоторых окрестностях нуля и единицы.

Используя неравенство Адамара [6], из (1.4) получаем, что $\text{sp } \Gamma_r(r, r, \lambda)$ — интегрируемая функция от r и

$$\int_{r_0}^r \text{sp } \Gamma_r(\tau, \tau, \lambda) d\tau$$

является голоморфной функцией в верхней полуплоскости и в некоторой окрестности единицы.

Из формулы (1.3) следует, что

$$D_r(\lambda, H) = \exp \left[\ln D_{r_0}(\lambda, H) + \lambda \int_{r_0}^1 \text{sp } \Gamma_r(\tau, \tau, \lambda) d\tau \right] \quad (2.2)$$

при $|\lambda| < \frac{1}{MR}$ и $r \in [r_0, R]$ ($r_0 < R < \infty$).

Так как $D_r(\lambda, H)$ — целая функция и равенство (2.2) имеет место в некоторой окрестности нуля, то оно верно там, где голоморфна правая часть.

В частности

$$D_r(1, H) = \exp \left\{ \ln D_r(1, H) + \int_0^r \operatorname{sp} \Gamma_r(\tau, \tau, 1) d\tau \right\}.$$

Если обозначить $D_r(1, H) = D_r(H)$ и $\Gamma_r(t, s, 1) = \Gamma_r(t, s)$, то получим

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(H) = \operatorname{sp} \Gamma_r(r, r).$$

3°. Пусть $F_r(t, s)$ —решение уравнения

$$F_r(t, s) + \int_0^r H^*(t-\tau) F_r(\tau, s) d\tau = H^*(t-s). \quad (3.1)$$

Очевидно, $F_r^*(0, 0) = F_r(r, r)$. Полагая в (3.1) $s = 0$, получим

$$F_r(t, 0) + \int_0^r H^*(t-\tau) F_r(\tau, 0) d\tau = H^*(t).$$

Рассмотрим уравнение

$$F(t) + \int_0^{\infty} H^*(t-\tau) F(\tau) d\tau = H^*(t). \quad (3.2)$$

Из оценки

$$\begin{aligned} \|F_r(t, 0) - F(t)\| \leq & \int_{-\infty}^{+\infty} \|H^*(t)\|^2 dt \cdot \int_0^{\infty} \|F_r(s, 0) - F(s)\|^2 ds + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \|H^*(t)\|^2 dt \cdot \int_r^{\infty} \|F(t)\|^2 dt \end{aligned}$$

следует, что при $r \rightarrow \infty$ $F_r(t, 0) \rightarrow F(t)$ по метрике $C^{1 \times n}(0, \infty)$, так как $F(t) \in L_2^{n \times n}(0, \infty)$ и $F_r(s, 0) \rightarrow F(s)$ по метрике $L_2^{1 \times n}(0, \infty)$. В частности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{D_r'(H)}{D_r(H)} = \operatorname{sp} F^*(0).$$

Легко заметить, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln D_r(H)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{D_r'(H)}{D_r(H)}.$$

Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [D_r(H)]^{1/r} = \exp \{ \operatorname{sp} F^*(0) \}.$$

Остается вычислить $\text{sp } F^*(0)$.

4°. Рассмотрим систему

$$\Gamma(t) + \int_0^{\infty} H(t-s) \Gamma(s) ds = H(t), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (4.1)$$

Обозначим через

$$B(t) = \begin{cases} \int_0^{\infty} H(t-s) \Gamma(s) ds - H(t), & t < 0 \\ 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Положим $\Gamma(t) = 0$ при $t < 0$. Тогда систему (4.1) можно переписать в следующем виде:

$$\Gamma(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-s) \Gamma(s) ds = H(t) + B(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Переходя к преобразованию Фурье, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Gamma(t) e^{i\lambda t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) e^{i\lambda t} dt \cdot \int_0^{\infty} \Gamma(t) e^{i\lambda t} dt &= \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) e^{i\lambda t} dt + \int_{-\infty}^0 B(t) e^{i\lambda t} dt. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}(\lambda) &= \int_0^{\infty} \Gamma(t) e^{i\lambda t} dt, \\ \hat{H}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) e^{i\lambda t} dt, \\ \hat{B}(\lambda) &= \int_0^{\infty} B(-t) e^{-i\lambda t} dt. \end{aligned}$$

Тогда (4.2) принимает вид

$$[I + \hat{H}(\lambda)] [I - \hat{\Gamma}(\lambda)] = I - \hat{B}(\lambda). \quad (4.3)$$

Как известно [7], при наших предположениях на матрицу-функцию $H(t)$ матрица-функция $I + \hat{H}(\lambda)$ допускает следующую факторизацию:

$$I + \hat{H}(\lambda) = G^*(\lambda) G(\lambda),$$

где

$$G^{\pm 1}(\lambda) \in R^{n \times n}(-\infty, \infty) \text{ и } [G^*(\lambda)]^{\pm 1} \in R_{\pm}^{n \times n}(-\infty, \infty).$$

Здесь $R_{\pm}^{n \times n}(-\infty, \infty)$ — класс функций, допускающих представление

$$I \mp \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \gamma_{\pm}(t) dt,$$

где $\gamma_{\pm}(t) \in L_1^{n \times n}(0, \infty)$.

