ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

С. К. АФЯН

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА—ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Введение

Рассмотрим в круге $|z| \leqslant 1$ $(z = x + iy)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar z^2} + \frac{\partial}{\partial \bar z}\left[q(z)\,\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\right] + a_1(z)\frac{\partial u}{\partial z} + a_2(z)\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z} + a_3(z)\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z} + a_4(z)\frac{\partial \bar u}{\partial z} +$$

$$+ a_5(z)\,u + a_6(z)\,\bar u = h(z), \tag{1}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$u(z) = u_1(x, y) + iu_2(x, y)$$

— искомая функция, $q(z)$, $h(z)$, $a_1(z)$, $a_2(z)$, $\cdots$, $a_6(z)$ — заданные функции класса $C_\alpha^1(|z| \leqslant 1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и $q(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $|q(z)| < 1$ при $|z| < 1$, $|q(z)| = 1$ при $|z| = 1$;

2) $1 - q(z)\,\overline{q(z)} = (1 - z\bar z)^\mu\, q_1(z)$, где $q_1(z) \neq 0$ при $|z| = 1$

и $0 < \mu \leqslant 1$.

Уравнение (1) есть комплексная запись некоторой системы дифференциальных уравнений, которая эллиптична внутри круга $|z| < 1$ и вырождается на всей границе $|z| = 1$.

В работе [3] изучена задача Римана—Гильберта в том частном случае, когда $q(z)$ — аналитическая в $|z| < 1$ функция, а функции $h(z)$ $a_1(z)$, $a_2(z)$, $\cdots$, $a_6(z)$ — тождественные нули.

В настоящей работе рассматривается краевая задача Римана — Гильберта: найти решение $u(z)$ уравнения (1) в классе $C_\alpha^1(|z| \leqslant 1) \cap$ $\cap\, C^2(|z| < 1)$, удовлетворяющее краевому условию

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\lambda(z)}\, u(z)\right] = g(z) \text{ при } |z| = 1, \tag{2}$$

где $\lambda(z)$ и $g(z)$ — заданные функции класса $C_\alpha^1(|z| = 1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, причем $\lambda(z) \neq 0$ при любом z.

Введем обозначения

$$m=\frac{1}{2\pi}\,[\arg q(z)]_{|z|=1},\quad n=\frac{1}{2\pi}\,[\arg \lambda(z)]_{|z|=1}, \tag{3}$$

где символ $[\ \ ]_{|z|=1}$ обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при однократном обходе единичной окружности в направлении против часовой стрелки.

Не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда краевое условие (2) имеет следующий простой вид (см. [1]):

$$\mathrm{Re}\,[z^{-n}\,u(z)]=0 \text{ при } |z|=1. \tag{2*}$$

Рассматриваемую задачу будем коротко называть задачей (1)—(2*).

Определение. Индексом $\varkappa$ задачи (1) — (2*) называется разность k_0-k_1, где k_0 — число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи ($h(z)=0$), а k_1 — число линейно независимых условий, при которых разрешима неоднородная задача.

В § 1 задача (1)—(2*) приведена к операторному уравнению вида $u+Au=f$ с вполне непрерывным оператором A (в том или ином пространстве, в зависимости от чисел m и n).

В § 2 получена оценка для индекса задачи (1)—(2*).

§ 1. Приведение задачи (1)—(2*) к уравнению вида $u+Au=f$ с вполне непрерывным оператором A

Рассмотрим сначала одну вспомогательную краевую задачу: найти аналитическую в круге $|z|<1$ функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую условию

$$\Phi(z)-q(z)\,\overline{\Phi(z)}=F(z)-q(z)\,\overline{F(z)} \text{ при } |z|=1, \tag{4}$$

где $F(z)$ — заданная на границе $|z|=1$ функция класса C_α ($|z|=1$), $0<\alpha\leqslant 1$.

