ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

Е. А. ГОРИН, М. И. КАРАХАНЯН

О НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АЛГЕБРЫ ВСЕХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ЛОКАЛЬНО СВЯЗНОМ КОМПАКТЕ

1°. В этой работе мы будем рассматривать полупростые коммутативные банаховы алгебры с единицей (или без единицы) над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Как известно, каждая такая алгебра A может быть реализована в виде алгебры (не обязательно всех) непрерывных функций на пространстве M_A ее максимальных регулярных идеалов. Практически однако алгебра A зачастую предъявляется в виде некоторой подалгебры алгебры $C(X)$ всех непрерывных функций на компакте X. При этом X естественно отображается в M_A, но не обязательно совпадает со всем этим пространством. В дальнейшем мы будем иметь дело именно с такой ситуацией, и факт или требование совпадения X с M_A будет специально оговариваться.

Данная работа тесно связана с заметками Е. М. Чирки [1], [2]. Побудительным мотивом нам послужило желание получить возможно более прозрачное доказательство содержащихся там результатов. Напомним, что один из основных результатов Чирки таков. Пусть Γ — простая жорданова дуга в $\mathbf{C}^2$, обладающая тем свойством, что ее проекция на одну из координатных плоскостей не содержит внутренних точек. Тогда каждая непрерывная функция на Γ допускает равномерную аппроксимацию функциями, голоморфными в окрестности Γ. Попутно в [1] и [2] отмечается следующая теорема. Пусть A — некоторая sup-алгебра на произвольном локально связном компакте X. Если в алгебре A разрешимы все квадратные уравнения, то $A = C(X)$. Фактически первое из этих утверждений сравнительно просто вытекает из второго.

Быть может, нелишне сопоставить сформулированную выше теорему с другими похожими результатами. Хорошо известно, что суперпозиции с голоморфными функциями не выводят за пределы коммутативной банаховой алгебры и что класс голоморфных функций в этом смысле, вообще говоря, не расширяем. Более того, в ряде случаев удается сделать заключение о совпадении A с $C(X)$ в предположении, что в пределах алгебры A допустимы суперпозиции с некоторой функцией, искажающей модуль непрерывности. Один из первых результатов такого сорта принадлежит И. Кацнельсону [3] и состоит в следующем. Предположим, что $\omega\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ — такая непрерывная функция, для которой $\omega(0) = 0$ и $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\omega(t)}{t} = \infty$. Пусть

A — полупростая симметричная регулярная банахова алгебра с единицей, реализованная в виде алгебры функций на M_A. Оказывается, $A = C(M_A)$, если $\omega(f) \in A$ для любой функции $f \in A$ с множеством значений на отрезке [0,1]. Имеется вариант этой теоремы и для несимметричных алгебр (см. [4] и [5]). Любопытно отметить, что условие $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\omega(t)}{t} = \infty$ здесь нельзя ослабить до $\overline{\lim\limits_{t \to 0}} \dfrac{\omega(t)}{t} = \infty$.

Дж. Вермер [6] показал, что $A = C(X)$, если A — разделяющая точки и содержащая константы замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$ и функции вида $\mathrm{Re}\, f$, $f \in A$, образуют кольцо. В серии работ А. Бернара (см., в частности, [7]) среди прочего обнаружено, что эта теорема Вермера распространяется на более широкие классы алгебр.

Теорема Чирки в одном пункте существенно отличается от перечисленных результатов. Действительно, ее основное условие заключается не в предположении, что некоторая однозначная функция действует в алгебре (как в теореме Кацнельсона), а в требовании разрешимости уравнений $g^2 = f$, $f \in A$. Такое уравнение даже в простейшем случае $A = C([0,1])$ может допускать континуум различных решений (скажем, при правой части $f(t) = t \sin \dfrac{1}{t}$), и обстоятельства такого сорта делают довольно запутанным прямое доказательство, использующее выбор „подходящих ветвей“.

Другое важное отличие — предположение о локальной связности компакта X. Это предположение существенно с разных точек зрения. С одной стороны, имеется пример Б. Коула (см. [8], добавление) нетривиальной sup-алгебры, в которой разрешимы все двучленные уравнения. С другой стороны, согласно теореме Р. Каунтримана [9], если X — связный метризуемый компакт и алгебра $C(X)$ алгебраически замкнута, то компакт X локально связен и наследственно уникогерентен. Последнее условие означает, что для любых связных замкнутых подмножеств X_1, $X_2 \subset X$ их пересечение связно. Легко показать, что в предположении локальной связности это условие равносильно тривиальности групп $H^1(Y, \mathbf{Z})$ одномерных целочисленных когомологий для всех замкнутых подмножеств $Y \subset X$. Кроме того, алгебраическая замкнутость алгебры $C(X)$ для метризуемых связных компактов X вытекает из локальной связности и наследственной уникогерентности, а также эквивалентна разрешимости всех квадратных уравнений. Между прочим, последнее контрастирует с положением дел в проблеме глобальной разрешимости алгебраических уравнений с простыми корнями в каждой точке [10].

Дальнейший план статьи таков. В п. 2 фиксируются обозначения и для удобства напоминаются некоторые стандартные факты. Основной результат, обобщающий теорему Чирки, содержится в п. 3. Наш подход основан на привлечении обычных в этих вопросах дополнительных средств: теоремы Рисса и рассмотрении минимальных носителей мер, отвечающих крайним точкам шара, ортогонального к алгебре. Хотя мы сохраняем некоторые элементы рассуждений Чирки, в частности, „радикалы“ типа $(1+f^n)^{1/n}$ и многократное использование диагонального процесса, привлечение таких средств, делает доказательства в целом, на наш взгляд, более прозрачными.

Считая компакт X локально связным, мы предполагаем, что для каждого элемента f некоторой замкнутой подалгебры A алгебры $C(X)$ существует такое целое $k=k(f)\geqslant 2$ и такой элемент $g\in A$, для которых $g^{k(f)}=f$. В этом предположении элементы алгебры A постоянны на носителях указанных выше мер. В сочетании с теоремой Хана—Банаха и теоремой Крейна—Мильмана о крайних точках последнее просто означает, что алгебра A симметрична.

Наиболее важные следствия этого обстоятельства содержатся в п. 4. Разумеется, проверка разрешимости уравнений $g^k=f$ для любых $f\in A$ весьма затруднительна. Однако при некоторых дополнительных предположениях ее удается избежать. Пусть X — локально связный компакт и A—замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, содержащая константы. Предположим, что $H^1(M_A, \mathbf{Z})=0$. Если теперь $\operatorname{int}\hat{f}(M_A)=\varnothing$, где $\hat{f}$ — преобразование Гельфанда элемента $f\in A$, то, как оказывается, $\bar{f}\in A$.

