

Б. Т. БАТИКЯН

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБР

1°. Пусть A — равномерная алгебра на хаусдорфовом компакте X . Это означает, что A является замкнутой подалгеброй алгебры $C(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на X , содержит все постоянные функции и разделяет точки компакта X . Равномерная алгебра наделается обычной $\sup$ -нормой, которая превращает ее в банахову алгебру. Как известно, пространство максимальных идеалов $M(A)$ равномерной алгебры A есть компакт в гельфандовской топологии, причем X гомеоморфно вкладывается в $M(A)$ и содержит в качестве замкнутого подмножества границу Шилова $S(A)$.

Равномерная алгебра A называется максимальной подалгеброй алгебры $C(X)$, если $A \neq C(X)$ и не существует такой равномерной алгебры B , отличной от A и от $C(X)$, которая удовлетворяла бы условию $A \subset B \subset C(X)$. Если обозначить через $[A, h]$ равномерную алгебру на X , порожденную алгеброй A и функцией $h \in C(X)$ (каждый элемент алгебры $[A, h]$ представляется в виде равномерного предела полиномов $\sum_{k=0}^n f_k h^k$, $f_k \in A$), то A в том и только в том случае

образует максимальную подалгебру в $C(X)$, когда $[A, h] = C(X)$ для всякой непрерывной функции h , не принадлежащей к A .

Теория максимальных подалгебр берет свое начало с работы Дж. Вермера [1], который установил, что совокупность непрерывных функций на единичной окружности Γ , допускающих голоморфное продолжение внутрь круга, образует максимальную подалгебру в $C(\Gamma)$. Теорема Вермера, выявив важность понятия максимальной подалгебры, вызвала большое количество работ, посвященных теории максимальных подалгебр.

Укажем, например, на работы В. Рудина [2], К. Гофмана и И. Зингера [3], [4], И. Гликсберга [5], Е. А. Горина и В. М. Золотаревского [6]. В последней работе приводится, в частности, многомерный аналог теоремы Вермера.

В работе [7] С. А. Григоряном и автором было введено понятие подалгебры конечного типа, обобщающее понятие максимальной подалгебры. Это определение заключается в следующем.

Пусть A — равномерная алгебра на компакте X . Рассмотрим следующую конечную цепочку равномерных алгебр, заданных на X (включения строгие)

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{k-1} \subset A_k = C(X). \quad (1)$$

Если при всех i ($0 \leq i \leq k-1$) между A_i и A_{i+1} не существует промежуточных равномерных подалгебр, то цепочка (1) называется неуплотняемой цепочкой. Говорят, что цепочка (1) имеет длину k .

Равномерная алгебра A называется подалгеброй конечного типа, а именно типа n , алгебры $C(X)$, если всякая цепочка вида (1) имеет длину $\leq n$ и существует хотя бы одна неуплотняемая цепочка в точности длины n .

Будем обозначать через $t(A)$ тип алгебры A , так что выражение „ $t(A) = n$ на X “ будет означать, что равномерная алгебра A является подалгеброй типа n в $C(X)$.

Очевидно, максимальные подалгебры суть подалгебры типа 1. Если же, например, $X = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C}: |z-2| = 1\}$ и A — алгебра непрерывных функций на X , допускающих голоморфное продолжение внутрь обоих кругов, то по теореме Вермера $t(A) = 2$ на X .

В работе [7] было показано, что на подалгебры конечного типа в своеобразной форме распространяется ряд результатов из теории максимальных подалгебр. Так, например, если A — максимальная подалгебра $C(X)$, то как указано в [4] компакт X совпадает с границей Шилова $S(A)$ алгебры A , а согласно предложению 1 из [7], если $t(A) = n$ на X , то множество $X \setminus S(A)$ может содержать не более чем $n-1$ точек. Далее, согласно предложению 4 из той же работы для подалгебры типа n в X не может существовать более n неодноточечных максимальных множеств антисимметрии (соответствующий результат для максимальных подалгебр приводится, например, в [8], стр. 175).