Эта задача легко решается с помощью сведения ее к известной задаче сопряжения. В самом деле, вводя функцию

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z) & \text{при } |z|<1\\ \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar z}\right)} & \text{при } |z|>1,\end{cases} \tag{5}$$

краевое условие (4) примет вид

$$\Omega^+(z)-q(z)\,\Omega^-(z)=F(z)-q(z)\,\overline{F(z)} \text{ при } |z|=1. \tag{6}$$

Из (5) следует, что

$$\overline{\Omega\left(\frac{1}{\bar z}\right)}=\Omega(z) \text{ при } |z|=1. \tag{7}$$

С другой стороны, если кусочно аналитическая и ограниченная на бесконечности функция $\Omega(z)$ является решением задачи (6) — (7), то функция $\Omega(z) = \Omega(z)$ $(|z| < 1)$ является решением краевой задачи (4). Следовательно краевые задачи (4) и (6) — (7) эквивалентны. Решения задачи (6) — (7) получим следующим образом: пусть $\Omega(z)$ есть решение задачи (6), тогда в силу условия $|q(z)| = 1$ при $|z| = 1$ легко получаем, что функция $\Omega_*(z) = \overline{\Omega\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$ также является решением задачи (6), а тогда функция $\frac{1}{2}[\Omega(z) + \Omega_*(z)]$ будет, очевидно, решением задачи (6) — (7). С другой стороны любое решение задачи (6) — (7) можно написать в виде $\Omega(z) = \frac{1}{2}[\Omega(z) + \Omega_*(z)]$, так как по условию (7) $\Omega_*(z) = \Omega(z)$. Следовательно, любое решение $\Phi(z)$ задачи (4) дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}[\Omega(z) + \Omega_*(z)] \quad (|z| < 1), \tag{8}$$

где $\Omega(z)$ — произвольное решение краевой задачи (6).

Задача (6) полностью решена в монографии [2]. Используя решение задачи (6) и формулу (8), получим следующую лемму.

Лемма 1. *При $m \geqslant -1$ общее решение задачи* (4) *дается формулой*

$$\Phi(z) = \begin{cases} BF + X(z)\sum\limits_{\nu=0}^{m} c_\nu z^\nu & \text{при } m \geqslant 0 \\ BF & \text{при } m = -1 \end{cases} \quad (|z| \leqslant 1), \tag{9}$$

где

$$BF = \frac{X(z)}{4\pi i}\int\limits_{|t|=1}\left[\frac{F(t) - q(t)\overline{F(t)}}{X^*(t)(t-z)} + z^{m+1}\frac{\overline{F(t)} - \overline{q(t)}F(t)}{\overline{X^+(t)}(t-z)t}\right]dt, \tag{10}$$

$$X(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\ln[t^{-m}q(t)]}{t-z}dt\right\} \tag{11}$$

и коэффициенты $c_0, c_1, \cdots, c_m$ удовлетворяют условию

$$c_{m-\nu} = \bar c_\nu, \quad \nu = 0, 1, \cdots, m. \tag{12}$$

При $m < -1$ задача (4) *имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{|t|=1}\frac{t^\nu[F(t) - q(t)\overline{F(t)}]}{X^+(t)}dt = 0, \quad \nu = 0, 1, \cdots, -m-2. \tag{13}$$

При выполнении условия (13) *решение дается формулой*

$$\Phi(z) = BF, \ |z| < 1. \tag{14}$$

Лемма 2. *Если функция* $u(z)$ *класса* $C^1_\alpha(|z| \leqslant 1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ *равна нулю на границе* $|z| = 1$, *то функция* $\frac{u(z)}{1-|z|}$ *принадлежит классу* $C_\alpha(|z| \leqslant 1)$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы в кольце $r_0 \leqslant |z| \leqslant 1$. Вводя полярные координаты r и φ $(z = re^{i\varphi})$, заметим, что функция $v(r, \varphi) = u(re^{i\varphi})$ принадлежит классу $C^1_\alpha(\Pi)$ и $v(1, \varphi) = 0$; где Π—прямоугольник $[r_0 \leqslant r \leqslant 1; \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi]$. Тем самым доказательство леммы сводится к доказательству принадлежности функции $(1-r)^{-1} v(r, \varphi)$ классу $C_\alpha(\Pi)$. Для этого достаточно проверить, что

$$|(1-r_1)^{-1} v(r_1, \varphi) - (1-r_2)^{-1} v(r_2, \varphi)| \leqslant C \cdot |r_1 - r_2|^\alpha \tag{15}$$

и

$$|(1-r)^{-1} [v(r, \varphi_1) - v(r, \varphi_2)]| \leqslant C \, |\varphi_1 - \varphi_2|^\alpha, \tag{16}$$

где C — постоянная.

