Н. П. ТЕР-ЗАХАРЯН

О НЕКОТОРЫХ НЕОПТИМАЛЬНЫХ ЯЗЫКАХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

В статье [3] доказано, что язык многоместных рекурсивных функций (ЯМРФ) не является асимптотически оптимальным. Возникает вопрос о том, нельзя ли выделить из ЯМРФ асимптотически оптимальный подязык или, иначе говоря, „сжать“ ЯМРФ, удалив из него некоторые сообщения (для которых имеются в языке более короткие эквиваленты) так, чтобы полученный язык был асимптотически оптимален.

Один из естественных способов „сжатия“ языка заключается в удалении из него конечного числа фиксированных сообщений (о которых заведомо известно, что они имеют в языке более короткие эквиваленты), а также всех иных сообщений, конструируемых с их помощью. В настоящей статье исследуются подязыки ЯМРФ, получаемые вышеописанным способом, и доказывается, что ни один из них не является асимптотически оптимальным. Таким образом, для получения асимптотически оптимальных подязыков ЯМРФ (если они вообще существуют) нужны более сильные средства „сжатия“ языка по сравнению с указанными выше.

Мы будем пользоваться понятиями, введенными в работах [1], [2], [3], а также придерживаться их символики и сокращений.

1°. Определение 1. Пусть Я — некоторый алгорифмический язык, R — его радиус сходимости, в.а. A перерабатывает всякое н.ч. n в количество сообщений языка Я длины n . КФКП F , удовлетворяющую условию

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) z^n \text{ при } |z| < R,$$

будем называть производящей функцией языка Я, а н.а. A — структурной функцией языка Я.

В заметке [2] определен ЯМРФ, как четверка элементов

$$\{0, |\}, A, \Delta, \mathcal{W},$$

где $\{0, |\}$ — двубуквенный алфавит, A — алфавит сообщений ЯМРФ, Δ — множество всех сообщений ЯМРФ, $\mathcal{W}$ — н.а., описывающий работу алгорифмов (сообщений) в этом языке.

Пусть $P_1, P_2, \dots, P_r$ — фиксированные сообщения ЯМРФ и $\Delta_{P_1, \dots, P_r}$ — множество всех таких сообщений X ЯМРФ, что $P_1, \dots, P_r$ не входят в X . Язык

$$\{0, \}, A, \Delta_{P_1, \dots, P_r}, \mathbb{W}$$

мы будем обозначать через $Я_{P_1, \dots, P_r}$.

В статье будут рассматриваться только такие списки $P_1, \dots, P_r$ сообщений ЯМРФ, для которых $Я_{P_1, \dots, P_r}$ является подязыком ЯМРФ.

В [3] показывается, что структурная функция A ЯМРФ при $m \geq 5$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$A(m) = (m-4)2^{m-4} + A(m-5) + \sum_{i+j=m-6} A(i)A(j) + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1, \dots, i, j=m-j-5} A(i)A(i_1) \dots A(i_j). \quad (1)$$

Нетрудно убедиться в том, что существует такое н.ч. m_0 , что структурная функция $Я_{P_1, \dots, P_r}$ при $m > m_0$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и A .

Определение 2. Пусть s — фиксированное н.ч. Сообщение языка $Я_{P_1, \dots, P_r}$ назовем s -правильным, если в него не входит слово O^s , имеющее следующий вид

$$[00, [0, [0, 2^s - 1, 0]].$$

(Напомним, что $[0, [0, 2^s - 1, 0]]$ — код нигде не определенной функции от $(2^s - 2)$ аргументов).

Обозначим через $\Delta_{P_1, \dots, P_r; s}$ множество всех s -правильных сообщений $Я_{P_1, \dots, P_r}$. Язык

$$\{0, \}, A, \Delta_{P_1, \dots, P_r; s}, \mathbb{W},$$

второй и четвертый элементы которого были определены выше, будем обозначать впредь через $Я_{P_1, \dots, P_r; s}$.

Теорема 1. При $s > \max_{1 \leq i \leq r} l(P_i)$ $Я_{P_1, \dots, P_r; s}$ является подязыком $Я_{P_1, \dots, P_r}$.