Настоящая работа содержит обобщения (а также некоторые уточнения) описанных выше результатов. В частности, в п. 3 изучается вопрос о связи между разбиениями компакта X на максимальные множества антисимметрии, осуществляемые алгебрами A и B в предположении, что A образует максимальную подалгебру в B , т. е. между A и B не существует промежуточных равномерных подалгебр. Кроме того, отдельно рассматривается частный случай, когда $\dim B/A = 1$. Оказывается, что при этом множество $S(B) \setminus S(A)$ не более чем одноточечно (п. 2), и если алгебра A антисимметрична, то число максимальных множеств антисимметрии алгебры B не превосходит 2 (п. 3).

Приведем необходимые сведения о подалгебрах коразмерности 1, содержащиеся в работе [9]. Пусть A и B — равномерные алгебры на компакте X , и пусть A образует подалгебру коразмерности 1 в алгебре B . Тогда A совпадает с ядром некоторого непрерывного линейного функционала ψ на B . При этом ψ либо имеет вид $\psi = c(\varphi_1 - \varphi_2)$, где c — константа, а φ_1 и φ_2 — мультипликативные функционалы на B , т. е. ненулевые гомоморфизмы алгебры B в поле комплексных чисел, либо функционал ψ есть точечная производная на B , т. е. существует

такой мультипликативный функционал φ , что $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g) + \varphi(g)\varphi(f)$ для всех $f, g \in B$. В первом случае $A = \{f \in B: \varphi_1(f) = \varphi_2(f)\}$ и, отождествляя мультипликативные функционалы с соответствующими точками пространства $M(B)$, будем говорить, что алгебра A получается из B „склеиванием“ точки φ_1 с точкой φ_2 . Поскольку алгебра A разделяет точки X , хотя бы один из функционалов φ_1 или φ_2 должен принадлежать к множеству $M(B) \setminus X$.

Через A_E будем обозначать равномерное замыкание сужения $A|_E$ равномерной алгебры A на замкнутое подмножество E компакта X . Очевидно, A_E образует равномерную алгебру на E .

2°. Предположим, что на компакте X задана равномерная алгебра A , причем X не исчерпывает все пространство $M(A)$ максимальных идеалов алгебры A . Выделим произвольные точки $y_1, \dots, y_k$ из множества $M(A) \setminus X$ и образуем компакт $Y = X \cup \{y_1, \dots, y_k\}$. Алгебра A является равномерной алгеброй также и на компакте Y , поскольку, как известно, каждая функция из A продолжается непрерывно с X на пространство $M(A)$.

Теорема 1. Если $t(A) = n$ на X , то $t(A) = n + k$ на Y .

Доказательство. Для доказательства теоремы проведем индукцию по n , при этом, очевидно, можно ограничиться случаем $k = 1$, когда $Y = X \cup \{y\}$, $y \in M(A) \setminus X$. Обозначим через B равномерную алгебру на Y , содержащую A и не совпадающую с $C(Y)$.

Пусть сперва $n = 1$, т. е. алгебра A максимальна в $C(X)$. Если $y \notin S(B)$, то $S(B) \subset X$, и потому сужение $B|_X$ замкнуто в $C(X)$. Из максимальной алгебры A следует, что $B|_X = A|_X$, т. е. $B = A$. Рассмотрим тот случай, когда $y \in S(B)$. Поскольку в то же время точка y является изолированной точкой в Y , в алгебре B найдется функция h , удовлетворяющая условиям $h(y) = 1$, $h = 0$ на X . Функция h не может принадлежать к A , так как $S(A) \subset X$, поэтому алгебра $[A, h]$ не совпадает с A . С другой стороны, как нетрудно убедиться, $[A, h]$ образует максимальную подалгебру в $C(Y)$, в частности, $[A, h] = B$. Таким образом, всякая нетривиальная равномерная алгебра, содержащая в себе A , является максимальной подалгеброй в $C(Y)$. Это и означает, что $t(A) = 2$ на Y .

Пусть теперь $n > 1$. Достаточно показать, что если алгебра B не совпадает с A , то $t(B) \leq n$ на Y . Если $y \notin S(B)$, то B образует равномерную алгебру на компакте X , и поскольку $A \subset B$, $t(B) \leq n - 1$ на X . Тогда в силу индуктивного предположения $t(B) \leq n$ на Y . Если же $y \in S(B)$, то в алгебре B содержится характеристическая функция h точки y . Ясно, что $t([A, h]) = n$ на Y (алгебра $[A, h]$ образует в $C(Y)$ подалгебру такого же типа, что и алгебра A в $C(X)$), следовательно, $t(B) \leq n$ на Y . Теорема доказана.

