ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

ДО КОНГ ХАНЬ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ, РЕАЛИЗУЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

1°. Известно, что мультипликативные представления J-нерастягивающих оператор-функций играют большую роль в теории операторных узлов и линейных систем. С их помощью были построены и изучены модели широких классов операторов [2, 7].

В связи с открытием М. М. Джрбашяном [3—5] новых классов мероморфных функций, возникает вопрос об их интерпретации с точки зрения линейных систем.

В работах [1, 6] в рамках теории линейных узлов даются реализации некоторых классов мероморфных функций М. М. Джрбашяна. Настоящая работа продолжает исследование этих работ, она посвящена изучению операторов, реализующих функции классов D_p ($p = 0, 1, 2, \cdots$). В работе показано, что операторы, дающие реализацию предельных множителей и конечных произведений элементарных множителей Джрбашяна будут ограниченными. Операторы, реализующие бесконечные произведения классов D_p ($p > 0$) при условии $\sum (1-|\gamma_k|) = \infty$, оказываются неограниченными, однако можно ввести новую метрику, в которой эти операторы становятся ограниченными. В работе исследуются также резольвента и спектр соответствующих операторов.

2°. Мы приведем здесь некоторые определения и результаты из [1, 6], необходимые для дальнейшего.

Определение 1: Совокупность L, состоящая из двух линейных пространств H, E и четырех линейных операторов T; $H \to H$; Φ: $E \to H$; Ψ: $H \to E$; K: $E \to E$ называется линейным узлом, а оператор-функция

$$W(z;\ L) = K + z\Psi\ (I - zT)^{-1}\ \Phi\colon E \to E. \tag{0.1}$$

называется передаточной функцией узла L.

Если пространства гильбертовы, а операторы непрерывны и $\dim E = I$, a — орт в E, то $\Phi(ua) = uq$, $\Psi x = (x,\ p)\,a$, $K(ua) = uka$ ($q,\ p, x \in H;\ k, u \in E$). В этом случае будем писать $L = (T,\ H,\ q,\ p,\ E,\ k)$. Передаточная функция имеет вид:

$$W(z;\ L) = k + z\,((I - zT)^{-1}\,q,\ p).$$

Определение 2: Будем говорить, что линейный узел L является реализацией заданной в единичном круге функции $f(z)$, если $f(z)$ совпадает с передаточной функцией узла L.

Функция $F(z) \in D_p$ допускает представление [5, 6]

$$F(z) = Cz^n \frac{\pi_p(z;\ a_k)}{\pi_p(z;\ b_k)} S(z),$$

где

$$\pi_p(z;\ \zeta_k) = \prod_{k=1}^{\infty} M_p(z;\ \zeta_k),$$

$$M_p(z;\zeta) = \frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} \frac{(1-|\zeta|^2)^j}{j}\left|\frac{2}{(1-\bar{\zeta}z)^j} - 1\right|\right\}, \quad (0.2)$$

$$S(z) = \exp\left\{\frac{2p}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{p-1}\frac{\log|F(\rho e^{i\theta})|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{p+1}}\,\rho\,d\rho d\theta\right\}. \quad (0.3)$$

Здесь произведение $\pi_p(z;\ \zeta_k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\zeta_k|)^{p+1} < \infty,\ 0 < |\zeta_n| \leqslant |\zeta_{n+1}| < 1.$$

В работе рассматриваются последовательности, удовлетворяющие этому условию.

Множитель $M_p(z;\ \zeta)$ вида (0.2) (с точностью до постоянного множителя) был введен М. М. Джрбашяном [5].

Учитывая, что

$$\frac{2}{(1-\bar{\zeta}z)^j} - 1 = \frac{1+\bar{\zeta}z}{1-\bar{\zeta}z} + \sum_{k=2}^{j}\frac{2\bar{\zeta}z}{(1-\bar{\zeta}z)^k}, \quad (0.4)$$

представим $M_p(z;\ \zeta)$ в виде

$$M_p(z;\ \zeta) = \frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z}\frac{|\zeta|}{\zeta}\exp\left\{\frac{1}{2}e_1(\zeta)\frac{1+\bar{\zeta}z}{1-\bar{\zeta}z} + \sum_{k=2}^{p} e_k(\zeta)\frac{\bar{\zeta}z}{(1-\bar{\zeta}z)^k}\right\}, \quad (0.5)$$

где

$$e_k(\zeta) = \sum_{i=k}^{p}\frac{(1-|\zeta|^2)^i}{i}. \quad (0.6)$$

Приведем известные [1,6] реализации элементарных множителей, которые нам понадобятся в дальнейшем.

а) Функция $\exp\left\{\frac{1}{2}e_1(\zeta)\frac{1+\bar{\zeta}z}{1-\bar{\zeta}z}\right\}$ реализуется узлом [1]

$$H_1(\zeta) = L^2\left(0,\ \frac{1}{2}e_1(\zeta)\right),\ E = C_1,$$

$$[T_1(\zeta)f](x) = \bar{\zeta}f(x) + 2\bar{\zeta}\int_0^x \exp(x-t)f(t)\,dt, \tag{0.7}$$

$$q_1(\zeta) = \exp x;\ p_1(\zeta) = 2\bar{\zeta}\exp\left(\frac{1}{2}e_1(\zeta) - x\right);\ k_1(\zeta) = \exp\frac{1}{2}e_1(\zeta).$$

Этот узел будем обозначать через $L(\zeta)$.

b) Множитель $\exp\left\{e_1(\zeta)\dfrac{\bar{\zeta}z}{(1-\bar{\zeta}z)^k}\right\}$ может быть реализован следующим узлом $L_k(\zeta)$ $(k = 2, 3, \cdots, p)$:

$$H_k(\zeta) = L^2(R^k, [0, e_k(\zeta)]),\ E = C_1,$$

$$[T_k(\zeta)f](x) = Bf(x) + \int_0^x (f(t), p_0)_{R^k} q_0\,dt, \tag{0.8}$$

$$q_k(\zeta) = q_0,\ p_k(\zeta) = p_0,\ k_k(\zeta) = 1,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \bar{\zeta} & \bar{\zeta} & \cdots & \bar{\zeta} \\ 0 & \bar{\zeta} & \cdots & \bar{\zeta} \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\zeta} \end{pmatrix},\ q_0 = \begin{pmatrix} \bar{\zeta} \\ \bar{\zeta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix},\ p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{0.9}$$