Поскольку $v(1, \varphi) = 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и $v(r, \varphi) \in C^1_\alpha(\Pi)$, то

$$\int_0^\varphi \lim_{r \to 1} \frac{\partial v(r, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi = \lim_{r \to 1} \int_0^\varphi \frac{\partial v(r, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi = \lim_{r \to 1} [v(r, \varphi) - v(r, 0)] =$$

$$= v(1, \varphi) - v(1, 0) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по φ, получим $\lim\limits_{r \to 1} \frac{\partial v(r, \varphi)}{\partial \varphi} = 0$ и, тем самым, $\frac{\partial v(1, \varphi)}{\partial \varphi} = 0$ (в граничных точках производные определяются как пределы одноименных производных внутри области).

Сначала докажем неравенство (16). В случае $|\varphi_1 - \varphi_2| \leqslant 1 - r$, используя равенство $\frac{\partial v(1, \varphi)}{\partial \varphi} = 0$, теорему Лагранжа и условие Гельдера, получим

$$|(1-r)^{-1} [v(r, \varphi_1) - v(r, \varphi_2)]| = (1-r)^{-1} \left| \frac{\partial v(r, \varphi^*)}{\partial \varphi} (\varphi_1 - \varphi_2) \right| =$$

$$= (1-r)^{-1} \left| \frac{\partial v(r, \varphi^*)}{\partial \varphi} - \frac{\partial v(1, \varphi^*)}{\partial \varphi} \right| \cdot |\varphi_1 - \varphi_2| \leqslant C(1-r)^{\alpha-1} |\varphi_1 - \varphi_2| \leqslant$$

$$\leqslant C \, |\varphi_1 - \varphi_2|^\alpha.$$

В случае же $|\varphi_1 - \varphi_2| > 1 - r$ имеем

$$(1-r)^{-1} v(r, \varphi_1) = (1-r)^{-1} [v(r, \varphi_1) - v(1, \varphi_1)] =$$

$$= -\frac{\partial v(r_2^*, \varphi_1)}{\partial r}, \ r < r_1^* < 1 \tag{17}$$

и аналогично

$$(1-r)^{-1} v(r, \varphi_2) = -\frac{\partial v(r_2^*, \varphi_2)}{\partial r},\ r < r_2^* < 1. \qquad (18)$$

В силу (17) и (18) будем иметь

$$|(1-r)^{-1}[v(r, \varphi_1) - v(r, \varphi_2)]| = \left|\frac{\partial v(r_1^*, \varphi_1)}{\partial r} - \frac{\partial v(r_2^*, \varphi_2)}{\partial r}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C[(r_1^* - r_2^*)^2 + (\varphi_1 - \varphi_2)^2]^{\alpha/2} \leqslant C[(1-r)^2 +$$

$$+ (\varphi_1 - \varphi_2)^2]^{\alpha/2} < C \cdot 2^{\alpha/2} |\varphi_1 - \varphi_2|^{\alpha}.$$

Следовательно, неравенство (16) доказано.

Теперь докажем неравенство (15).

Случай I. Пусть $r_1 - r_2 \leqslant 1 - r_1$, $r_1 > r_2$, тогда

$$|(1-r_1)^{-1} v(r_1, \varphi) - (1-r_2)^{-1} v(r_2, \varphi)| = \left|\frac{\partial}{\partial r}[(1-r)^{-1} v(r, \varphi)]_{r=r^*} \times\right.$$

$$\left.\times (r_1 - r_2)\right| = \left|(1-r^*)^{-1}\frac{\partial v(r^*, \varphi)}{\partial r} + (1-r^*)^{-2} v(r^*, \varphi)\right|(r_1 - r_2) =$$

$$= \left|\frac{\partial v(r^*, \varphi)}{\partial r} - \frac{v(1, \varphi) - v(r^*, \varphi)}{1 - r^*}\right|(1-r^*)^{-1}(r_1 - r_2) =$$

$$= \left|\frac{\partial v(r^*, \varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v(r^{**}, \varphi)}{\partial r}\right|(1-r^*)^{-1}(r_1 - r_2) \leqslant$$

$$\leqslant C|r^* - r^{**}|^{\alpha}(1-r^*)^{-1}(r_1 - r_2) \leqslant$$

$$\leqslant C(1-r^*)^{\alpha}(1-r^*)^{-1}(r_1 - r_2) \leqslant C(r_1 - r_2)^{\alpha},$$

где $r_2 < r^* < r_1$, $r^* < r^{**} < 1$.