Содержащееся в работе [7] предложение 1 оказывается простым следствием теоремы 1.

Следствие. Если $t(A) = n$ на X , то множество $X \setminus S(A)$ содержит не более $n - 1$ точек.

Доказательство. Положим $m = i(A)$ на $S(A)$. Если множество $X \setminus S(A)$ состоит из k точек, то согласно теореме 1 $n = m + k$, т. е. $k = n - m \leq n - 1$.

В частности, если компакт X не содержит изолированных точек и $i(A) < \infty$ на X , то $S(A) = X$.

Следующая теорема дает информацию об изменении границы Шилова равномерной алгебры при переходе к ее подалгебре конечной коразмерности.

Теорема 2. Пусть A и B — равномерные алгебры на компакте X . Если A образует подалгебру коразмерности n в алгебре B , то множество $S(B) \setminus S(A)$ не может содержать более n точек.

Доказательство. Если $\dim B/A = n$, то согласно [9] существует неуплотняемая цепочка

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = B$$

длины n , причем $\dim A_{i+1}/A_i = 1$. В силу этого достаточно рассмотреть случай $n = 1$.

Очевидно, $S(A) \subset S(B)$. Предположим, что множество $S(B) \setminus S(A)$, вопреки утверждению теоремы, содержит хотя бы две точки: x_1 и x_2 . Положим $E = \{x_1, x_2\} \cup S(A)$. Легко показать, что $A_E = A|_E$ образует подалгебру коразмерности 1 в алгебре B_E (например, путем рассмотрения пространств ортогональных мер к алгебрам A_E и B_E), и что множество E , содержащее изолированные точки x_1 и x_2 , служит границей Шилова для алгебры B_E . Следовательно, B_E содержит характеристическую функцию h_1 точки x_1 и характеристическую функцию h_2 точки x_2 (см. доказательство теоремы 1), причем $h_2 = f + \lambda h_1$, где $f \in A_E$ и λ — комплексное число. Другими словами, ненулевая функция f принимает значение 0 всюду на $S(A) = S(A_E)$, что невозможно.

Следствие. Если компакт X не содержит изолированных точек и $\dim B/A < \infty$, то $S(A) = S(B)$.

Замечание. Пусть $\dim B/A = 1$ и $S(B) \neq S(A)$. Тогда по теореме 2 $S(B) = S(A) \cup \{x_0\}$, $x_0 \in X$, и алгебра B содержит характеристическую функцию точки x_0 . Это означает, как нетрудно убедиться, что алгебра A получается из B „склеиванием“ точки x_0 с какой-то точкой из $M(B) \setminus X$. Таким образом, если A совпадает с ядром точечной производной на B , то $S(A) = S(B)$.

3°. Пусть на компакте X определены две равномерные алгебры A и B , и пусть A — максимальная подалгебра алгебры B , т. е. между A и B не существует промежуточных равномерных подалгебр. Оказывается, это обстоятельство обуславливает зависимость между разбиениями компакта X на максимальные множества антисимметрии, осуществляемые этими алгебрами.

Теорема 3. Если A образует максимальную подалгебру в B , то все, кроме быть может одного, максимальные множества

антисимметрии алгебры A служат максимальными множествами антисимметрии и для B .

Доказательство. Пусть $\{E_i\}$ обозначает совокупность (вообще говоря, бесконечную) всех неодноточечных максимальных множеств антисимметрии алгебры A . Компакт E_i представляется в виде пересечения множеств пика алгебры A , а значит и B , поэтому $A|E_i = A|E_i$ и $B|E_i = B|E_i$ при всяком i (см. [10], стр. 83, 85, 87). Покажем, что $A|E_i = B|E_i$ для всех индексов i , кроме одного.

Допустим, что существуют два таких индекса i_1 и i_2 , что $A|E_{i_1} \neq B|E_{i_1}$ и $A|E_{i_2} \neq B|E_{i_2}$. Рассмотрим равномерную алгебру

$$A_1 = \{f \in C(X): f|E_i \in \setminus A|E_i \text{ при } i \neq i_1 \text{ и } f|E_{i_1} \in B|E_{i_1}\}.$$

По теореме Шилова—Бишоп ([10], стр. 87) $A \subset A_1$, причем $A \neq A_1$, поскольку $A|E_{i_1} \neq A_1|E_{i_1} = B|E_{i_1}$. С другой стороны, $A_1 \subset B$. Действительно, каждое неодноточечное максимальное множество антисимметрии F_j алгебры B содержится в каком-то E_i . Если $f \in A_1$, то $f|E_i \in B|E_i$ при всех i , и, следовательно, $f|F_j \in B|F_j$ при всех j , т. е. $f \in B$. Однако $A_1 \neq B$, так как $A_1|E_{i_1} = A|E_{i_1} \neq B|E_{i_1}$. Существование такой алгебры A_1 противоречит максимальнойности A в B .