Несущественное отличие выражений (0.8) и (0.9) от соответствующих формул в работе [6] вызвано принятым нами определением (0.1) передаточной функции $W(z; L)$, в то время как Л. Меграбян [6] исходит из функции $S(z; L) = W(z^{-1}; L)$.

c) Множитель Бляшке $\dfrac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z}\dfrac{|\zeta|}{\zeta}$ реализуется узлом $L_{p+1}(\zeta)$

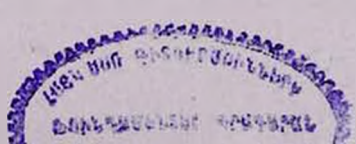
$$H_{p+1}(\zeta) = E = C_1;\ T_{p+1}(\zeta)f = \bar{\zeta}f, \tag{0.10}$$

$$q_{p+1}(\zeta) = \sqrt{1-|\zeta|^2};\ p_{p+1}(\zeta) = -\frac{|\zeta|}{\zeta}\sqrt{1-|\zeta|^2};\ k_{p+1}(\zeta) = |\zeta|.$$

§ 1. Сцепление линейных узлов

Пусть имеются N $(N \leqslant \infty)$ узлов $L^{(n)} = (T^{(n)}, H^{(n)}, q^{(n)}, p^{(n)}, E, K^{(n)})$, $(n = 1, 2, \cdots, N)$ с общим внешним одномерным пространством $E = C_1$. Пусть далее $H^{(n)}$ — гильбертовы пространства с метриками $(\cdot, \cdot)_n$ и сходится произведение $\prod_{n=1}^{N} k^{(n)}$. Тогда, применяя правило сцепления узлов, введенное в [1], можем образовать узлы:

$$L = L^{(1)} \vee L^{(2)} \vee \cdots \vee L^{(N)} = (T, X, q, p, E, k), \tag{1.1}$$



$$\bar{L} = L^{(N)} V \dots V L^{(2)} V L^{(1)} = (\bar{T}, \bar{X}, \bar{q}, \tilde{p}, E, \bar{k}). \tag{1.2}$$

Пространства X и $\tilde{X}$ представляют линейное многообразие элементов вида $\{x_n\}_{n=1}^{N} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$, где $x_n \in H^{(n)}$. В случае $N < \infty$ мы будем считать, что $X = \bar{X} = \bigoplus_{n=1}^{N} H^{(n)}$ (см. [1]), а когда $N = \infty$ будем рассматривать X как линейное пространство.

Лемма 1.1. *Операторы* T, $\bar{T}$, *элементы* q, p, $\bar{q}$, $\tilde{p}$ *и числа* k, $\bar{k}$ *определяются следующими равенствами:*

$$(TX)_n = T^{(n)} X_n + q^{(n)} \sum_{k=1}^{n-1} (x_k, p^{(k)})_k \prod_{s=k+1}^{n-1} k^{(s)}, \tag{1.3}$$

$$q = \left\{ q^{(n)} \prod_{s=1}^{n-1} k^{(s)} \right\}_{n=1}^{N}, \quad p = \left\{ p^{(n)} \prod_{s=n+1}^{N} k^{(s)} \right\}_{n=1}^{N}, \tag{1.4}$$

$$k = \bar{k} = \prod_{s=1}^{N} k^{(s)},$$

$$(\bar{T} X)_n = T^{(n)} x_n + q^{(n)} \sum_{k=n+1}^{N} (x_k, p^{(k)})_k \prod_{s=n+1}^{k-1} k^{(s)}, \tag{1.5}$$

$$\bar{q} = \left\{ q^{(n)} \prod_{s=n+1}^{N} k^{(s)} \right\}_{n=1}^{N}, \quad \tilde{p} = \left\{ p^{(n)} \prod_{s=1}^{n-1} k^{(s)} \right\}_{n=1}^{N}. \tag{1.6}$$

Отсюда видно, что оператор Ψ, который определяется по формуле

$$\Psi x = a \sum_{k=1}^{N} (x_k, p_k)_k \equiv a\,(x, p), \tag{1.7}$$

определен только на векторах x, для которых сходится ряд в правой части (1.7). А операторы $\tilde{T}$ и $\bar{\Psi}$ определены на векторах x, для которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{N} (x_n, \tilde{p}_n)_n. \tag{1.8}$$

Найдем формулы для операторов $(zI - T)^{-1}$ и $(zI - \bar{T})^{-1}$. Пусть $(zI - T)^{-1} x = f$, тогда

$$(zI - T^{(n)}) f_n - q^{(n)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(f_k, p^{(k)} \prod_{s=k+1}^{n-1} k^{(s)} \right)_k = x_n. \tag{1.9}$$

Обозначая через y_n сумму

$$y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f_k,\ p^{(k)} \prod_{s=k+1}^{n-1} k^{(s)} \right)_k, \tag{1.10}$$

будем искать решение y_n в виде $y_n = v_n B(z;\ n)$, где

$$B(z;\ n) = \prod_{l=1}^{n-1} W(z^{-1};\ L^{(l)}). \tag{1.11}$$

Учитывая (1.9)--(1.11) и соотношение $y_n - y_{n-1} k_{n-1} = (f_{n-1},\ p^{(n-1)})$, получим

$$f_n = (zI - T^{(n)})^{-1} x_n +$$

$$+ (zI - T^{(n)})^{-1} q^{(n)} \sum_{k=1}^{n-1} ((zI - T^{(k)})^{-1} x_k,\ p^{(k)})_k B(z;\ k+1,\ n), \tag{1.12}$$