Случай II. $r_1 - r_2 > 1 - r_1$. В силу (17) и (18) имеем

$$|(1-r_1)^{-1} v(r_1, \varphi) - (1-r_2)^{-1} v(r_2, \varphi)| = \left|-\frac{\partial v(r_1^*, \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial v(r_2^*, \varphi)}{\partial r}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C|r_2^* - r_1^*|^{\alpha} \leqslant C(1-r_2)^{\alpha} = C(r_1 - r_2 + 1 - r_1)^{\alpha} < 2C(r_1 - r_2)^{\alpha}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если функция $u(z)$ принадлежит классу $C_\alpha^1(|z| \leqslant 1)$, то имеет место равенство*

$$Ku = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{1}{\zeta - z}\left(a_1\frac{\partial u}{\partial \zeta} + a_2\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\zeta}} + a_3\frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} + a_4\frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} + a_5 u + a_6 \bar{u}\right)d\xi d\eta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{1}{\zeta - z}\left[\left(\frac{\partial a_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial a_3}{\partial \bar{\zeta}} - a_5\right)u + \left(\frac{\partial a_2}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial a_4}{\partial \zeta} - a_6\right)\bar{u}\right]d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{a_1(\zeta)\,u(\zeta)+a_4(\zeta)\,\overline{u(\zeta)}-a_1(z)\,u(z)-a_4(z)\,\overline{u(z)}}{(\zeta-z)^2}\,d\xi d\eta\,+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{a_1u+a_4\bar{u}}{(\zeta-z)\,\zeta^2}\,d\zeta+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{a_2u+a_3u}{\zeta-z}\,d\zeta-a_2(z)\,\overline{u(z)}\,-$$

$$-a_3(z)\,u(z),\quad \zeta=\xi+i\eta. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть G_ε есть область, получившаяся после удаления из круга $|\zeta|<1$ круг $|\zeta-z|<\varepsilon$, а Γ_ε — окружность $|\zeta-z|=\varepsilon$, тогда

$$Ku=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{1}{\zeta-z}\left(a_1\frac{\partial u}{\partial\zeta}+a_2\frac{\partial u}{\partial\zeta}+a_3\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}}+a_4\frac{\partial u}{\partial\zeta}\,a_5u+a_6\bar{u}\right)d\xi d\eta=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{1}{\zeta-z}\left[\left(\frac{\partial a_1}{\partial\zeta}+\frac{\partial a_3}{\partial\bar{\zeta}}-a_5\right)u+\left(\frac{\partial a_2}{\partial\bar{\zeta}}+\frac{\partial a_4}{\partial\zeta}-a_6\right)\bar{u}\right]d\xi d\eta\,+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{a_1u+a_4\bar{u}}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{a_2\bar{u}+a_3u}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta\,+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{a_1u+a_4\bar{u}}{(\zeta-z)^2}\,d\xi d\eta. \tag{20}$$

В силу известных формул (см. [1], ст. 41) будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{a_1u+a_4\bar{u}}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{a_1u+a_4\bar{u}}{\zeta-z}\,\overline{d\zeta}\,+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{a_1u+a_4\bar{u}}{\zeta-z}\,\overline{d\zeta}, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{a_2\bar{u}+a_3u}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{a_2\bar{u}+a_3u}{\zeta-z}\,d\zeta\,-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{a_2\bar{u}+a_3u}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{22}$$

где обе окружности обходятся по направлению против часовой стрелки. Для вычисления пределов интегралов по Γ_ε заметим, что если $f(z)\in C_\alpha(|z|\leqslant 1)$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\overline{d\zeta}=0 \text{ и } \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=f(z). \tag{23}$$

Действительно, поскольку

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\overline{d\zeta}}{\zeta-z}=0 \text{ и } \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=1,$$

то

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\overline{d\zeta}\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\overline{d\zeta}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{C\cdot|\zeta-z|^\alpha}{|\zeta-z|}|\overline{d\zeta}|=C\cdot\varepsilon^\alpha$$

и

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(z)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{C\,|\zeta-z|^\alpha}{|\zeta-z|}\,|d\zeta|=C\cdot\varepsilon^\alpha,$$

т. е. имеет место (23). В силу (20)—(23) получаем (19).