Таким образом, существует такой индекс i_1 , что $A|E_i = B|E_i$ при $i \neq i_1$, а $A|E_{i_1} \neq B|E_{i_1}$. В частности, при $i \neq i_1$ компакт E_i служит максимальным множеством антисимметрии и для алгебры B . Теорема доказана.

В п. 1 отмечалось, что относительно подалгебр конечного типа в работе [7] получен следующий результат: если $t(A) = n$ на X , то в X существует не более чем n неодноточечных максимальных множеств антисимметрии алгебры A .

Это утверждение вытекает из теоремы 3. Действительно, согласно определению существует неуплотняемая цепочка равномерных алгебр, имеющая длину n и соединяющая алгебры A и $C(X)$:

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = C(X).$$

Последовательно применяя теорему 3 (сперва к алгебрам A_{n-1} и $C(X)$, затем к алгебрам A_{n-2} и A_{n-1} , и т. д.) и имея в виду то обстоятельство, что все максимальные множества антисимметрии алгебры $C(X)$ одноточечны, легко получаем требуемый факт.

Следующее замечание уточняет результат следствия из теоремы 1.

Замечание. Пусть A — подалгебра типа n в алгебре $C(X)$. Если число неодноточечных максимальных множеств антисимметрии алгебры A равно k ($k \leq n$), то множество $X \setminus S(A)$ содержит не более $n - k$ точек. В самом деле, для $i = 1, \dots, k$ положим

$$A_i = \{f \in C(X): f|E_i \in A|E_i\},$$

где E_i обозначает неодноточечное максимальное множество антисим-

метрии алгебры A . Согласно теореме Шилова—Бишопа $A = \prod_{i=1}^k A_i$, поэтому если $m_i = t(A_i)$ на X , то $n = \sum_{i=1}^k m_i$. В силу следствия из теоремы 1 множество $X \setminus S(A)$ содержит не более $\sum_{i=1}^k (m_i - 1) = n - k$ точек.

По теореме 3 максимальная подалгебра A равномерной алгебры B обладает только одним неодноточечным максимальным множеством антисимметрии E_i , для которого $A|_{E_i} \neq B|_{E_i}$. Компакт E_i может служить максимальным множеством антисимметрии и для алгебры B , и в этом случае эти алгебры будут одинаковым образом разбивать X на максимальные множества антисимметрии. Если же это не так, то в E_i будут выделяться максимальные множества антисимметрии (возможно, и неодноточечные) алгебры B , причем „число“ таких множеств совершенно произвольно.

Эта ситуация значительно упрощается при предположении, что подалгебра A имеет коразмерность 1 в B .

Теорема 4. Пусть $\dim B/A = 1$. Если алгебра A антисимметрична на X , то число максимальных множеств антисимметрии алгебры B не превосходит 2.

Доказательство. Предположим сперва, что алгебра A совпадает с ядром точечной производной на B в точке $\varphi \in M(B)$. В этом случае из антисимметричности A следует антисимметричность B . Действительно, пусть функция $h \in B$ принимает вещественные значения на X . Тогда, как легко видеть, вещественная функция $f = (h - \varphi(h))^2$ принадлежит к A , поэтому $f = 0$, т. е. $h = \varphi(h)$.

Пусть теперь $A = \ker(\varphi_1 - \varphi_2)$, где φ_1 и φ_2 — мультипликативные функционалы на B , и пусть h — непостоянная вещественная функция из B . Можно считать, что $\varphi_1(h) = 0$ и $\varphi_2(h) = 1$. Тогда $(2h - 1)^2 \in A$, и в силу антисимметрии алгебры A $(2h - 1)^2 = 1$, откуда $h^2 = h$. Таким образом, всякая вещественная функция из B может принимать не более двух значений, в частности функция h принимает значения 0 и 1. Положим

$$F_0 = \{x \in X: h(x) = 0\}, \quad F_1 = \{x \in X: h(x) = 1\}.$$

Легко заметить, что $B|_{F_0} = A|_{F_0}$, $B|_{F_1} = A|_{F_1}$ и что эти сужения замкнуты.