где

$$B(z;\ k+1,\ n) = \prod_{s=k+1}^{n-1} W(z^{-1};\ L^{(s)}).$$

Аналогично для $(zI - \tilde{T})^{-1} x = g$ мы имеем

$$g_n = (zI - T^{(n)})^{-1} x_n +$$

$$+ (zI - T^{(n)})^{-1} q^{(n)} \sum_{k=n+1}^{N} ((zI - T^{(k)})^{-1} x_k,\ p^{(k)})_k B(z;\ n+1,\ k). \tag{1.13}$$

Имеет место

Предложение 1.1. *Пусть* $z \in \rho(T^{(n)})$ *и сходится произведение* $\prod_{n=1}^{N} W(z;\ L^{(n)})$, *тогда* $(I - z\tilde{T})^{-1} \tilde{q} \in D(\Psi)$ *и* $(I - z\tilde{T})^{-1} \tilde{q} \in I(\Psi)$ *и имеет место соотношение*

$$W(z,\ L) = W(z;\ \tilde{L}) = \prod_{n=1}^{N} W(z;\ L^{(n)}).$$

Доказательство. В случае $N < \infty$ эти утверждения очевидны, они вытекают из теоремы умножения передаточных функций ([1], теорема 1). Итак, пусть $N = \infty$ и $(I - zT)^{-1} q = y$, имеем

$$(I - zT^{(n)})\, y_n - zq^{(n)} \sum_{k=1}^{n-1} (y_k,\ p^{(k)})_k \prod_{s=k+1}^{n-1} k^{(s)} = q^{(n)} \prod_{s=1}^{n-1} k^{(s)}. \tag{1.14}$$

Откуда, если $q^{(n)} = 0$, то $y_n = 0$ $(z \in \rho(T^{(n)}))$. Будем искать решение y_n (для тех n, для которых $q^{(n)} \neq 0$) в виде

$$y_n = (I - zT^{(n)})^{-1} q^{(n)} \prod_{s=1}^{n-1} k^{(s)} \cdot v_n. \tag{1.15}$$

Подставляя (1.15) в (1.14) и учитывая, что $q^{(n)} \neq 0$, имеем

$$v_n - z \sum_{s=1}^{n-1} ((I - z\, T^{(s)})^{-1} q^{(s)},\ p^{(s)})_s \frac{v_s}{k^{(s)}} = 1, \tag{1.16}$$

откуда получим

$$v_n = \left[\prod_{s=1}^{n-1} k^{(s)}\right]^{-1} \prod_{s=1}^{n-1} W(z; L^{(s)}), \tag{1.17}$$

и

$$y_n = (I - z\, T^{(n)})^{-1}\ q^{(n)} \prod_{s=1}^{n-1} W(z; L^{(s)}). \tag{1.18}$$

Из (1.15) и (1.4) имеем

$$(y,\ p) = k \sum_{k=1}^{\infty} ((I - z\, T^{(k)})^{-1} q^{(k)},\ p^{(k)})_k \frac{v_k}{k^{(k)}}. \tag{1.19}$$

Отсюда и из (1.16) при $n \to \infty$ получим

$$(y,\ p) = \frac{1}{z}(k v_\infty - 1),$$

что вместе с определением 1 передаточной функции дает доказательство предложения 1.1 для L. Аналогично доказываются утверждения, относящиеся к узлу $\tilde{L}$.

§ 2. Свойства операторов, реализующих произведение Джрбашяна класса D_ρ

1°. Чтобы получить реализацию для элементарного множителя $M_\rho(z; \zeta)$ вида (0.5) достаточно взять сцепление:

$$L(\zeta) = L_1(\zeta) \vee L_2(\zeta) \vee \cdots \vee L_{p+1}(\zeta) \equiv (T(\zeta),\ H(\zeta),\ q(\zeta),\ p(\zeta),\ E,\ k(\zeta)), \tag{2.1}$$

где $L_k(\zeta)$ $(k = 1, 2, \cdots, p+1)$ определены по (0.7)—(0.10), пространство $H(\zeta)$ гильбертово $\left(H(\zeta) = \bigoplus_{k=1}^{p+1} H_k(\zeta)\right)$.

Для оператора $T(\zeta)$ узла (2.1) справедливы следующие простые предложения, доказательство которых следует из явного вида оператора.

Лемма 2.1. а) *Существует число C, не зависящее от ζ $(|\zeta| < 1)$ такое, что*

$$\|T(\zeta)\| \leqslant C.$$

б) *Спектр оператора $T(\zeta)$ состоит из единственной точки $\bar{\zeta}$. Точка $\bar{\zeta}$ является одновременно собственным значением и су-*

щественной особой точкой резольвенты $(zI - T(\zeta))^{-1}$. *Собственные элементы оператора* $T(\zeta)$ *имеют вид* $(0, 0, \cdots, h_{p+1})$, *где* $h_{p+1} \in H_{p+1}(\zeta)$.

в) *Пусть* ζ *пробегает множество* M *точек из круга* $|\zeta| < 1$, *и точка* z *не принадлежит замыканию множества сопряженных точек* $\bar{\zeta}$ $(\zeta \in M)$, *тогда существует число* A, *не зависящее от* ζ, *такое, что*

$$\|zI - T(\zeta))^{-1}\| \leqslant A.$$

г) *При* $p > 0$ *область значений оператора* $\bar{\zeta} I - T(\zeta)$ *плотна в* $H(\zeta)$.