Последний результат довольно хорошо приспособлен для доказательства некоторых теорем о голоморфной аппроксимации, и мы приводим в качестве следствий доказательства теоремы Чирки об аппроксимации в $\mathbf{C}^2$ и варианта теоремы типа Г. Штольценберга [11]. Отметим один промежуточный ход: если компакт $K\subset\mathbf{C}^n$ таков, что $H^1(K, \mathbf{Z})=0$, то для алгебры $A(K)$ пределов голоморфных функций имеем $H^1(M_{A(K)}, \mathbf{Z})=0$ и $f(K)=\hat{f}(M_{A(K)})$.

Сопоставление теоремы Чирки с результатами Бернара наводит на мысль, что в условиях теоремы Чирки можно освободиться от жесткого предположения относительно нормы. Этот вопрос до конца не выяснен, но в п. 5 мы приводим один предварительный результат.

Для простоты мы считаем рассматриваемые компакты метризуемыми, хотя в большинстве случаев это не существенно.

2°. Пусть X—компакт и $C(X)$—пространство всех непрерывных комплексных функций на X. Рассмотрим непрерывный линейный функционал ψ на пространстве $C(X)$. Замкнутое подмножество $Y\subset X$ называется носителем функционала ψ, если $\psi|I(Y)=0$, где $I(Y)=\{f\in C(X): f|Y=0\}$. Пересечение любых двух носителей есть снова носитель. Поэтому для каждого функционала ψ существует наименьший замкнутый носитель, который обозначается через $\operatorname{supp}(\psi)$. Если $\operatorname{supp}(\psi)=\varnothing$, то $\psi=0$; если $\operatorname{supp}(\psi)$ сводится к единственной точке x_0, то $\psi(f)=cf(x_0)$, где c — константа. По теореме Рисса функционал ψ допускает интегральное представление при помощи конечной комплексной бэровской меры ν, сосредоточенной на $\operatorname{supp}(\psi)$. В сочетании с теоремой Жордана о разложении это гарантирует существование такой вероятностной меры μ, сосредоточенной на $\operatorname{supp}(\psi)$, и такой функции $Q \in L^\infty(\mu)$, что $d\nu = Q d\mu$ и

$$\psi(f) = \int\limits_X Q f d\mu. \tag{1}$$

При этом

$$\|\psi\| = \int\limits_X |Q| \, d\mu \tag{2}$$

и, кроме того, $\int\limits_U |Q| \, d\mu > 0$, если U — такое (открытое) множество, для которого $\mu(U) > 0$. Формула (2) имеет место для любого функционала ψ, представленного в виде (1) с вероятностной мерой μ и произвольным ядром $Q \in L^1(\mu)$. В частности, если Q_1 и Q_2 — такие ядра из $L^1(\mu)$, что μ-почти всюду $Q_1 Q_2 = 0$, то для соответствующих функционалов ψ_1, ψ_2 имеем $\|\psi_1 + \psi_2\| = \|\psi_1\| + \|\psi_2\|$.

Каждое топологическое пространство разбивается на компоненты—максимальные связные подмножества. Компоненты топологического пространства замкнуты. Пространство называется локально связным, когда для каждой точки и любой ее окрестности компонента окрестности, содержащая данную точку, является окрестностью этой точки. Заметим, что в соответствии с терминологией Дж. Келли [12] окрестностью точки называется произвольное (не обязательно открытое) множество, открытое ядро которого содержит данную точку. Компоненты открытых множеств локально связного пространства открыты. В локально связном компакте семейство открытых связных подмножеств, а также семейство компактных связных подмножеств образует базу топологии.

Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Совокупность обратимых относительно умножения элементов алгебры A образует группу, которая обозначается через $G(A)$. Группа $G(A)$ наделяется топологией, индуцированной вложением в A, и превращается тем самым в топологическую группу. Компонентой единицы в $G(A)$ служит подгруппа $\exp(A)$, состоящая из экспонент элементов алгебры A. Согласно теореме Аренса—Ройдена (см., например, [13], стр. 123) факторгруппа $G(A)$ по $\exp(A)$ полностью определяется пространством M_A максимальных идеалов алгебры A. Именно, указанная факторгруппа изоморфна группе $H^1(M_A, \mathbf{Z})$ одномерных целочисленных (чеховских) когомологий компакта M_A. В частном случае $A = C(X)$ это классический результат Брушлинского—Эйленберга. Напомним еще, что для достаточно „хороших“ компактов X группа $H^1(X, \mathbf{Z})$ изоморфна группе $\operatorname{Hom}(\pi_1(X), \mathbf{Z})$, где $\pi_1(X)$ — фундаментальная группа. Легко показать (см. приводимые ниже леммы), что в случае локально связных компактов группа $H^1(X, \mathbf{Z})$ тривиальна, если каждый обратимый элемент f алгебры $C(X)$ представим в виде $g^{k(f)}$, где $g \in C(X)$ и $k(f) \geqslant 2$.

3°. Теорема 1. *Пусть X—локально связный компакт и A—такая замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, что для каждого элемента $f \in A$ существует такое целое $k=k(f) \geqslant 2$ и такой элемент $g \in A$, что $g^{k(f)}=f$. Тогда алгебра A симметрична.*

Очевидно, что если в условиях теоремы алгебра A разделяет компакт X, то она содержит максимальный идеал алгебры $C(X)$, а если к тому же она обладает единицей, то $A=C(X)$. Теорема Чирки о корнях получается отсюда в частном случае $k(f)=2$.

Утверждение теоремы 1 можно сформулировать в следующей эквивалентной форме. Пусть ψ — крайняя точка множества функционалов на $C(X)$ с нормой $\leqslant 1$, аннулирующих алгебру A. Тогда на $\operatorname{supp}(\psi)$ все функции из алгебры A сохраняют постоянное значение. Действительно, с одной стороны, если ψ—крайняя точка, то $\operatorname{supp}(\psi)$ является множеством антисимметрии относительно A (см., например, [13], стр. 87). Поэтому, если алгебра A симметрична, то все функции из A постоянны на $\operatorname{supp}(\psi)$. С другой стороны, если выполняется сформулированное выше условие, то каждый из указанных там функционалов ψ будет аннулировать любую функцию, равную нулю на общих нулях и постоянную на общих линиях уровней элементов алгебры A. Поэтому из теоремы Хана—Банаха и теоремы Крейна—Мильмана вытекает, что алгебра A содержит все такие функции и, следовательно, симметрична. Мы будем доказывать теорему 1 именно в последней формулировке.

Доказательству теоремы мы предпошлем три простые леммы, которые можно было бы и объединить за счет некоторого усложнения формулировки.