Доказательство. Фиксируем н.ч. s , удовлетворяющее условию теоремы. Ясно, что ни одно из P_i ($i = 1, \dots, r$) не входит в O^s . Для доказательства теоремы достаточно указать для всякого сообщения X языка $Я_{P_1, \dots, P_r}$ эквивалентное ему s -правильное сообщение с длиной, не большей $l(X)$. Пусть сообщение X языка $Я_{P_1, \dots, P_r}$ содержит в себе слово

$$O^s Q_1, \dots, Q_q, \quad (2)$$

где q — некоторое н.ч., а $Q_1, \dots, Q_q$ — сообщения $Я_{P_1, \dots, P_r}$. Из структуры слова (2) следует, что

$$l(X) \geq 16 + s + q.$$

Пусть $q \neq 1$ или Q_1 имеет размерность, отличную от $2^s - 1$. Тогда сообщению X поставим в соответствие эквивалентное ему s -правиль-

ное сообщение $[[, 0, 2^s - 1]$, длина которого равна $(6 + s)$. Если же $q = 1$ и размерность Q_1 равна $2^s - 1$, то сообщению X поставим в соответствие эквивалентное сообщение меньшей длины, получаемое из X подстановкой Q_1 вместо первого вхождения (2). Очевидно, что, производя конечное число подстановок вышеуказанного типа, мы придем к s -правильному сообщению, эквивалентному данному и имеющему не большую длину. Теорема доказана.

2°. Аналитические свойства подязыков $Я_{P_1, \dots, P_r}$. Рассмотрим следующий конструктивный степенной ряд комплексной переменной z

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{P_1, \dots, P_r}(n) z^n, \quad (3)$$

где н.а. $A_{P_1, \dots, P_r}$ — структурная функция языка $Я_{P_1, \dots, P_r}$.

Нетрудно убедиться в том, что ряд (3) сходится при $|z| < \frac{1}{5}$ (напомним, что алфавит A состоит из пяти букв). Покажем, что ряд (3) расходится в точке $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}$. Пусть $s_0 = \max(4, l(P_1), \dots, \dots, l(P_r))$. Построим подмножество Δ^1 сообщений $Я_{P_1, \dots, P_r}$ с помощью следующих порождающих правил:

- 1) для всяких n и m , таких что $l(n) + l(m) > s_0 - 5$, $[[, n, m] \in \Delta^1$;
- 2) если $Q \in \Delta^1$ и $R \in \Delta^1$, то $[0], Q, R] \in \Delta^1$. Очевидно, что $\Delta^1 \subset \Delta_{P_1, \dots, P_r}$. Обозначим через C структурную функцию языка

$$[0, [[, A, \Delta^1, \mathcal{W}.$$

Исходя из порождающих правил множества Δ^1 нетрудно показать, что

$$C(n) = 0 \text{ при } 0 \leq n \leq s_0. \quad (4)$$

$$C(n) = (n-4) \cdot 2^{n-5} + \sum_{l+j=n-6} C(l) C(j) \text{ при } n > s_0.$$

Очевидно, что

$$\forall n (A_{P_1, \dots, P_r}(n) \geq C(n)). \quad (5)$$

Введем в рассмотрение следующий конструктивный степенной ряд комплексной переменной z :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C(n) z^n. \quad (6)$$

Предположим, что ряд (3) сходится в точке $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}\right)$. Тогда,

в силу условия (5), ряд (6) также должен сходиться в этой точке. Обозначим через Φ КФКП, такую что при $|z| < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}$

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n) z^n.$$

Исходя из равенств (4), нетрудно показать, что КФКП Φ при $|z| < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}$ удовлетворяет условию

$$\Phi(z) = \frac{2^{s_0-4} z^{s_0+1} (s_0 - 3 - 2zs_0 + 8z)}{(1-2z)^2} + z^6 \Phi^2(z).$$

При $z \neq 0$ это равенство можно переписать в следующем виде:

$$(1-2z)^2 (2z^6 \Phi(z) - 1)^2 = (1-2z)^2 - 2^{s_0-2} z^{s_0+7} (s_0 - 3 - 2zs_0 + 8z). \quad (7)$$

В предположении сходимости ряда (3) в точке $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}$ равенство (7) должно было бы иметь место для всякого z , такого что $0 < |z| < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}$. Докажем, что при $z_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}$ равенство (7) нарушается. В самом деле, используя неравенство $s_0 \geq 4$, легко убедиться в том, что при $z_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}$ правая часть (7) принимает отрицательное значение, т. е. что

$$2^{s_0-2} z_0^{s_0+7} (s_0 - 4) > 1 - 2z_0,$$

а это противоречит (7), поскольку левая часть этого равенства положительная. Следовательно, ряд (3) расходится в точке $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}$.

Согласно лемме 4 из [3] квазиэсуществим радиус сходимости $R_{P_1, \dots, P_r}$ языка $Y_{P_1, \dots, P_r}$. Как было доказано выше $R_{P_1, \dots, P_r} < \frac{1}{2}$.