Из (4.3) следует, что

$$G(\lambda) [I - \hat{\Gamma}(\lambda)] = [G^*(\lambda)]^{-1} [I - \hat{B}(\lambda)].$$

Отсюда

$$I - \hat{\Gamma}(\lambda) = G^{-1}(\lambda),$$

$$I - \hat{B}(\lambda) = G^*(\lambda).$$

Поэтому

$$I + \hat{H}(\lambda) = [I - \hat{\Gamma}^*(\lambda)]^{-1} [I - \hat{\Gamma}(\lambda)]^{-1},$$

и следовательно

$$\det [I + \hat{H}(\lambda)] = |\det [I - \hat{\Gamma}(\lambda)]|^{-2},$$

$\det [I + \hat{H}(\lambda)]$ является функцией класса $R(-\infty, \infty)$, т. е.

$$\det [I + \hat{H}(\lambda)] = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{\lambda t} dt. \quad (4.4)$$

Предположим, что матрица-функция $\hat{H}(\lambda)$ кроме условия $\det [I + \hat{H}(\lambda)] \neq 0$ удовлетворяет условию

$$\hat{H}(\lambda) \in L_1^{n \times n}(-\infty, \infty).$$

Тогда $1 - \det [I + \hat{H}(\lambda)] \in L_1(-\infty, \infty)$ и поэтому функцию $h(t)$ можно считать непрерывной. Кроме того, ясно, что $h(-t) = \overline{h(t)}$.

Очевидно

$$\det [I - \hat{\Gamma}(\lambda)] \in R^+(-\infty, \infty),$$

т. е. он представим в виде

$$\det [I - \hat{\Gamma}(\lambda)] = 1 - \int_0^{\infty} \gamma(t) e^{\lambda t} dt, \quad \text{Im } \lambda \geq 0. \quad (4.5)$$

Здесь функция $\gamma(t)$ непрерывна, так как она является решением уравнения

$$\gamma(t) + \int_0^{\infty} h(t-s) \gamma(s) ds = h(t).$$

По теореме Винера—Леви [8]

$$\ln \left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{i\lambda t} dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} l(t) dt, \quad (4.6)$$

где $l(t)$ — непрерывная функция из $L_1(-\infty, \infty)$.

Отсюда

$$1 + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{i\lambda t} dt = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} l(t) dt \right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} l(t) dt \right\} \left\{ 1 - \int_0^{\infty} \gamma(t) e^{i\lambda t} dt \right\} = \\ & = \exp \left\{ - \int_0^{\infty} e^{-i\lambda t} l(-t) dt \right\} \left\{ 1 - \int_0^{\infty} \frac{\gamma(t)}{\gamma(t)} e^{-i\lambda t} dt \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$1 - \int_0^{\infty} \gamma(t) e^{i\lambda t} dt = \exp \left\{ - \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} l(t) dt \right\}.$$

Разлагая правую часть в ряд и, используя теорему единственности для преобразования Фурье, получим

$$\begin{aligned} \gamma(t) = l(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_{\substack{s_1 > 0, \dots, s_{n-1} > 0 \\ s_1 + \dots + s_{n-1} < t}} \dots \int_0^t l(t-s_1-\dots-s_{n-1}) l(s_1) \dots \\ \dots l(s_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.6) следует, что

$$\gamma(0) = l(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \det [I + \hat{H}(\lambda)] d\lambda.$$

С другой стороны, из (4.5) имеем

$$\gamma(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \det[-\hat{\Gamma}(\lambda)]] d\lambda,$$

так как $\hat{\Gamma}(\lambda) \in L_1(-\infty, \infty)$.

Пусть $\Gamma(t) = \|\gamma_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n$, тогда

$$I - \hat{\Gamma}(\lambda) = \|\delta_{ij} - \int_0^{\infty} \gamma_{ij}(t) e^{i\lambda t} dt\|_{i,j=1}^n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \det[I - \hat{\Gamma}(\lambda)] &= \left(1 - \int_0^{\infty} \gamma_{11}(t) e^{i\lambda t} dt\right) \cdots \left(1 - \int_0^{\infty} \gamma_{nn}(t) e^{i\lambda t} dt\right) + \\ &+ R(\lambda) = 1 - \int_0^{\infty} \gamma_{11}(t) e^{i\lambda t} dt - \cdots - \int_0^{\infty} \gamma_{nn}(t) e^{i\lambda t} dt + R_1(\lambda). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \det[I - \hat{\Gamma}(\lambda)]] d\lambda = \gamma_{11}(0) + \cdots + \gamma_{nn}(0) = \text{sp } \Gamma(0),$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_1(\lambda) d\lambda = 0.$$