Лемма 1. *Пусть X—связное локально связное и локально компактное сепарабельное метрическое пространство. Предположим, что последовательность $\{f_n\}$ непрерывных функций равномерно на компактных подмножествах сходится к функции f, отличной от 0 всюду на X. Пусть $\{g_n\}$—такая последовательность непрерывных функций на X, что $g_n^{k_n}=f_n$, где $\{k_n\}$—возрастающая к бесконечности последовательность натуральных чисел. Тогда из последовательности $\{g_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, которая равномерно сходится на компактных подмножествах к константе с единичным модулем.*

Доказательство. Имея в виду диагональный процесс, достаточно установить существование подпоследовательности с указанными свойствами для некоторой окрестности данной точки $x_0 \in X$. Но так как $f(x_0) \neq 0$, то найдется такое n_0 и такая связная компактная окрестность V точки x_0, что $|f_n(x)-f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_0)|$ при всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in V$. Из представления

$$f_n(x) = f(x)\left|1 - \frac{f(x) - f_n(x)}{f(x)}\right|$$

ясно существование таких функций $h_n \in C(V)$, что $f_n = \exp h_n$ всюду на V. При этом функции h_n можно считать ограниченными в совокупности. Из связности окрестности V вытекает, что при всех $x \in V$ имеем $g_n(x) = c_n \exp \dfrac{h_n(x)}{k_n}$, где c_n — константа с модулем 1. Теперь достаточно выбрать сходящуюся подпоследовательность из последовательности $\{c_n\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть X — локально связный компакт и последовательность функций $f_n \in C(X)$ равномерно сходится к некоторой функции f. Пусть $g_n \in C(X)$ и $g_n^{k_n} = f_n$, где $\{k_n\}$ — последовательность натуральных чисел. Тогда из последовательности $\{g_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактах, расположенных внутри множества $\{x: f(x) \neq 0\}$. Если $k_n \to \infty$, то предел этой подпоследовательности на компонентах множества $\{x: f(x) \neq 0\}$ сохраняет постоянное значение с модулем 1. Если $k_n \equiv k$, то подпоследовательность можно выбрать равномерно сходящейся всюду на X и ее предел g таков, что $g^k = f$.*

Доказательство. Два первых утверждения непосредственно вытекают из леммы 1: достаточно рассмотреть компоненты множества $\{x: f(x) \neq 0\}$ и затем использовать диагональный процесс. Для доказательства последнего утверждения теперь достаточно заметить, что множества $\{x: |f(x)| \geqslant \varepsilon > 0\}$ компактны и что $|g_n(x)| \leqslant \varepsilon^{1/k}$, если $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

Лемма 3. *Пусть X — локально связный компакт и A — такая замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, что для любого $f \in A$ существует такое натуральное $k = k(f) \geqslant 2$ и такой элемент $g \in A$, что $g^{k(f)} = f$. Тогда для любого $f \in A$ и любого натурального p существует такой элемент $h \in A$, что $uh^p = f$, где u — функция на X, модуль которой всюду равен 1 и которая постоянна на компонентах связности множества $\{x: f(x) \neq 0\}$.*

Доказательство. Положим $N(f) = \{x: f(x) = 0\}$ и пусть $X \setminus N(f) = \bigcup_i X_i$ — разбиение на компоненты связности. Итерируя условие леммы, мы можем для данного элемента $f \in A$ указать такую последовательность элементов $g_n \in A$ и такую последовательность натуральных чисел $k_n \to \infty$, что $g_n^{k_n} = f$. Согласно лемме 2 мы можем считать, переходя если необходимо к подпоследовательности, что последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится на компактах, расположенных внутри подпространства $X \setminus N(f)$. При этом $\lim g_n(x) = c_i$, где c_i — константа, $|c_i| = 1$, когда $x \in X_i$. Положим теперь $k_n = pl_n + r_n$ с $0 \leqslant r_n < p$. Не ограничивая общности последовательность r_n можно считать стационарной, $r_n = r$. Положим

$h_n = g_n^{l_n}$. Тогда $g_n^r\, h_n^p = f$. Последовательность $\{h_n\}$, снова по лемме 2, можно считать равномерно сходящейся на компактных подмножествах в $X \setminus N(f)$. Кроме того

$$|h_n| = |f|^{\frac{l_n}{k_n}} = |f|^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{r}{k_n}\right)}.$$

Таким образом, последовательность $\{h_n\}$ оказывается равномерно сходящейся всюду на X, и ее предел h принадлежит алгебре A Положим функцию u равной 1 на $N(f)$ и равной $\lim g_n^r$ вне $N(f)$. Ясно, что $|u| = 1$ всюду и что $f = uh^p$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и я. (1) Фактически лемма имеет индивидуальный характер: для данного элемента $f \in A$ достаточно предположить существование таких последовательностей $g_n \in A$ и $k_n \to \infty$, что $g_n^{k_n} = f$. (2) В случае $A = C(X)$, исправляя h, можно добиться выполнения равенства $h^p = f$. Вместе с теоремой 1 аналогичный факт будет установлен и в общем случае.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Рассмотрим функционал ψ и представим его в соответствии со сказанным в п. 2 мерой $d\nu = Q\,d\mu$. Достаточно установить, что функционал ψ сосредоточен на пересечении множеств уровня функций вида $|f|$, $f \in A$, поскольку затем мы сможем воспользоваться тождеством $|f e^f| = |f|\, e^{\operatorname{Re} f}$ и тем обстоятельством, что $fe^f \in A$, если $f \in A$. Введем следующие обозначения:

$$N(f) = \{x\colon f(x) = 0\},$$
$$E(f) = \{x\colon |f(x)| = 1\},$$
$$E^+(f) = \{x\colon |f(x)| > 1\},$$
$$E^-(f) = \{x\colon |f(x)| < 1\}.$$

Предположим, что теорема неверна. Тогда найдется такая функция $f \in A$, для которой $\mu(E(f)) = 0$ и $\mu(E^\pm(f)) > 0$. Далее мы будем различать два случая в зависимости от того $\mu(N(f)) > 0$ или $\mu(N(f)) = 0$. Первый случай проще, но на нем уже видны некоторые основные моменты доказательства.

Итак, пусть сначала $\mu(N(f)) > 0$.

В соответствии с леммой 3 имеет место представление $f = u_n g_n^n$, где $g_n \in A$ и $n \to \infty$. Пусть $X \setminus N(f) = \bigcup_j X_j$ — разбиение на компоненты связности. В силу леммы 2 из последовательности $\{g_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактах, расположенных внутри множества $X \setminus N(f)$. Будем считать переход к подпоследовательности совершенным. Поскольку $g_n|N(f) = 0$ последовательность $\{g_n\}$ оказывается сходящейся всюду на X. Кроме того, нормы элементов g_n ограничены в совокупности и, если положить $v(x) = \lim g_n(x)$, то мы будем иметь $v|N(f) = 0$ и $|v(x)| = 1$ вне

$N(f)$. По теореме Лебега $\int\limits_X v^l h\,d\nu = 0$ для всех натуральных l и всех $h \in A$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\mu(X_1) > 0$ и $v|X_1 = 1$. Положим

$$w(x) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\,(v(x) + \cdots + v^r(x)).$$

Ясно, что предел существует для каждого $x \in X$. Кроме того, $w(x) = 1$ при $v(x) = 1$ и $w(x) = 0$ в остальных точках. Пусть

$$\psi_1(h) = \int\limits_X hw\,d\nu,\quad \psi_2(h) = \int\limits_X h(1-w)\,d\nu. \tag{3}$$

Очевидно, что $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Так как при всех натуральных l и всех $h \in A$ имеем $\int\limits_X hv^l\,d\nu = 0$, то

$$\psi_1(h) = \psi_2(h) = 0 \text{ для всех } h \in A. \tag{4}$$

Далее

$$\|\psi_1\| = \int\limits_X |wQ|\,d\mu > 0,\quad \|\psi_2\| = \int\limits_X |(1-w)\,Q|\,d\mu > 0 \tag{5}$$

и

$$\|\psi\| = \int\limits_X |Q|\,d\mu = \int\limits_X |wQ|\,d\mu + \int\limits_X |(1-w)\,Q|\,d\mu = \|\psi_1\| + \|\psi_2\|. \tag{6}$$

Но по условию, ψ — крайняя точка. Поэтому разложение $\psi = \psi_1 + \psi_2$ с условиями (4), (5), (6) невозможно.