2°. Приступаем к рассмотрению оператора, реализующего произведение М. М. Джрбашяна. Согласно теореме умножения передаточных функций (предложение 1.1), произведение $\pi_p(z; \zeta_k)$ имеет реализации

$$L = \bigvee_{n=1}^{\infty} L(\zeta_n), \quad \tilde{L} = \bigvee_{n=1}^{\infty} L(\zeta_n). \tag{2.2}$$

Составляющие элементы узлов L и $\tilde{L}$ выражаются по (1.3) – (1.6), но вместо узлов $L^{(n)}$ надо взять $L(\zeta_n)$. Основные пространства X и $\tilde{X}$ представляют пространство последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \in H(\zeta_n))$. Мы будем считать как и в $n°$ 1, что пространства $H(\zeta_n)$ снабжены гильбертовыми метриками. Обозначим через H пространство последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \in H(\zeta_n))$ с нормой $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^2 < \infty$, и будем изучать свойства операторов T, $\tilde{T}$ узлов L, $\tilde{L}$ в этом пространстве H. Как было показано в п. 1 точка $\bar{\zeta}$ есть точка спектра оператора $T(\zeta)$. Введем обозначнние

$$\Lambda = \{\bar{\zeta}_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{2.3}$$

Имеет место предложение.

Лемма 2.2. *Пусть* $z \notin \bar{\Lambda}$ (*замыкание множества* Λ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\zeta_n|) = \infty, \tag{2.4}$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(zI - T(\zeta_n))^{-1} q(\zeta_n)\|^2 = \infty, \tag{2.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(\bar{z} I - T^*(\zeta_n))^{-1} p(\zeta_n)\|^2 = \infty. \tag{2.6}$$

Доказательство. Докажем сначала (2.5). Если рассматривать $L(\zeta_n)$ как сцепление $(p+1)$ узлов, то формула (1.18) дает

$$[(zI - T(\zeta_n))^{-1} q(\zeta_n)]_k = (zI - T_k(\zeta_n))^{-1} q_k(\zeta_n)\, v_k(\zeta_n; z), \qquad (2.7)$$

где

$$v_k(\zeta_n; z) = \prod_{s=1}^{k-1} W(z^{-1}; L_s(\zeta_n)).$$

В силу сходимости произведения Джрбашяна $\lim\limits_{|\zeta_n|\to 1} |v_k(\zeta_n; z)| = 1$. Так как $z \in \overline{\Lambda}$, то $|(z - \overline{\zeta}_k)^{-1}| > C$, где C не зависит от ζ_k. Тогда из (2.7) имеем

$$\|(zI - T(\zeta_n))^{-1} q(\zeta_n)\|^2_{H(\zeta_n)} \geqslant \|[(zI - T(\zeta_n))^{-1} q(\zeta_n)]_{p+1}\|^2_{H_{p+1}(\zeta_n)} =$$

$$= |(z - \overline{\zeta}_n)^{-1}|^2 (1 - |\zeta_n|^2) |v_{p+1}(\zeta_n; z)|^2 \geqslant C' (1 - |\zeta_n|).$$

Отсюда следует (2.5). Равенство (2.6) доказывается аналогично.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\zeta_n|) = \infty,$$

тогда

1) *Каналовые векторы p, q и $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ соответственно узлов L и $\tilde{L}$ не принадлежат H.*

2) *Операторы T и $\tilde{T}$ неограничены и их области определения плотны в H, и спектр каждого из них покрывает всю комплексную плоскость.*

Доказательство 1. Учитывая (0.5)—(0.8) и (1.3), имеем

$$\|q(\zeta_n)\|^2_{H(\zeta_n)} = \frac{1}{2}[\exp e_1(\zeta_n) - 1] + (1 - |\zeta_n|^2) \exp e_1(\zeta_n) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{p} k |\zeta_n|^2 e_k(\zeta_n) \exp e_1(\zeta_n), \qquad (2.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |q(\zeta_n)\|^2_n \prod_{l=1}^{n-1} k^2(\zeta_l) > C \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\zeta_n|).$$

Последнее неравенство следует из (2.8) и из сходимости произведения $\prod\limits_{l=1}^{\infty} k^2(\zeta_l)$. Значит $q \in H$. Для p, $\tilde{q}$ и $\tilde{p}$ доказательство аналогично.

2. Оператор $\tilde{T}$ определен на плотном множестве элементов вида

$$(x_1, x_2, \cdots, x_N, 0, 0, \cdots) \quad \forall N < \infty. \qquad (2.9)$$

Оператор T определен на векторах вида (2.9) с дополнительным условием

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k,\ p_k)_k = 0, \tag{2.10}$$

где $p_k = p(\zeta_k) \prod_{l=k+1}^{\infty} k(\zeta_l)$ — k-ая компонента вектора p. Если некоторый вектор $y \in H$ ортогонален ко всем векторам вида (2.9) и (2.10), то он должен иметь вид $y = cp$. С другой стороны, как было показано в 1) вектор p не принадлежит H, следовательно $c = 0$, значит $y = 0$.

Пусть $z \overline{\in} \Lambda$, резольвенту $(zI - T)^{-1}$, в силу (1.12), можно рассматривать как сумму двух операторов, первый из которых ограничен в силу леммы 2.1 (в). Поэтому достаточно рассматривать второй оператор, который обозначаем через $R_2(z, T)$.

Полагая $x = (x_1, 0, \cdots)$, где x_1 удовлетворяет условию

$$s = ((zI - T(\zeta_1))^{-1} x_1,\ p(\zeta_1)) \neq 0,$$

имеем

$$[R_2(z, T)\, x]_n = s\,(zI - T(\zeta_n))^{-1} q(\zeta_n) B(z; 2, n).$$

В силу сходимости $B(z; 2, n)$ из леммы 2.2 следует, что вектор x не принадлежит области определения оператора $R_2(z, T)$. Таким образом, мы показали, что $z \in \sigma(T)$, значит

$$C \setminus \overline{\Lambda} \subset \sigma(T).$$

С другой стороны, поскольку множество $\overline{\Lambda}$ нигде не плотно в C, то из замкнутости спектра мы получим $C = \sigma(T)$. Что касается $\widetilde{T}$, то из (1.13) и леммы 2.2 (формула 2.6) можно показать, что $(zI - \widetilde{T})^{-1}$ также неограничен при $z \overline{\in} \overline{\Lambda}$, следовательно $C = \sigma(\widetilde{T})$. Так как спектры $\sigma(T)$ и $\sigma(\widetilde{T})$ покрывают всю плоскость, то операторы T и $\widetilde{T}$ неограничены. Теорема доказана.