Лемма 4. *Операторы S и R, определяемые формулами*

$$Sf=(1-q\overline{q})^{-1}\,(Kf-q\overline{Kf}-BKf+q\,\overline{BKf}), \tag{24}$$

$$Rf=(1-q\overline{q})^{-1}\,(Tf-q\,\overline{Tf}-BTf+q\overline{BTf}), \tag{25}$$

линейны относительно поля вещественных чисел и отображают соответственно пространства $C_\alpha^1\,(|z|\leqslant 1)$ и $C_\alpha\,(|z|\leqslant 1)$ в пространство $C_\alpha\,(|z|\leqslant 1)$ (под значениями Sf и Rf в граничных точках понимаются пределы соответствующих величин изнутри области, где

$$Tf=-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi d\eta, \tag{26}$$

а операторы B и K определены формулами (10) *и* (19).

Доказательство. Пусть $f\in C_\alpha^1\,(|z|\leqslant 1)$, тогда $Kf\in C_\alpha^1\,(|z|\leqslant 1)$ (см. [1], стр. 73). Далее, используя известное свойство интеграла типа Коши (см., например, [1], стр. 38), легко убедиться, что $BKf\in C_\alpha^1(|z|\leqslant 1)$. Следовательно, второй множитель в правой части (24) принадлежит классу $C_\alpha^1\,(|z|\leqslant 1)$. С другой стороны, этот же множитель равен нулю на границе $|z|=1$, поскольку BKf является решением краевой задачи (4), если в качестве функции F взята функция Kf. Отсюда, в силу леммы 2, получим $Sf\in C_\alpha\,(|z|\leqslant 1)$, потому что $q_1(z)=(1-\overline{z}z)^{-\mu}[1-q\,\overline{(z)}\,q\,(z)]\neq 0$ по предположению и принадлежит классу $C_\alpha\,(|z|\leqslant 1)$, в силу той же леммы. Аналогично доказывается утверждение, относящееся к оператору R. Линейность операторов S и R очевидна.

Перейдем теперь к рассмотрению следующих четырех возможных случаев:

Случай I: $m\geqslant-1$, $n\geqslant 0$. Ограничимся случаем, когда $m>-1$ — нечетное число. Если m — четное число или $m=-1$, все утверждения можно получить аналогичными рассуждениями.

Пусть функция $u(z)$ есть произвольное решение задачи (1)—(2*). Тогда, с учетом (19) из (1), будем иметь (см. [1])

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z}+q(z)\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}=Ku+Th+\Psi(z), \tag{27}$$

где $\Psi(z)$ — некоторая аналитическая в круге $|z|<1$ функция, принадлежащая, очевидно, классу $C_\alpha(|z|\leqslant 1)$. Перейдя в (27) к комплексно сопряженным величинам, получим

$$\frac{\partial \bar u}{\partial z}+\bar q(z)\frac{\partial u}{\partial z}=\overline{Ku}+\overline{Th}+\overline{\Psi(z)}, \tag{28}$$

а из (27) и (28)

$$[1-q(z)\overline{q(z)}]\frac{\partial u}{\partial \bar z}=Ku-q(z)\overline{Ku}+Th-q(z)\overline{Th}+\Psi(z)-q(z)\overline{\Psi(z)}. \tag{29}$$

Поскольку левая часть (29) стремится к нулю при $|z|\to 1$, будем иметь

$$\Psi(z)-q(z)\overline{\Psi(z)}=-Ku+q(z)\overline{Ku}-Th+q(z)\overline{Th} \text{ при } |z|=1, \tag{30}$$

т. е. $\Psi(z)$ будет являться решением краевой задачи (4) при $F(z)=(-Ku-Th)_{|z|=1}$. Тогда согласно лемме 1

$$\Psi(z)=-BKu-BTh+X(z)\sum_{\nu=0}^{m}c_\nu z^\nu, \tag{31}$$

где $c_0, c_1, \cdots, c_m$ — некоторые комплексные числа, удовлетворяющие условию (12). Подставляя (31) в (27) и учитывая (24) и (25), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z}=Su+Rh+\sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu h_\nu(z), \tag{32}$$