Предположим теперь, что $\mu(N(f)) = 0$.

Пусть $X \setminus (N(f) \cup E(f)) = \bigcup\limits_j X_j$ — разбиение на компоненты связности. Рассмотрим последовательность функций $f^n + f^{2n}$. В соответствии с леммой 3 положим $u_n g_n^n = f^n + f^{2n}$. Здесь $g_n \in A$ и u_n постоянны на множествах X_j. На каждом компактном подмножестве множества $X_j \subseteq E^-(f)$ правая часть равенства

$$\left(\frac{g_n}{f}\right)^n = \bar{u}_n\,(1 + f^n) \tag{7}$$

равномерно стремится к ненулевой константе. Поэтому, используя лемму 1 и диагональный процесс, можно перейти к подпоследовательности последовательности $\frac{g_n}{f}$, которая равномерно сходится на компактных подмножествах каждого из множеств $X_j \subseteq E^-(f)$. Аналогично можно поступить с последовательностью $\frac{g_n}{f^2}$ на множествах $X_j \subseteq E^+(f)$. Не меняя для краткости обозначений, будем считать переход к подпоследовательностям совершенным. Тогда всюду на $\bigcup_j X_j$ существует $\lim g_n(x)$, причем сходимость равномерна на компактах. Ясно, что

$$\lim g_n(x) = \begin{cases} c_j f(x), \text{ если } x \in X_j \subseteq E^-(f), \\ c_j f(x)^2, \text{ если } x \in X_j \subseteq E^+(f), \end{cases} \tag{8}$$

где c_j — константы, $|c_j| = 1$. Отметим, что множество, на котором предел может не существовать, содержится в $E(f)$ и, следовательно, имеет нулевую μ-меру. Нам потребуется следующее легко проверяемое неравенство: если $|\zeta| < 1$, то

$$|(1+\zeta)^{1/n} - 1| \leqslant \frac{|\zeta|}{n(1-|\zeta|)^2} \tag{9}$$

(имеется в виду главное значение корня). Из (7), (8) и (9) вытекает, что при $x \in X_j \subseteq E^-(f)$

$$g_n(x) = c_{nj} f(x) + R_{nj}(x), \tag{10}$$

где c_{nj} — константа

$$|c_{nj}| = 1, \ c_{nj} \to c_j \ \text{ и } \ |R_{nj}(x)| \leqslant \frac{|f(x)|^n}{n(1-|f(x)|^n)^2}.$$

Аналогично, при $x \in X_j \subseteq E^+(f)$

$$g_n(x) = c_{nj} f(x) + R_{nj}(x) \tag{11}$$

с теми же условиями на

$$c_{nj} \ \text{ и } \ |R_{nj}(x)| \leqslant \frac{|f(x)|^{-n}}{n(1-|f(x)|^{-n})^2}.$$

Для определенности будем считать, что $X_1 \subseteq E^-(f)$ и $\mu(X_1) > 0$. По всякому счетному набору числовых последовательностей, стремящихся к бесконечности, можно указать последовательность, стремящуюся к бесконечности медленнее любой последовательности набора. Поэтому существует такая последовательность $m_n \to \infty$, что $\frac{m_n}{n} \to 0$ и

$$|c_{nj} - c_{n1}|^{1/m_n} \to 0 \text{ при всех } j, \text{ для которых } c_j = c_1. \tag{12}$$

В соответствии с леммой 3 выберем такие $h_n \in A$ и $\dot{u}_n$, что

$$\dot{u}_n h_n^{m_n} = g_n - c_{n1} f.$$

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $0 \leqslant \varepsilon < 1$, то $(a+b)^\varepsilon \leqslant a^\varepsilon + b^\varepsilon$. Поэтому, если $x \in X_j \subseteq E^-(f)$ и $c_j = c_1$, то, согласно (10) и (12)

$$|h_n(x)| \leqslant |c_{nj} - c_{n1}|^{1/m_n} + |R_{nj}(x)|^{1/m_n} \to 0.$$

Если же $x \in X_j \subseteq E^-(f)$ и $c_j \neq c_1$ или $x \in X_j \subseteq E^+(f)$, то ввиду (8) и (11)

$$\lim (g_n(x) - c_{n1} f(x)) \neq 0,$$

причем во всех трех ситуациях сходимость является равномерной на компактах, внутренних к X_j. Из леммы 1 теперь вытекает, что подходящая подпоследовательность последовательности $\{h_n\}$ будет равномерно сходиться на компактных подмножествах множества $X \setminus (N(f) \cup \cup E(f))$. Считая, что переход к подпоследовательности совершен, положим $v(x) = \lim h_n(x)$. Тогда $v \in L^\infty(\mu)$, $|v(x)| \leqslant 1$ почти всюду по мере μ и $v|X_j = 0$, если $X_j \subseteq E^-(f)$ и $c_j = c_1$. Вместе с тем, если, например, $X_j \subseteq E^+(f)$, то $v|X_j$ — константа, модуль которой равен 1. Будем для определенности считать, что $X_2 \subseteq E^+(f)$ и $\mu(X_2) > 0$. Пусть $v|X_2 = e^{i\theta}$ и $\bar{v} = ve^{-i\theta}$. Как и в первом случае, меры $\bar{v}' d\nu$ ортогональны к алгебре A. Построим по функции $\bar{v}$ функцию w в соответствии с построением функции w в первом случае. Тогда в силу условий $\mu(X_1) > 0$, $\mu(X_2) > 0$ меры $w d\nu$ и $(1 - w)\, d\nu$ зададут пару функционалов, в сумме дающих ψ и удовлетворяющих условиям (4), (5), (6). Тем самым снова возникает противоречие. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. (1). Предположение о метризуемости компакта X легко снимается. Действительно, все множества X_j являются σ-компактными и, кроме того, среди чисел $\mu(X_j)$ не может быть несчетного множества положительных даже в том случае, когда семейство $\{X_j\}$ несчетно. (2) Легко видеть, что в условиях теоремы алгебра A, даже если она не разделяет компакта X, естественно изоморфна $C(Y)$ или максимальному идеалу в $C(Y)$, где Y получается из X отождествлением общих линий уровня. (3) Основным случаем в теореме 1 можно считать тот, когда предполагается разрешимость уравнений $g^k = f$ с фиксированным $k \geqslant 2$. Это условие вытекает из формально более общего условия разрешимости уравнений