Следующая теорема дает более точную характеристику спектров операторов T и $\widetilde{T}$. Для этого обозначим через $P_\sigma(A)$ и $C_\sigma(A)$ соответственно точечный и непрерывный спектры оператора A в смысле [13].

Теорема 2.2. *Пусть* $\sum (1 - |\zeta_n|) = \infty$, *тогда*

1. $$P_\sigma(\widetilde{T}) = \Lambda,\ C_\sigma(\widetilde{T}) = C \setminus \Lambda, \tag{2.11}$$

2. $$C_\sigma(T) \supset C \setminus \Lambda. \tag{2.12}$$

Если последовательность ζ_n такая, что

$$\sum_{k=1}^{\hat{m}} \left| M_p\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_m};\ \zeta_k\right) - M_p(0;\ \zeta_k) \right| \prod_{l=k+1}^{m} M_p\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_m};\ \zeta_l\right) + 1 \neq 0, \qquad (2.13)$$

где $\sum^m$ обозначает сумму с пропущенным m-ым членом, элементарный множитель Джрбашяна, определяющийся по (0.2), *то*

$$\bar{\zeta}_m \in C_\alpha\ (7). \qquad (2.14)$$

Таким образом, если (2.13) имеет место для всех натуральных m, то

$$C = C_\alpha\ (7). \qquad (2.15)$$

Замечание. Ряд (2.13) сходится в силу сходимости произведения М. М. Джрбашяна.

Доказательство. Соотношения (2.11) следуют из формулы сцепления (1.5) и того, что $\bar{\zeta}_n$ есть собственное значение оператора $T(\zeta_n)$.

2. Для $z \in \Lambda$ неограниченный оператор $(zI - T)^{-1}$ определен на векторах вида (2.9) с дополнительным условием

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k,\ s_k)_k = 0,$$

причем

$$s_k = (\bar{z}\, I - T^*(\zeta_k))^{-1}\, p(\zeta_k)\ B(z;\ k+1,\ \infty).$$

В силу леммы 2.2 и сходимости $B(z;\ k+1,\ \infty)$ последовательность $s = \{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ не принадлежит H, тогда как в теореме 2.1 получим, что область определения оператора $(zI - T)^{-1}$ плотна в H.

Докажем теперь (2.14). Решение уравнения $(\bar{\zeta}_m I - T)\, x = y$ имеет вид

$$x_n = \begin{cases} (\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_n))^{-1}\, y_n + \\ + (\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_n))^{-1}\, q(\zeta_n) \sum_{k=1}^{n-1} ((\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_k))^{-1}\, y_k,\ p(\zeta_k))_k \times \\ \times B(\bar{\zeta}_m;\ k+1,\ n),\ (n < m) \\ (\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_n))^{-1}\ y_n + (\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_n))^{-1} \times \\ \times \sum_{k=1}^{n-1}{}^{m} ((\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_k))^{-1}\, y_k,\ p(\zeta_k))_k\, B(\bar{\zeta}_m;\ k-1,\ n) - \\ + A(\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_n))^{-1}\, q(\zeta_n) \prod_{s=m+1}^{n-1} k(\zeta_s) \Big[1 + \\ + \sum_{k=1}^{n-1}{}^{m} ((\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_k))^{-1}\, q(\zeta_k),\ p(\zeta_k))_k\, B(\bar{\zeta}_m;\ k-1,\ n) \Big], \\ (n > m) \end{cases} \qquad (2.16)$$

где

$$A = (x_m,\ p(\zeta_m)).$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, в силу (2.13) сходится к некоторому отличному от нуля числу. Следовательно, если $y = 0$, то $A = 0$, иначе $x \in H$. В случае $y = 0$ x_m будет собственным вектором оператора $T(\zeta_m)$, тогда в силу общего вида собственного вектора (лемма 2.1) и $A = 0$ следует $x_m = 0$, таким образом $x = 0$.

Докажем плотность области определения оператора $(\overline{\zeta}_m I - T)^{-1}$. Действительно, этот оператор определен на векторах вида (см. (2.16))

$$y = (y_1,\ y_2, \cdots,\ y_N,\ 0,\ 0, \cdots),\ \forall N < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{N} (y_k,\ (\overline{\zeta}_m I - T^*(\zeta_k))^{-1} p(\zeta_k))_k B(\overline{\zeta}_m;\ k+1,\ \infty) = 0, \qquad (2.17)$$

и y_m взята из области значений оператора $(\overline{\zeta}_m I - T(\zeta_m))$, которая сама плотна в $H(\zeta_m)$ по лемме 2.1 (в рассматриваемом случае $p > 0$, поэтому лемма 2.1 применима). Следует отметить также, что вектор $x = (\overline{\zeta}_m I - T)^{-1} y$ в этом случае имеет вид

$$x = (x_1,\ x_2, \cdots,\ x_N,\ 0, \cdots),$$

а компонента x_n должна удовлетворять условию

$$(x_m,\ p(\zeta_m)) = 0.$$

Совокупность векторов (2.17), в силу леммы 2.2, будет плотна в H, теорема доказана.

Теорема 2.3. *Если*

$$\sum_{m=1}^{\infty} (1 - |\zeta_m|) < \infty,$$

то операторы T и $\overline{T}$ ограничены и

$$\sigma(T) = P_\sigma(T) \cup C_\sigma(T) = \Lambda = \sigma(\overline{T}) = P_\sigma(\overline{T}) \cup C_\sigma(\overline{T}),$$

$$P_\sigma(T) = P_\sigma(\overline{T}) = \Lambda.$$

Доказательство. Из (2.8), учитывая (0.5), мы получим

$$\|q(\zeta_n)\|^2_{H(\zeta_n)} \leqslant C(1 - |\zeta_n|), \qquad (2.18)$$

C не зависит от ζ_n. Отсюда $q \in H$ (из условия теоремы), аналогичным образом имеем также p, $\overline{q}$, $\widetilde{p} \in H$.