3°. Неоптимальность языка $Y_{P_1, \dots, P_r}$. Пусть н.ч. m_0 таково, что при $m > m_0$ функция $A_{P_1, \dots, P_r}$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и структурная функция A языка ЯМРФ. (Существование такого m_0 утверждалось в пункте 1°). Поэтому тем более, при $m > \bar{m}_0$, где $\bar{m}_0 = \max(m_0, 16, l(P_1), \dots, l(P_r))$, $A_{P_1, \dots, P_r}$ будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\begin{aligned} A_{P_1, \dots, P_r}(m) &= (m-4) 2^{m-4} + A_{P_1, \dots, P_r}(m-5) + \\ &+ \sum_{i+j=m-6} A_{P_1, \dots, P_r}(i) A_{P_1, \dots, P_r}(j) + \sum_{j=1}^m \sum_{i+l_1+\dots+l_j=m-j-5} \times \\ &\times A_{P_1, \dots, P_r}(i) A_{P_1, \dots, P_r}(i_1) \cdots A_{P_1, \dots, P_r}(i_j). \end{aligned} \quad (7)$$

Используя этот факт, после несложных выкладок получаем, что производящая функция $F_{P_1, \dots, P_r}(z)$ языка $\mathcal{Y}_{P_1, \dots, P_r}$ в круге $|z| < R_{P_1, \dots, P_r}$ удовлетворяет уравнению

$$z^7 F_{P_1, \dots, P_r}^3(z) - (z^6 + z) F_{P_1, \dots, P_r}^2(z) + \left(\frac{z P^{(\bar{m}_0)}(z)}{(1-2z)^6} - z^5 + 1 \right) \times \\ \times F_{P_1, \dots, P_r}(z) - \frac{P^{(\bar{m}_0)}(z)}{(1-2z)^2} = 0, \quad (8)$$

где $P^{(\bar{m}_0)}(z)$ — некоторый полином, зависящий от $\bar{m}_0$.

Обозначим через $G_{P_1, \dots, P_r}$ КФКП, определенную в открытом кольце $0 < |z| < R_{P_1, \dots, P_r}$ следующим образом:

$$G_{P_1, \dots, P_r}(z) = F_{P_1, \dots, P_r}(z) - \frac{1+z^5}{3z^6}.$$

В результате вычислений получаем, что при $0 < |z| < R_{P_1, \dots, P_r}$ КФКП $G_{P_1, \dots, P_r}$ удовлетворяет приведенной форме уравнения (8), а именно

$$G_{P_1, \dots, P_r}^3(z) + S(z) G_{P_1, \dots, P_r}(z) + T(z) = 0, \quad (9)$$

где S и T — КФКП, такие что при всяком z , принадлежащем кольцу $0 < |z| < \frac{1}{2}$

$$S(z) = \frac{P^{(\bar{m}_0)}(z)}{z^6(1-2z)^2} + \frac{1-z^5}{z^7} - \frac{(1+z^5)^2}{3z^{12}};$$

$$T(z) = \frac{(1-2z^5) P^{(\bar{m}_0)}(z)}{z^6(1-2z)^2} - \frac{2(1+z^5)^3}{27z^{18}} + \frac{1-z^{10}}{3z^{13}}. \quad (10)$$

Теорема 2. Пусть $P_1, \dots, P_r$ — такие фиксированные сообщения ЯМРФ, что $\mathcal{Y}_{P_1, \dots, P_r}$ — подязык ЯМРФ. Тогда неверно, что $\mathcal{Y}_{P_1, \dots, P_r}$ — асимптотически оптимальный язык.

Доказательство. Рассмотрим семейство языков $\{\mathcal{Y}_{P_1, \dots, P_r; s}\}$ при $s > \bar{m}_0 + 16$, где $\bar{m}_0$ — н.ч., определенное выше. Согласно теореме 1 все эти языки являются подязыками $\mathcal{Y}_{P_1, \dots, P_r}$. Учитывая (7'), нетрудно убедиться в том, что структурная функция $A_{P_1, \dots, P_r; s}$ языка $\mathcal{Y}_{P_1, \dots, P_r; s}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$A_{P_1, \dots, P_r; s}(m) = A_{P_1, \dots, P_r}(m) \text{ при } m \leq 16 + s, \quad (11)$$

а при $m > 16 + s$

$$A_{P_1, \dots, P_r; s}(m) = (m-4) 2^{m-4} + A_{P_1, \dots, P_r; s}(m-5) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i+j=m-6} A_{P_1, \dots, P_r; s}(i) A_{P_1, \dots, P_r; s}(j) + \\
 & + \sum_{j=1}^m \sum_{i+i_1+\dots+i_j=m-(j+5)} A_{P_1, \dots, P_r; s}(i) A_{P_1, \dots, P_r; s}(i_1) \dots A_{P_1, \dots, P_r; s}(i_j) - \\
 & - \sum_{j=1}^m \sum_{i_1+\dots+i_j=m-(16+s+j)} A_{P_1, \dots, P_r; s}(i_1) \dots A_{P_1, \dots, P_r; s}(i_j).
 \end{aligned}$$

Аналогично тому, как было доказано в [3], можно показать, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{P_1, \dots, P_r; s}(m) z^m$$