$$g^k + a_1 g^{k-1} + \cdots + a_k = f$$

с некоторыми фиксированными коэффициентами $a_1, \cdots, a_k \in C(X)$. Действительно, пусть $f \in A$ и пусть для натуральных m функции $g_m \in A$ таковы, что

$$g_m^k + a_1 g_m^{k-1} + \cdots + a_k = m^k f.$$

Полагая $g_m = m h_m$, мы получим

$$h_m^k + \frac{a_1}{m} h_m^{k-1} + \cdots + \frac{a_k}{m^k} = f. \tag{13}$$

Для каждой точки $x \in X \setminus N(f)$ существует такая связная компактная окрестность, на которой решения h_m уравнения (13) равномерно сходятся при $m \to \infty$. Вместе с тем, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность V_ε множества $N(f)$, что $|h_m(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in V_\varepsilon$ и всех достаточно больших m. Отсюда следует, что из семейства $\{h_m\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся на X подпоследовательность. Пусть h — предел этой последовательности. Тогда $h \in A$ и $h^k = f$.

4°. Основное условие теоремы 1, состоящее в разрешимости всех уравнений $g^k = f$, $f \in A$, трудно проверяемо. Гораздо чаще удается проследить за разрешимостью таких уравнений с правыми частями $f \in G(A)$. Напомним, что $G(A)$ — совокупность обратимых элементов алгебры A. Например, если $H^1(M_A, \mathbf{Z}) = 0$, то $G(A) = \exp(A)$ и, следовательно, уравнения $g^k = f$ разрешимы в A при любых натуральных k и $f \in G(A)$. Вместе с тем, из разрешимости указанных уравнений с обратимыми правыми частями в специальных ситуациях может последовать разрешимость таких уравнений с произвольными правыми частями, и теорема 1 начинает работать. Следующий весьма простой результат иллюстрирует сказанное.

Теорема 2. *Пусть A — замкнутая подалгебра алгебры всех непрерывных функций на локально связном компакте X, причем $X = M_A$. Если $G(A)$ плотно в A и $H^1(X, \mathbf{Z}) = 0$, то $A = C(X)$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1 нам достаточно установить разрешимость уравнений $g^2 = f$. Пусть $f \in A$. По условию найдется такая последовательность элементов $f_l \in G(A)$, которая равномерно сходится к f. Так как группа $H^1(X, \mathbf{Z})$ тривиальна (здесь хватило бы делимости, но в данной ситуации делимость равносильна тривиальности), то существуют такие элементы $g_l \in A$, что $g_l^2 = f_l$. По лемме 2, из последовательности g_l можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, и ее предел $g \in A$ удовлетворяет соотношению $g^2 = f$. Теорема доказана.

Следствие. *Если A — такая замкнутая подалгебра в $C([0, 1])$, что $M_A = [0, 1]$ и $G(A)$ плотно в A, то $A = C([0, 1])$.*

Следующий пример показывает, что условие $H^1(X, \mathbf{Z}) = 0$ в теореме 2 существенно. Пусть X — „швейцарский сыр“, т. е. плоский компакт без внутренних точек, который получается из единичного диска в результате удаления из него последовательности $\{\Delta_l\}$ открытых дисков, замыкания которых не пересекаются (см., например, [13], стр. 42). Пусть $R(X)$ — алгебра равномерных пределов на X рациональных функций с полюсами вне X. Всегда $M_{R(X)} = X$. Очевидно, что в рассматриваемой ситуации $G(R(X))$ плотно в $R(X)$. Далее, швейцарский сыр X локально связен: если $\zeta_1, \zeta_2 \in X$, то заменяя отдельные участки отрезка $[\zeta_1, \zeta_2]$ подходящими дугами окружностей $\bar{\Delta}_l \setminus \Delta_l$, мы получим проходящую в X кривую длины $\leqslant \pi |\zeta_2 - \zeta_1|$, соединяющую ζ_1 с ζ_2. Вместе с тем, если $\sum \rho_l < \infty$, где ρ_l — радиус диска Δ_l, то $R(X) \neq C(X)$.

Условие $X = M_A$ в теореме 2, конечно, обременительно. Если алгебра A предъявлена в виде (замкнутой) подалгебры алгебры $C(X)$, то возникает необходимость сравнивать поведение функций $f \in A$ на X и $\hat{f}$ на M_A, где $\hat{f}$ — преобразование Гельфанда, с точки зрения выполнения условий $f \neq 0$, $\hat{f} \neq 0$ и логарифмируемости. Обычно поведение f нагляднее, но полная информация заключается в поведении $\hat{f}$. Следующие примеры (первый из них принадлежит Вермеру, см. [14], второй указал нам В. Я. Лин) демонстрируют, что связь между f и $\hat{f}$ может оказаться весьма причудливой.

(1) Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^2$ компакт $X = X_1 \cup X_2$, где

$$X_1 = \{(z_1, z_2): z_1 = e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, |z_2| = 1\},$$
$$X_2 = \{(z_1, z_2): z_1 = e^{i\theta}, \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi, z_2 = 0\}.$$

Пусть A — алгебра равномерных пределов полиномов от z_1, z_2 на X. Ясно, что $z_1|X \in \exp(C(X))$. Однако полиномиальная оболочка компакта X содержит точку $(0, 0)$ и, следовательно, $z_1 \notin G(A)$.

(2) Рассмотрим афинную часть эллиптической кривой $z_2^2 = z_1^3 + a_1 z_1 + a_2$ в $\mathbf{C}^2$. Это многообразие X гомеоморфно проколотому тору и его фундаментальная группа $\pi_1(X)$ — свободная группа ранга 2. Пусть $a \in \mathbf{C}^2$ и $r_a = \|z - a\|^2$. Согласно лемме Андреотти—Френкеля [15], при почти всех $a \in \mathbf{C}^2 = \mathbf{R}^4$ особенности функции $r_a|X$ не вырождены. Отсюда следует [16], что при подходящих a и R многообразие $X_R = X \cap \{r_a \leqslant R^2\}$ гомотопически эквивалентно X. Пусть A —алгебра равномерных пределов полиномов от z_1, z_2 на X_R, где a и R выбраны в соответствии со сказанным выше. Так как X_R — полиномиально выпукло, то $M_A = X_R$. Ясно, что край ∂X_R многообразия X_R совпадает с границей Шилова ∂M_A алгебры A. Хотя этот цикл не гомотопен нулю, он когомологичен (и даже гомологичен) нулю, так как реализует элемент коммутанта фундаментальной группы. Отсюда следует, что если $f \in G(A)$, то $f|\partial X_R \in \exp(C(X_R))$. С другой стороны, так как

$$H^1(M_A, \mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(X_R), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \neq 0,$$

то, согласно теореме Аренса — Ройдена, $G(A) \setminus \exp(A)$ не пусто. Таким образом, мы встречаемся здесь со следующей ситуацией: сужение каждого обратимого элемента на границу Шилова логарифмируемо, но не каждый обратимый элемент логарифмируем на пространстве максимальных идеалов.