Из формул сцеплений (1.3), (1.5) и (2.18), а также из условия теоремы следует ограниченность операторов T и $\overline{T}$. Пусть $z \in \Lambda$, тогда с помощью (1.12)—(1.13), леммы 2.1 и условия теоремы нетрудно

показать ограниченность операторов $(zI-T)^{-1}$ и $(zI-\tilde{T})^{-1}$, т. е. $z\in\rho(T)$ и $z\in\rho(\tilde{T})$.

То, что $\zeta_m\in P_\sigma(\tilde{T})$ очевидно, а $\zeta_m\in P_\sigma(T)$ следует из (2.16) и условия теоремы. Таким образом

$$\sigma(T)=\overline{\Lambda}=\sigma(\tilde{T}),$$

а предельная точка множества Λ (если она имеется), очевидно, принадлежит непрерывному спектру $C_\sigma(T)$, $C_\sigma(\tilde{T})$. Теорема доказана.

§ 3. Введение новой метрики

Как было показано в § 2, операторы T и $\tilde{T}$ вообще неограничены. В этом параграфе покажем, что можно ввести новую метрику, в которой операторы окажутся ограниченными.

Напомним, что H есть пространство последовательностей $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\in H(\zeta_n)$ с нормой

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_n^2<\infty. \tag{3.1}$$

Будем рассматривать еще совокупность H_+ векторов $x\in H$, для которых сходится ряд

$$\|x\|_+^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_n^2(1-|\zeta_n|)^{-2p_n}<\infty. \tag{3.2}$$

Очевидно, что H_+ всюду плотно в H и является полным гильбертовым пространством относительно метрики

$$(x,\ y)_+=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k,\ y_k)_k\,(1-|\zeta_k|)^{-2p_k}.$$

Как нетрудно видеть, сопряженное к нему пространство будет обладать нормой

$$\|x\|_-^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_n^2(1-|\zeta_n|)^{2p_n}. \tag{3.3}$$

Это пространство обозначается через H_-. Из (3.1)—(3.3) видно, что

$$\|x\|_-\leqslant\|x\|\leqslant\|x\|_+,\ x\in H_+,$$

значит $H_+\subseteq H\subseteq H_-$.

Пространства H_+ и H_-, согласно Ю. М. Березанскому [12], называются соответственно пространствами с позитивной и негативной

метриками, или пространствами основных и обобщенных элементов гильбертова пространства H.

Теорема 3.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Каналовые векторы* q, p *и* $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ *узлов* $L = \bigvee_{n=1}^{\infty} L(\zeta_n)$ *и* $\tilde{L} = \bigvee_{n=1}^{\infty} L(\zeta_n)$, *соответственно, являются обобщенными элементами гильбертова пространства* H, *т. е. они принадлежат* H_-.

2. *Оператор* $\tilde{T}$ *узла* $\tilde{L}$ *ограничен в метрике* $(\cdot,\cdot)_+$ (*т. е.* $\tilde{T}$, *рассматриваемый как оператор из* H_+ *в* H_+, *будет ограниченным*).

3. *Оператор* T *узла* L *ограничен в метрике* $(\cdot,\cdot)_-$.

4. *В соответствующих метриках для их спектров имеют место соотношения:*

$$\sigma_+(\tilde{T}) = P\sigma_+(\tilde{T}) \cup C\sigma_+(\tilde{T}) = \bar{\Lambda} = \sigma_-(T) =$$

$$= P\sigma_-(T) \cup C\sigma_-(T);\ P\sigma_+(\tilde{T}) = P\sigma_-(T) = \Lambda.$$

Доказательство 1. Следует из (2.24) и сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|\zeta_n|)^{p+1} < \infty$$

(и из явных формул (1.4), (1.6) для p, q, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$),

2. Так как оператор $\tilde{T}$ есть сумма двух операторов, в силу леммы 2.1 (a) первый оператор ограничен. Рассмотрим второй оператор $\tilde{T}_2$:

$$\|\tilde{T}x\|_+^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |q(\zeta_n)|_n^2 \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (x_k,\ p(\zeta_k))_k \prod_{l=n+1}^{k-1} k(\zeta_l) \right|^2 (1-|\zeta_n|)^{-2pn}, \quad (3.4)$$

$$x = (x_1,\ x_2, \cdots) \in H_+.$$

Имеем

$$(1-|\zeta_n|)^{-2pn-p} \left| \sum_{k=n+1}^{N} (x_k,\ p(\zeta_k))_k \prod_{l=n+1}^{k-1} k(\zeta_l) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1-|\zeta_n|)^{-2pn-p} \sum_{k=n+1}^{N} \|x_k\|^2 (1-|\zeta_k|)^{-p} \sum_{k=n+1}^{N} \|p(\zeta_k)\|^2 (1-|\zeta_k|)^p \sum_{l=n+1}^{k-1} k^2(\zeta_l). \quad (3.5)$$

Учитывая, что

$$|\zeta_1| \leqslant |\zeta_2| \leqslant \cdots \leqslant |\zeta_n| \leqslant |\zeta_{n+1}| \leqslant \cdots \leqslant 1,$$

мы имеем

$$(1-|\zeta_n|)^{-2np-p} \sum_{k=n+1}^{N} \|x_k\|^2 (1-|\zeta_k|)^{-p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \|x_k\|^2 (1-|\zeta_k|)^{-2p(n+1)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \|x_k\|^2 (1-|\zeta_k|)^{-2pk} \leqslant \|x\|_+^2. \qquad (3.6)$$

В силу сходимости произведения $\prod_{l=1}^{\infty} k(\zeta_l)$ и из (3.4)—(3.6), имеем

$$\|\widetilde{T}x\|_+^2 \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} |q(\zeta_n)|^2 (1-|\zeta_n|)^p \sum_{k=1}^{\infty} \|p(\zeta_k)\|^2 (1-|\zeta_k|)^p \cdot \|x\|_+^2.$$

Ряды в правой части сходятся в силу (2.8), значит $\widetilde{T}$ ограничен.