Чтобы доказать теорему, достаточно убедиться, что сужения $A|_{F_0}$ и $A|_{F_1}$ являются антисимметричными алгебрами. Допустим, что функция $f \in A$ вещественна на F_1 . Тогда, как было показано, функция fh может принимать два значения: 0 и какое-то μ . Поскольку $fh = g + \lambda h$, где $g \in A$, λ — комплексное число, функция $fg \in A$ на компакте X принимает два значения: 0 или $\mu(\mu - \lambda)$. Но алгебра A антисимметрична, поэтому $\mu(\mu - \lambda) = 0$, откуда следует, что функция f по-

стоянна на F_1 . Аналогично доказывается, что алгебра $A|F_0$ не содержит непостоянных вещественных функций.

Следствие 1. Если $\dim B/A = n$, то число максимальных множеств антисимметрии алгебры B , не являющихся максимальными множествами антисимметрии алгебры A , не превосходит $2n$.

Доказательство. Обозначим через $E_1, \dots, E_k$ совокупность всех тех неодноточечных максимальных множеств антисимметрии алгебры A , для которых $A_{E_i} = B_{E_i}$. Ясно, что $k \leq n$ (теорема 3), и

если $m_i = \dim B_{E_i}/A_{E_i}$, то $\sum_{i=1}^k m_i = n$. В силу теоремы 4 компакт E_i

может разбиться на не более чем $m_i + 1$ максимальных множеств антисимметрии алгебры B_{E_i} , или, что то же, алгебры B . Поэтому число максимальных множеств антисимметрии алгебры B , не являющихся максимальными множествами антисимметрии алгебры A , не больше

$$\sum_{i=1}^k (m_i + 1) \leq 2n.$$

В то же время согласно теореме 3 число максимальных множеств антисимметрии алгебры A , не являющихся максимальными множествами антисимметрии алгебры B , не превосходит n .

Следствие 2. Если компакт X связен и $\dim B/A < \infty$, то из антисимметричности алгебры A вытекает антисимметричность алгебры B .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 15.1.1975

Ռ. Ք. ԲԱՏԻԿՅԱՆ. Հավասարաչափ հանրահաշիվների մասին մի քանակական հարցերի (սամմարի)

Ապացուցվում են թեորեմներ B հավասարաչափ հանրահաշիվի A մասին մի քանակական հարցի ճիշտի հզորի և անտիսիմետրիկ բազմությունների ամբողջական վերաբերյալ, Առանձին դիտարկվում է մասնավոր դեպքը, երբ $\dim B/A = 1$.

B. T. BATIKIAN. *Maximal subalgebras of uniform algebras* (summary)

Theorems on Silov boundary and totality of sets of antisymmetry for maximal subalgebra A of uniform algebra B are proved.

The special case, when $\dim B/A = 1$ is considered separately.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Wermer. On algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 1953, 866—869.
2. W. Rudin. Subalgebras of space of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc., 7, 1956, 825—830.
3. K. Hoffman, I. M. Singer. Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$, Am. J. Math., 79, 1957, 235—255.

4. *K. Hoffman, I. M. Singer*. Maximal subalgebras of continuous functions. *Acta Math.*, 103, 1960, 217—241.
5. *I. Glicksberg*. Maximal algebras and a theorem of Rado, *Pacif. J. Math.*, 14, 1964, 919—941.
6. *Е. А. Горин, В. М. Золотаревский*. Максимальные инвариантные подалгебры в алгебрах с инволюцией, *Матем. сб.*, 85, № 3, 1971, 373—387.
7. *Б. Т. Батикян, С. А. Григорян*. Функциональные алгебры конечного типа, *УМН*, № 6, 1974, 155—156.
8. *G. M. Leibowitz*. Lectures on complex function algebras, Scott--Foresman, Chicago, 1970.
9. *Е. А. Горин*. Подалгебры конечной коразмерности, *Матем. заметки*, 6, № 3, 1969, 321—328.
10. *Т. Гамелин*. Равномерные алгебры, Изд. „Мир“, М., 1973.