Пусть A—банахова алгебра с единицей непрерывных функций на компакте X. Пару (A, X) мы называем *контактной парой*, если любой элемент $f \in A$, для которого $f(x) \neq 0$ при всех $x \in X$, обратим в алгебре A. Другими словами, (A, X)— контактная пара, если $\hat{f}(M_A) = f(X)$ для любого $f \in A$. Хорошо известны нетривиальные $(X \neq M_A)$ примеры контактных пар: алгебры на дугах Вермера (см. [13], стр. 46, 47), алгебра, порожденная ζ и $|\zeta|$ на диске $|\zeta| \leqslant 1$, замыкание по равномерной сходимости на сфере $|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 = 1$ в $\mathbf{C}^2$ полиномов от ζ_1, ζ_2 и другие.

Опишем еще один класс контактных пар. Пусть K — компакт в $\mathbf{C}^n$ и $O(K)$ — алгебра функций, голоморфных в окрестности K. Обозначим через $A(K)$ замыкание $O(K)$ по равномерной сходимости на K.

Лемма 4. *Если $H^1(K, \mathrm{Z}) = 0$, то $(A(K), K)$ — контактная пара и, кроме того, $H^1(M_{A(K)}, \mathrm{Z}) = 0$.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $f \in A = A(K)$ и $f(x) \neq 0$ при всех $x \in K$, то $f \in \exp(A)$. Пусть c — такая константа, что $|f(x)| > c > 0$ при всех $x \in K$. Продолжим функцию f до непрерывной функции в некоторой открытой окрестности V компакта K. Поскольку группа $H^1(K, \mathrm{Z})$ тривиальна, то для продолженной функции мы будем иметь $f \in \exp(C(V))$, если окрестность V достаточно мала. Кроме того, можно считать, что неравенство $|f(x)| > c$ сохраняется на V. Пусть $0 < 2\varepsilon < c$. Еще уменьшая, если необходимо, окрестность V, мы сможем указать такую голоморфную на V функцию h, что $|f - h| < \varepsilon$ всюду в этой окрестности. Так как

$$h = f\left[1 - \frac{f-h}{f}\right] \text{ на } V, \text{ то } h \in \exp(A).$$

Пусть теперь $\varphi \in M_A$ и μ — представляющая мера на K (например, мера Иенсена, см. [13], стр. 52) для гомоморфизма φ. Тогда

$$\log|\varphi(h)| = \int\limits_K \log|h|\, d\mu,$$

и поэтому $|\varphi(h)| > c - \varepsilon$. Таким образом, $|\hat{h}| > c - \varepsilon$ всюду на M_A. Теперь ясно, что $f \in \exp(A)$, ибо

$$\hat{f} = \hat{h}\left[1 - \frac{\hat{h} - \hat{f}}{\hat{h}}\right] \text{ и } \max_{M_A} |\hat{f} - \hat{h}| \leqslant \max_K |f - h| < \varepsilon.$$

Для локально связных компактов X имеет место следующий „абстрактный“ вариант предыдущей леммы.

Лемма 5. *Пусть X — локально связный компакт и пусть A — замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, содержащая единицу. Предположим, что функция $f \in A$ не имеет нулей на X и что уравнение $g^k = f$ разрешимо в A для некоторой последовательности показателей $k = k_l \to \infty$. Тогда $f \in \exp(A)$. В частности, если для любого $f \in A$ без нулей на X существует такое $g \in A$, что $g^{k(f)} = f$ при некотором $k(f) \geqslant 2$, то (A, X) — контактная пара и $H^1(M_A, \mathrm{Z}) = 0$.*

Доказательство. Это легко вытекает из леммы 1. Пусть $g_l^{k_l} = f$. Переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $\{g_l\}$ равномерно на X сходится. Предельная функция g принадлежит A и локально постоянна. Так как всегда

$$\partial\hat{g}(M_A) \subseteq \hat{g}(\partial M_A) \subseteq g(X),$$

то $g \in \exp(A)$. Следовательно, $g_l \in \exp(A)$ для достаточно далеких номеров, а потому и $f \in \exp(A)$.

Замечания. (1) Лемма 4 применима, в частности, к простым дугам K. Хорошо известно, что если простая дуга K является достаточно гладкой, то $A(K) = C(K)$, и в этом случае утверждение леммы становится тривиальным. Однако, как показал недавно Г. М. Хенкин, вообще говоря, для простых дуг $A(K) \neq C(K)$. (2) Леммы 4 и 5, разумеется, весьма близки по содержанию. Тем не менее, лемма 5 может работать в ситуациях, когда $H^1(X, \mathbf{Z}) \neq 0$. Пусть, например, A — вермеровская алгебра на *замкнутой* дуге $X \subset S^2$. Согласно теореме Аренса (см., [13], стр. 49) пространство M_A совпадает со сферой S^2. Поэтому, формально говоря, лемма 5 здесь применима, хотя $H^1(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$.

Следующая элементарная лемма потребуется нам для получения основного результата данного пункта. Она позволяет заменить трансцендентную конструкцию „алгебраического расширения“ из [1] и [2] явным построением нужного объекта.

Лемма 6. *Пусть K — плоский компакт, причем* $\operatorname{int} K = \varnothing$. *Если функция w на K удовлетворяет алгебраическому уравнению*

$$w^n + p_1(\zeta) w^{n-1} + \cdots + p_n(\zeta) = 0,$$

где $p_1, \cdots, p_n$ — полиномы, то $\operatorname{int} w(K) = \varnothing$.

Доказательство. Не ограничивая общности, функцию w можно считать следом алгебраической функции. Поэтому с точностью до замен

$$\zeta \to \alpha\zeta^k + \beta,$$
$$w \to aw^l + b$$

она локально осуществляет гомеоморфизм. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть X—локально связный компакт и A — содержащая константы замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$. Предположим, что $H^1(M_A, \mathbf{Z}) = 0$. Пусть $f \in A$ и* $\operatorname{int} \hat{f}(M_A) = \varnothing$. *Тогда $\bar{f} \in A$.*

Доказательство. Обозначим через B_0 множество целых алгебраических над f элементов $w \in A$. Другими словами, $w \in B_0$ тогда и только тогда, когда $w \in A$ и для подходящих полиномов $p_1, \cdots, p_n$

$$w^n + p_1(f) w^{n-1} + \cdots + p_n(f) = 0.$$

Хорошо известно, что B_0 — подалгебра в A. Кроме того, очевидно, что $w \in B_0$, если $w \in A$ и $w^k \in B_0$ при некотором натуральном k. Согласно лемме 6, для любого элемента $w \in B_0$ имеем $\operatorname{int} \hat{w}(M_A) = \varnothing$. Пусть B — замыкание B_0 в A. Покажем, что для любого элемента $w \in B$ существует такой элемент $g \in B$, что $g^2 = w$. Действительно, для данного $w \in B$ найдется такая последовательность элементов $w_l \in B_0$, что $w_l \to w$ и $\hat{w}_l \neq 0$ всюду на M_A. Поэтому существуют такие $g_l \in A$, что $g_l^2 = w_l$. При этом $g_l \in B_0$. Согласно лемме 2, последовательность $\{g_l\}$ можно считать равномерно сходящейся на X. Если g — предел этой последовательности, то $g \in B$ и $g^2 = w$. Таким образом, алгебра B удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, симметрична. Поэтому $\bar{f} \in B \subseteq A$.