Доказательства утверждений 3 и 4 аналогичны доказательству утверждения 2 и теоремы 2.3.

§ 4. Предельный множитель

Из (0.5) и (0.4) следует, что предельный множитель $S(z)$ с точностью до постоянного множителя представляется в виде

$$S(z) = \exp\left\{\frac{2p}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho(1-\rho)^{p-1} \log|F(\rho e^{i\vartheta})| \sum_{k=1}^{p+1} \frac{z\rho e^{-i\vartheta}}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^k}\, d\rho d\vartheta\right\}. \qquad (4.1)$$

Для краткости введем обозначение

$$G(\rho, \vartheta) = \frac{2p\rho}{\pi}(1-\rho^2)^{p-1} \log|F(\rho e^{i\vartheta})|. \qquad (4.2)$$

Множитель

$$S(z) = \exp\left\{\int_0^1\int_0^{2\pi} G(\rho, \vartheta) \frac{z\rho e^{-i\vartheta}}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^k}\, d\rho d\vartheta\right\} \qquad (4.3)$$

имеет реализацию

$$H_k = L^2(R_k, [0, 1]\times[0, 2\pi]); \; E = C_1,$$

$$(A_k f)(\rho, \vartheta) = B(\rho, \vartheta) f(\rho, v) + G^{1/2}(\rho, v) \int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} (f(x, t), p_0)_{R^k} q_0 \overline{G}^{1/2}(x, t)\, dx dt, \qquad (4.4)$$

$$q_k(\rho, \vartheta) = G^{1/2}(\rho, \vartheta)\, q_0,\ p_k(\rho, \vartheta) = G^{1/2}(\rho, \vartheta)\, p_0;\ k_k = 1, \qquad (4.5)$$

$$B(\rho, \vartheta) = \rho e^{-i\vartheta} \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots 1 \\ 0 & 1 \cdots 1 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ & \\ 0 & 0 \cdot \ \cdot 1 \end{pmatrix},\ q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix},\ p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.6)$$

Этот узел будем обозначать через S_k. Эта реализация несущественно отличается от соответствующей реализации, полученной в [6]. Это отличие вызвано различными определениями передаточной функции (см. [6] и наше определение 1).

Имеет место утверждение.

Предложение 4.1. *Предельный множитель $S(z)$ имеет реализацию*

$$S = S_1 \vee S_2 \vee \cdots \vee S_{p+1},$$

где S_k определены по (4.4)—(4.6). *Каналовые векторы являются обычными элементами основного гильбертова пространства H узла S. Оператор (основной) A ограничен, его спектр составляет весь замкнутый единичный круг.*

Доказательство. То, что каналовые векторы принадлежат пространству H, следует из сходимости интеграла (см. [5], стр. 28)

$$\frac{2p}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2)^{p-1} |\log |F(\rho e^{i\vartheta})|\, |\rho d\rho d\vartheta| < \infty.$$

Остальные утверждения непосредственно следуют из (4.4)—(4.6).

Пусть $F(z) \in D_p$ и не имеет особенности в нуле, тогда она допускает представление

$$F(z) = C z^n \frac{\pi_p(z;\ a_k)}{\pi_p(z;\ b_k)} S(z).$$

Отсюда и из полученных выше результатов имеем: любая функция класса D_p, не имеющая особенности в нуле обладает (вообще говоря неограниченной) реализацией, однако в основное пространство можно ввести новую метрику, в которой основной оператор становится ограниченным.

§ 5. Об устойчивости операторов, реализующих элементарные множители М. М. Джрбашяна

Будем говорить, что оператор T сильно устойчивый, если его степени T^n сильно стремятся к нулю при $n \to \infty$. Инвариантное подпространство оператора T, на котором T^n сильно стремится к нулю при $n \to \infty$, будем называть подпространством сильной устойчивости.

1°. Как мы уже видели оператор T, реализующий элементарный множитель $M_\rho(z;\zeta)$ класса D_ρ, имеет спектр, сосредоточенный в одной точке ζ. Так как $|\zeta|<1$, то согласно теореме Рота [11], он подобен некоторому истинному сжатию A (т. е. $\|A\|<1$). Следовательно T сильно устойчив.

2°. Рассмотрим этот вопрос для самого простого не неванлинновского класса N_1.

Как известно, элементарный множитель $A_1(z;\zeta)$ класса N_1 имеет вид (см. [3], [1])

$$A_1(z,\zeta)=\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}\,\frac{|\zeta|}{\zeta}\,\tilde A_1(z;\zeta), \tag{5.1}$$

где

$$\tilde A_1(z;\zeta)=\exp\left(1-|\zeta|-2\bar\zeta z\log\frac{|\zeta|-\zeta z}{1-\bar\zeta z}\right). \tag{5.2}$$

Как показано в [1], множитель $\tilde A_1(z,\zeta)$ имеет реализацию

$$H=L^2(0,l),\quad E=C_1,$$

$$(Tf)(x)=\bar\zeta(\exp cx)f(x)+2c\bar\zeta\int_0^x\exp(x-t)f(t)\,dt, \tag{5.3}$$

$$q=q_0\exp x;\quad p=p_0\exp(l-x),\quad k=\exp l, \tag{5.4}$$

где

$$l=1-|\zeta|,\ q_0\bar p_0=2c\bar\zeta,\quad c=-(1-|\zeta|)^{-1}\log|\zeta|. \tag{5.5}$$

Для простоты мы предполагаем, что $\zeta>0$, тогда спектром оператора T вида (5.3) будет отрезок $[\zeta, 1]$.

Предложение 5.1. 1) *Пусть* $\zeta\geqslant\frac{1}{2}$ *и* $f(x)\geqslant 0$ (*причем не почти всюду* $=0$). *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\|T^nf\|=\infty.$$

2) *Имеет место оценка для степеней оператора*

$$\|T^n\|\leqslant Mn^{3/2}$$

M — *некоторая постоянная.*

Доказательство. 1. Из (5.5) имеем

$\zeta\exp cx\geqslant cx+b$, $\zeta\exp(x-t)\geqslant 1$, где $b=1+\ln\zeta$.