В самом деле, функция $R_1(\lambda)$ состоит из слагаемых следующего вида:

$$\int_0^{\infty} \gamma_1(t) e^{i\lambda t} dt \cdots \int_0^{\infty} \gamma_p(t) e^{i\lambda t} dt = \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt,$$

где

$$f(t) = \int_{\substack{s_1 > 0 \cdots s_{p-1} > 0 \\ s_1 + \cdots + s_{p-1} < t}} \gamma_1(t - s_1 - \cdots - s_{p-1}) \gamma_2(s_1) \cdots \gamma_p(s_{p-1}) ds_1 \cdots ds_{p-1}$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_1(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt \right] d\lambda = f(0) = 0.$$

Итак

$$\text{sp } \Gamma(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \det[I + \hat{H}(\lambda)] d\lambda.$$

Обращаясь к уравнению (3.2), заметим, что

$$\operatorname{sp} F^*(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \det [I + \dot{H}(\lambda)] d\lambda.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть $H(t)$ — непрерывная матрица-функция класса $L_1^{n \times n}(-\infty, \infty)$ такая, что

- 1) $H^*(t) = H(-t)$,
- 2) $\det [I + \dot{H}(\lambda)] \neq 0$,
- 3) $\dot{H}(\lambda) \in L_1(-\infty, \infty)$,
- 4) операторы

$$(K_r f)(t) = \int_0^r H(t-s) f(s) ds$$

ядерны в пространствах $L_2^{n \times n}(0, r)$ ($0 < r < \infty$).

Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [D_r(H)]^{1/r} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \det [I + \dot{H}(\lambda)] d\lambda \right\}.$$

Замечание. Можно показать, что результат работы [3] допускает обобщение на многомерный случай. Именно, при условиях аналогичных условиям работы [3], справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{D_r(H)}{\exp \left\{ \frac{r}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \det [I + \dot{H}(\lambda)] d\lambda \right\}} &= \\ = \exp \left\{ \int_0^{\infty} t \operatorname{sp} [F_r^*(t, 0) F_r(t, 0)] dt \right\}, \end{aligned}$$

где $F_r(t, 0)$ — решение уравнения

$$F_r(t, 0) + \int_0^t H^*(t-s) F_r(s, 0) ds = H^*(t).$$

Автор выражает искреннюю благодарность М. Г. Крейну за постановку задачи и В. М. Адамяну за ценные обсуждения.

1. Վ. ՄԻՔԱԵԼՅԱՆ. Գ. Սեզգոյի մի բնորոշի բազմաչափ կոնտինուալ ածայրցի մասին (ամփոփում)

Գիտարկվում է $(0,1)$ ինտեգրալ հավասարումների սխառեմի Ֆրեդհոլմի $D_r(H)$ դետերմինանտի ասիմպտոտիկան, երբ $r \rightarrow \infty$: $H(t)$ կորիզի վրա որոշակի պայմանների դեպքում ստացված է հետևյալ բանաձևը:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [D_r(H)]^{1/r} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \det [I + \hat{H}(i\lambda)] d\lambda \right\}.$$

L. V. MIKAELEIAN. On the multidimensional continual analogue of a theorem of G. Szegő (summary)

The asymptotical behaviour of the Fredholm determinant $D_r(H)$ of a system of integral equations (0.1) is considered when $r \rightarrow \infty$. Under certain assumptions about the kernel $H(t)$ the following formula

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [D_r(H)]^{1/r} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \det [I + \hat{H}(i\lambda)] d\lambda \right\}$$

is obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. G. Szegő. Ein Grenzwertsatz über die Toeplitz'schen Determinanten einer reellen positiven Funktion, Math. Ann., 76, 1915, 490—503.
2. M. Kac. Toeplitz matrices, translation kernels and a related problem in probability theory, Duke Math. J., 21, № 3, 1954, 501—509.
3. Н. И. Ахиезер. Континуальный аналог некоторых теорем о тоеплицевых матрицах, УМЖ, XVI, № 4, 1964, 445—462.
4. J. J. Hirschman, Jr. On a formula of Kac and Achieser, Journal of math. and mech., 16, № 2, 1966, 167—196.
5. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамопрояженных операторов, М., Изд. „Наука“, 1965.
6. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц, М., Изд. „Наука“, 1967.
7. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, XIII, № 2, 1958, 66—72.
8. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации, М., Гостехиздат, 1947.
9. И. Ю. Линник. Пространственное обобщение одной теоремы о тоеплицевом операторе, Мат. заметки, 6, вып. 14, 1973, 895—900.