Как и в случае теоремы 1, теорему 3 можно сформулировать иначе: если в условиях теоремы 3 функционал ψ на $C(X)$ есть крайняя точка единичного шара, аннулирующего A, то $f|\mathrm{supp}(\psi) = \mathrm{const}$.

Наше первое следствие теоремы 3 аналогично теореме 2.

Следствие 1. *Пусть* A — *равномерная алгебра, реализованная в виде алгебры непрерывных функций на своем пространстве максимальных идеалов. Предположим, что* M_A *локально связно и что* $H^1(M_A, \mathbf{Z}) = 0$. *Если функции* $f \in A$, *для которых* $\mathrm{int}\, f(M_A) = \varnothing$, *разделяют компакт* M_A, *то* $A = C(M_A)$.

Здесь можно повторить все сказанное непосредственно после теоремы 2. В частности, как показывает приведенный там пример со швейцарским сыром, условие $H^1(M_A, \mathbf{Z}) = 0$ существенно.

Следствие 2. *Пусть* K — *локально связный компакт в* $\mathbf{C}^2$, *для которого* $H^1(K, \mathbf{Z}) = 0$, *и пусть* $A(K)$ — *равномерное замыкание на* K *алгебры функций, голоморфных в окрестности* K. *Если функции* $f \in A(K)$, *для которых* $\mathrm{int}\, f(K) = \varnothing$, *разделяют компакт* K, *то* $A(K) = C(K)$.

Действительно, согласно лемме 4, группа $H^1(M_{A(K)}, \mathbf{Z})$ тривиальна и, кроме того, $(A(K), K)$ — контактная пара. Поэтому компакт K разделяет функции из A, для которых $\mathrm{int}\, \hat{f}(M_A) = \varnothing$, и остается воспользоваться теоремой 3.

В частности, $A(K) = C(K)$, если K — простая дуга, проекции которой на каждую из координатных плоскостей не имеют внутренних точек (именно так интерпретируется многомерный результат Чирки из [1] и [2] на стр. 100 в книге [13]). Разумеется, это верно, когда K — непрерывно дифференцируемая простая дуга, но в этом случае работа Штольценберга [11] дает больше — в ней дополнительно устанавливается, что K полиномиально выпукло.

Следствие 3 (теорема Чирки для $\mathbf{C}^2$). *Пусть* Γ — *простая дуга в* $\mathbf{C}^2$ *и* z_1-*проекция этой дуги не имеет внутренних точек. Тогда* $A(\Gamma) = C(\Gamma)$.

Действительно, согласно теореме 3, минимальный носитель крайней точки единичного ортогонального шара содержится в одной из плоскостей $z_1 = \mathrm{const}$, и остается применить теорему Лаврентьева. Доказательство можно закончить и по-другому: использовать теорему Бишопа об антисимметрии и снова теорему 3 (или 1).

5°. Если в условиях теоремы 1 алгебра A разделяет точки и содержит константы, то $A = C(X)$. Имеются веские основания (см., например, [3], [4], [5], [7]) считать, что априорное предположение о совпадении нормы в алгебре A с sup-нормой на самом деле излишне. В данном пункте мы обсудим этот вопрос, ограничившись для простоты случаем, когда в алгебре A разрешимы уравнения $g^2 = f$. Разумеется, согласно теореме 1 и лемме 2, *замыкание* алгебры A по равномерной сходимости на X совпадает с $C(X)$, и весь вопрос в том, не вытекает ли из разрешимости уравнений $g^2 = f$ дополнительно эквивалентность нормы с sup-нормой.

Мы не знаем полного ответа на поставленный вопрос, однако из приводимой ниже теоремы 4 вытекает, что ответ будет положительным для нормальных алгебр, в которых нет нетривиальных замкнутых примарных идеалов.

Итак, всюду ниже A — банахова алгебра непрерывных функций на компакте X с поточечными операциями, содержащая константы и разделяющая точки. Относительно нормы предполагается, что сходимость по норме мажорирует равномерную сходимость, т. е., что $\max_X |f| \leqslant C\|f\|$. Напомним, что алгебра A называется *нормальной* на X, если для любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств $Y_1, Y_2 \subseteq X$ существует такой элемент $f \in A$, что $f|Y_1 = 0$ и $f|Y_2 = 1$.

Теорема 4. *Пусть X — локально связный компакт и A — банахова алгебра непрерывных функций на компакте X. Предположим, что алгебра A нормальна и что для любого элемента $f \in A$ в алгебре A разрешимо уравнение $g^2 = f$. Тогда найдется такое конечное множество $\Phi = \{x_1, \cdots, x_p\} \subset X$, что алгебра A будет содержать все непрерывные функции, равные нулю в окрестности этого множества Φ.*

Мы предпошлем доказательству теоремы 4 несколько определений и лемму, вполне аналогичную, например, предположению 10 из работы Бернара [7].

Для любого замкнутого подмножества $Y \subset X$ через $A|Y$ мы будем обозначать алгебру сужений элементов из A на Y. Алгебра $A|Y$ естественно отождествляется с факторалгеброй алгебры A по замкнутому идеалу $I(Y)$ функций из A, обращающихся в нуль всюду на Y, и в соответствии с этим снабжается нормой (относительно которой она является банаховой алгеброй).

Пусть B — произвольная банахова алгебра. Будем говорить, что в алгебре B уравнение $\xi^2 = \eta$ *ограниченно разрешимо*, если для любого элемента $\eta \in B$ существует такой элемент $\xi \in B$, что $\xi^2 = \eta$ и $\|\xi\| \leqslant c\|\eta\|^{1/2}$, где константа c не зависит от η.

Легко видеть, что если уравнение $\xi^2 = \eta$ ограниченно разрешимо в $A|Y_1$ и если $Y_2 \subseteq Y_1$, то алгебра $A|Y_2$ также обладает этим свойством. Будем говорить, что уравнение $\xi^2 = \eta$ *ограниченно разрешимо в точке* $x_0 \in X$, если существует такая замкнутая окрестность Y этой точки, что уравнение $\xi^2 = \eta$ ограниченно разрешимо в алгебре $A|Y$.