Далее

$$(T^nf)(x)\geqslant(T_1^nf)(x), \tag{5.6}$$

где

$$(T_1f)(x)=(cx+b)f(x)+c\int_0^x f(t)\,dt,$$

$$(T_1^n f)(x) = (cx+b)^n f(x) + nc\,(cx+b)^{n-1} \int_0^x f(t)\,dt. \tag{5.7}$$

Из (5.6)—(5.7) следует утверждение 1).

2. Так как

$$\zeta \exp cx \leqslant x + \zeta,\ c\zeta \leqslant 1,$$

то имеем

$$\|T^n f\| \leqslant \|T^n |f|\| \leqslant \|T_2^n |f|\|, \tag{5.8}$$

где

$$(T_2 f)(x) = (x+\zeta) f(x) + 2\int_0^x f(t)\,dt,$$

$$(T_2^n f)(x) = (x+\zeta)^n f(x) + n(n+1)(x+\zeta)^{n-1} \int_0^x f(t)\,dt -$$

$$- n(n-1)(x+\zeta)^{n-1} \int_0^x (\zeta + t) f(t)\,dt. \tag{5.9}$$

Из (5.8)—(5.9) следует утверждение 2).

Покажем, что оператор T обладает подпространством сильной устойчивости.

Резольвента оператора T дается следующей формулой [7]:

$$[(\lambda I - T)^{-1} f](x) = \frac{f(x)}{\lambda - \alpha(x)} + \frac{e^x S(x, \lambda)}{\lambda - \alpha(x)} 2\zeta c \int_0^x \frac{S^{-1}(t, \lambda) e^{-t} f(t)}{\lambda - \alpha(t)}\,dt. \tag{5.10}$$

Пусть $\lambda = \xi + i\eta$, тогда

$$|S(x, \lambda)| = \exp\left\{ 2\zeta c \int_0^x \frac{\xi - \alpha(t)}{[\xi - \alpha(t)]^2 + \eta^2}\,dt \right\},$$

отсюда

$$|S(x, \lambda)| \leqslant \exp(c/|\eta|),\ c \text{ — постоянная.} \tag{5.11}$$

Такая же оценка верна и для $|S^{-1}(x, \lambda)|$. Так как $\alpha(x)$ — вещественна то

$$|\lambda - \alpha(x)| \geqslant |\eta|. \tag{5.12}$$

Из (5.10)—(5.12) имеем

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leqslant \frac{\exp(A/|\eta|)}{|\eta|^2} \leqslant \exp(B/|\eta|^2).$$

A, B — некоторые постоянные.

Значит, для малых δ

$$M(\delta) = \sup_{|\operatorname{Im}\lambda|=|\eta|>\delta} \|(\lambda I - T)^{-1}\| \leqslant \exp(c'/\delta^2)$$

и

$$\int \ln \ln M(\delta)\, d\delta < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Любича—Мацаева [10], T является S-оператором, поэтому для любого сегмента $\Delta \subset [\xi, 1] = \sigma(T)$ существует инвариантное (спектральное) подпространство $L(\Delta)$ относительно T такое, что $T(\Delta) = T|L(\Delta)$ принимает Δ за своим спектром. Если Δ строго лежит в единичном круге, то $T(\Delta)$ подобен истинному сжатию [11]. Следовательно, подпространство $L(\Delta)$ есть подпространство сильной устойчивости.

Таким образом, доказана

Теорема 5.1. *Оператор T вида* (5.3) *не является сильно устойчивым, но обладает континуумом инвариантных подпространств сильной устойчивости.*

В заключение приношу искреннюю благодарность проф. М. С. Лившицу за постановку задачи и внимание к работе.

Харьковский государственный
университет

Поступила 15.IV.1975

ԽՈ ԿՈՆԳ ԽԱՆ. Որոշ մերոմորֆ ֆունկցիաների դասերն ռեալիզացնող օպերատորների հատկություններ *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքը նվիրված է Մ. Մ. Ջրբաշյանի D_p ($p=0, 1, 2,\ldots$) դասերի ռեալիզացնող օպերատորների սպեկտրալ և ամբողջականության հարցերին տարբեր մետրիկաներում։

DO CONG KHANH. *Operators realizising some classes of meromorphic functions* (summary)

Spectrum properties and problems of continuity of operators realizising functions of classes D_p ($p=0, 1, 2,\cdots$) of M. M. Jrbashian are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Лившиц.* Линейные дискретные системы и их связь с теорией факторизации мероморфных функций М. М. Джрбашяна, ДАН СССР, 219, № 4, 1974.
2. *М. С. Лившиц.* Операторы, колебания, волны, Изд. „Наука", М., 1966.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления в комплексной области, Изд. „Наука", М., 1966.
4. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации мероморфных функций в круге, Матем. сб. 79 (121), 4 (5), 1969.
5. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. инст. матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
6. *Л. Х. Меграбян.* Реализация некоторых классов мероморфных функций в теории систем с дискретным временем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., X, № 6, 1975, 560—580.

7. *М. С. Бродский, М. С. Лившиц.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН, 13, 1, 1958, 3—85.
8. *М. С. Бродский.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов, Изд. „Наука", М., 1969.
9. *В. М. Бродский.* Об операторных узлах и их характеристических функциях, ДАН СССР, 191, № 1, 1971.
10. *Ю. И. Любич, В. И. Мацаев.* К спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве, ДАН СССР, 131, № 1, 1956.
11. *G. Rota.* On models for linear operators, Comm. Pure Appl. Math, 13, 1960, 469—472.
12. *Ю. М. Березанский.* Пространства с негативной метрикой, УМН, 18, вып. 1, 1963.
13. *К. Иосида.* Функциональный анализ, Изд. „Мир", 1967.