сходится в некотором круге $|z| < R$, причем $\frac{1}{5} \leq R < \frac{1}{2}$. Используя равенства (11) и лемму 4 из [3], легко установить квазисущество радиуса сходимости $R_{P_1, \dots, P_r; s}$ языка $\mathcal{Y}_{P_1, \dots, P_r; s}$ и существование производящей функции $F_{P_1, \dots, P_r; s}$ этого языка. Из (11) следует, что при $|z| < R_{P_1, \dots, P_r; s}$ КФКП $F_{P_1, \dots, P_r; s}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
 & z^7 F_{P_1, \dots, P_r; s}^3(z) - (z^6 + z) F_{P_1, \dots, P_r; s}^2(z) + \\
 & + \left(\frac{z P^{(\bar{m}_s)}(z)}{1-2z} - z^5 + 1 + z^{17+r} \right) F_{P_1, \dots, P_r; s}(z) + \frac{P^{(\bar{m}_s)}(z)}{(1-2z)^2} = 0, \quad (12)
 \end{aligned}$$

где $P^{(\bar{m}_s)}(z)$ — полином, определенный в уравнении (8).

Обозначим через $G_{P_1, \dots, P_r; s}$ КФКП, определенную в кольце $0 < |z| < R_{P_1, \dots, P_r; s}$ и такую, что

$$G_{P_1, \dots, P_r; s}(z) = F_{P_1, \dots, P_r; s}(z) - \frac{1+z^5}{3z^6}.$$

Очевидно, что при $0 < |z| < R_{P_1, \dots, P_r; s}$ КФКП $G_{P_1, \dots, P_r; s}$ удовлетворяет приведенной форме уравнения (12), а именно

$$G_{P_1, \dots, P_r; s}^3(z) + S_{P_1, \dots, P_r; s}(z) G_{P_1, \dots, P_r; s}(z) + T_{P_1, \dots, P_r; s}(z) = 0,$$

где $S_{P_1, \dots, P_r; s}$ и $T_{P_1, \dots, P_r; s}$ — такие КФКП, что при $0 < |z| < \frac{1}{2}$ имеют место следующие равенства:

$$S_{P_1, \dots, P_r; s}(z) = S_{P_1, \dots, P_r}(z) + z^{10+s}, \quad (13)$$

$$T_{P_1, \dots, P_r; s}(z) = T_{P_1, \dots, P_r}(z) + \frac{z^{4+s}(1+z^5)}{3}.$$

Аналогично теореме 4 из [3] доказываем, что невозможно, чтобы при любом и.ч. s , таком что

$$\bar{m}_0 - 16 \leq s \leq (\bar{m}_0 - 16) + 2,$$

$R_{p_1}, \dots, p_r, s$ совпадал бы $R_{p_1}, \dots, p_r$. Следовательно, квазиосуществим язык $\mathcal{Y}_{p_1, \dots, p_r, s_0}$, радиус сходимости которого больше $R_{p_1, \dots, p_r}$.

Итак, FR -числа $\frac{1}{R_{p_1, \dots, p_r}}$ и $\frac{1}{R_{p_1, \dots, p_r, s}}$ удовлетворяют всем трем условиям теоремы 3 из [2]. Следовательно, неверно, что $\mathcal{Y}_{p_1, \dots, p_r}$ асимптотически оптимален. Теорема доказана.

Вычислительный центр
АН Армянской ССР и ЕГУ

Поступила 15.1.1975

Ե. Պ. ՏԵՐ-ԶԱԽԱՐՅԱՆ. Ֆունկցիաների որոշ ոչ օպտիմալ լեզուների մասին
(ամփոփում)

Հետազոտվում են բազմատեղանի անկուրսիվ ֆունկցիաների լեզվի այնպիսի ենթալեզուները, որոնք ստացվում են նրանից վերջավոր թվով հաղորդումների և նրանց օգնությամբ կառուցվող բոլոր այլ հաղորդումների հեռացման միջոցով: Ապացուցվում է, որ այս ենթալեզուներից ոչ մեկը ասիմպտոտիկ օպտիմալ չէ:

N. P. TER-ZAHARIAN. *On some non-optimal languages of recursive functions (summary)*

The sublanguages of the language of multi-place recursive functions which can be obtained from the original language the elimination of the finite number of fixed messages, as well as of all the messages, employing these are investigated. It is proved, that such sublanguages can be asymptotically optimal.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. П. Тер-Захарян. Об энтропийных свойствах алгоритмических языков. Исследования по теории алгоритмов и математической логике, М., 1973, 178—204.
2. Н. П. Тер-Захарян. О языке многоместных рекурсивных функций, ДАН СССР, 210, № 3, 1973, 541—542.
3. Н. П. Тер-Захарян. Количественные характеристики языка многоместных рекурсивных функций, Труды ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ, VIII, 1975, 9—35.