Лемма 7. *В условиях теоремы 4 уравнение $\xi^2=\eta$ ограниченно разрешимо в каждой точке $x\in X$, кроме, быть может, конечного подмножества $\Phi\subset X$.*

Доказательство. Если предположить противное, то найдется такая бесконечная последовательность Y_k замкнутых подмножеств в X, что $Y_k\cap Y_k'=\varnothing$, где $Y_k'=\overline{\bigcup_{l\neq k} Y_l}$ (черта означает замыкание), и уравнение $\xi^2=\eta$ не является ограниченно разрешимым в $A|Y_k$ при каждом k. Так как алгебра A нормальна, то отображение $I(Y_k')\to$ $\to A|Y_k$ сюръективно. Поэтому, в силу теоремы о замкнутом графике, найдется такая последовательность элементов $f_k\in I(Y_k')\subset A$, что $\|f_k\|\leqslant\frac{1}{2^k}$ и

$$\|g\|\geqslant k,\ \text{если}\ g\in A\ \text{и}\ g^2|Y_k=f_k|Y_k. \tag{14}$$

Так как $\sum\|f_k\|<\infty$, то $f=\sum f_k\in A$. Но ввиду (14) уравнение $g^2=f$ не может иметь решений в A, и мы получаем противоречие. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть Φ — конечное множество, указанное в лемме 7. Покажем сначала, что если $x_0\bar{\in}\Phi$, то $A|Y=C(Y)$ для подходящей замкнутой окрестности этой точки. Так как X локально связно, то по лемме 7 существует такая замкнутая связная окрестность Y точки x_0, что в алгебре $A|Y$ уравнение $\xi^2=\eta$ ограниченно разрешимо. Пусть $\eta\in A|Y$ и $\eta(t)\neq 0$ при всех $t\in Y$. По условию существует такой элемент $\xi\in A|Y$, что $\xi^2=\eta^2$ и $\|\xi\|\leqslant c\,\|\eta^2\|^{1/2}$, где c не зависит от η. Но так как Y связно и $\eta(t)\neq 0$, то $\xi=\pm\eta$. Таким образом, если $\eta(t)\neq 0$, то $\|\eta\|\leqslant c\|\eta^2\|^{1/2}$. Мы утверждаем, что аналогичное неравенство выполняется для всех $\eta\in A|Y$. Действительно, иначе нашлась бы такая последовательность элементов $\eta_l\in A|Y$, что $\|\eta_l\|=1$, но $\|\eta_l^2\|\to 0$. Положим $\alpha_l=\max\limits_Y|\eta_l(t)|$. Тогда $\alpha_l>0$ и $\alpha_l\to 0$. Поэтому, учитывая уже установленное неравенство для элементов без нулей, мы будем иметь

$$\|\eta_l\|\leqslant 2\alpha_l+\|\eta_l+2\alpha_l\|\leqslant 2\alpha_l+c\,[\|\eta_l^2\|+4\alpha_l\|\eta_l\|+4\alpha_l^2]^{1/2}\to 0,$$

что приводит к противоречию. Итак, сходимость по норме в $A|Y$ эквивалентна равномерной сходимости на Y. С другой стороны, согласно теореме 1, семейство A плотно в $C(X)$ и поэтому $A|Y$ плотно в $C(Y)$. Сопоставляя эти обстоятельства, мы получаем, что $A|Y=$ $=C(Y)$.

Поскольку алгебра A нормальна, отсюда легко вытекает следующее: для каждой точки $x_0\bar{\in}\Phi$ существует такая окрестность V, что если $f\in C(X)$ и $f|(X\setminus V)=0$, то $f\in A$.

Теперь легко закончить доказательство. Пусть $f\in C(X)$ и $f(x)=0$ в некоторой открытой окрестности V_0 множества Φ. Для каждой точки $x_0\in X\setminus V_0$ отметим открытую окрестность V, обладающую указанным выше свойством. Вместе с окрестностью V_0 окрестности V образуют открытое покрытие компакта X. Выберем из него конечное покрытие $V_0, V_1, \cdots, V_m$ и пусть $\{e_0, \cdots, e_m\}$ — подчиненное разбиение единицы. Тогда $e_0 f = 0$ и $e_i f \in A$ при $i \geq 1$ по доказанному. Следовательно, $f = e_0 f + e_1 f + \cdots + e_m f \in A$. Теорема доказана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Ереванский государственный
университет

Поступила 15.VII.1974

Ե. Ա. ԳՈՐԻՆ, Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ. Բոլոր անընդհատ ֆունկցիաների հանրահաշվի մի քանի բնութագրիչ հատկությունների մասին լոկալ կապակցված կոմպակտների վրա *(ամփոփում)*

Տրվում է նոր ապացույց և բերվում են մի քանի ընդհանրացումներ Չիրկայի թեորեմի մասին հավասարաչափ հանրահաշիվների համար, որոնցում լուծելի են երկանդամ հավասարումներ։

Արդյունքները օգտագործվում են հոլոմորֆ մոտարկման մի քանի խնդիրներում։

E. A. GORIN, M. I. KARAKHANIAN. *On some characteristic properties of the algebra of all continuous functions on a locally connected compact* (summary)

A new proof and some generalizations of the Chirka's theorem concerning the radically—closed algebras is given. The results are applied to some problems of the holomorphic approximation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. М. Чирка.* Приближение непрерывных функций голоморфными на жордановых дугах в C^n, ДАН СССР, 167, № 1, 1966, 38—40.
2. *Е. М. Чирка.* Приближение непрерывных функций голоморфными на жордановых дугах в C^n, сб. „Современные проблемы теории аналитических функций" (по материалам Международной конференции по теории функций, Ереван, 1965), М., Изд. „Наука", 1966, 324—326.
3. *I. Katznelson.* A characterization of the algebra of all continuous functions on a compact Hausdorff Space, Bull. Am. Math. Soc., 66, № 4, 1960, 313—315.
4. *Е. А. Горин.* Характеристика кольца всех непрерывных функций на бикомпакте, ДАН СССР, 142, № 4, 1962, 781—784.
5. *Е. А. Горин.* О некоторых характеристических свойствах $C(X)$. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 14, 1971, 186—195.
6. *J. Wermer.* The space of real parts of a function algebra, Pacif. J. Math., 13, 1963, 1423—1426.
7. *A. Bernard.* Espace de parties rèelles des éléments d'une algèbre de Banach de fonctions, J. of Funct. Anal., 10, 1972, 387—409.
8. *R. S. Countryman, Jr.* On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed, Pacif. J. Math., 20, 1967, 433—448.
9. *A. Browder.* Introduction to Function Algebras, N.—I., Benjamin, 1969.
10. *Е. А. Горин* и *В. Я. Лин.* Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос. Мат. сб., 78, № 4, 1969, 579—610.

11. *G. Stolzenberg.* Uniform approximation on smooth curves, Acta Math., 115, 1966, 185—198.
12. *Дж. Л. Келли.* Общая топология, М., Изд. „Наука", 1968.
13. *Т. Гимелин.* Равномерные алгебры, М., Изд. „Мир", 1973.
14. *G. Stolzenberg.* Polynomially and rationally convex sets, Acta Math., 109, 1963. 259—289.
15. *Дж. Милнор.* Особые точки комплексных гиперповерхностей, М., Изд. „Мир", 1971.
16. *Дж. Милнор.* Теория Морса, М., Изд. „Мир", 1965.