где

$$\alpha_\nu=\operatorname{Re}c_\nu \text{ при } 0\leqslant\nu\leqslant\frac{m-1}{2};\ \alpha_\nu=\operatorname{Im}c_{\nu-\frac{m+1}{2}} \text{ при } \frac{m+1}{2}\leqslant\nu\leqslant m, \tag{33}$$

$$h_\nu(z)=\begin{cases}[X(z)(z^\nu+z^{m-\nu})-q(z)\bar X(z)(\bar z^\nu+\bar z^{m-\nu})][1-q(z)\overline{q(z)}]^{-1} \\ \qquad\text{при } 0\leqslant\nu\leqslant\frac{m-1}{2} \\ [iX(z)(z^{\nu-\frac{m+1}{2}}-z^{\frac{3m+1}{2}-\nu})+iq(z)\bar X(z)(\bar z^{\nu-\frac{m+1}{2}}- \\ -\bar z^{\frac{3m+1}{2}-\nu})](1-q\bar q)^{-1} \text{ при } \frac{m+1}{2}\leqslant\nu\leqslant m.\end{cases} \tag{34}$$

Из (32) получим

$$u(z) = TSu + TRh + TH + \varphi(z), \tag{35}$$

где

$$H(z) = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu h_\nu(z) = (1-q\bar{q})^{-1}\left(X(z)\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu z^\nu - q\bar{X}(z)\sum_{\nu=0}^{m}\bar{c}_\nu \bar{z}^\nu\right) \tag{36}$$

и $\varphi(z)$ — некоторая аналитическая в круге $|z|<1$ функция.

Покажем, что она принадлежит классу $C^1_\alpha(|z|\leqslant 1)$. В самом деле, поскольку функция $X(z)\sum\limits_{\nu=0}^{m} c_\nu z^\nu$ является решением однородной краевой задачи (4), то второй множитель в (36) равен нулю при $|z|=1$. Поэтому в силу леммы 2 $H(z)\in C_\alpha(|z|\leqslant 1)$.

Далее, в силу леммы 4 $Su\in C_\alpha(|z|\leqslant 1)$. Тогда из (35) следует, что $\varphi(z)\in C^1_\alpha(|z|\leqslant 1)$.

Теперь представим функцию $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) - \frac{z^{2n+1}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{Su}{1-z\bar{\zeta}}\,d\xi d\eta - \frac{z^{2n+1}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{Rh\,d\xi d\eta}{1-z\bar{\zeta}} -$$

$$-\frac{z^{2n+1}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{H\,d\xi d\eta}{1-z\bar{\zeta}}, \tag{37}$$

где $\varphi_0(z)$ — новая искомая аналитическая в круге $|z|<1$ функция. Подставляя выражение (37) в (35), получим, что функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению

$$u(z) - P_n Su = \varphi_0(z) + P_n Rh + P_n H, \tag{38}$$

где

$$P_n f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} + z^{2n+1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}\right]d\xi d\eta. \tag{39}$$

В силу свойства оператора (39) и леммы 4 линейный оператор $Af = P_n Sf$ вполне непрерывен в пространстве $C^1_\alpha(|z|\leqslant 1)$ и отображает его в себя [1].

Легко видеть, что для любой функции f из класса $C^1_\alpha(|z|\leqslant 1)$ выполняется равенство $\operatorname{Re}(z^{-n}P_n f)=0$ при $|z|=1$. Поэтому в силу (2*) из (38) следует

$$\operatorname{Re}[z^{-n}\varphi_0(z)] = 0 \text{ при } |z|=1. \tag{40}$$

Подставляя в (38) вместо $\varphi_0(z)$ решение задачи Римана—Гильберта (40) получим

$$u - P_n Su = P_n Rh + \sum_{\nu=1}^{\sigma}\gamma_\nu H_\nu(z),\quad \sigma = m+2n+2, \tag{41}$$

где

$$H_\nu(z)=\begin{cases} P_n h_{\nu-1} & \text{при } 1\leqslant\nu\leqslant m+1\\ z^{\nu-m-2}-z^{2-\nu} & \text{при } m+2\leqslant\nu\leqslant m+n+1,\ n\geqslant 1\\ iz^n & \text{при } \nu=m+n+2,\ n\geqslant 0\\ i\left(z^{\nu-m-n-3}-z^{m+3n+3-\nu}\right) & \text{при } m+n+3\leqslant\nu\leqslant\sigma,\ n\geqslant 1\end{cases} \tag{42}$$

и $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\sigma$ — некоторые вещественные числа. Итак, решение задачи (1)—(2*) удовлетворяет уравнению (41) при соответственно выбранных вещественных $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\sigma$. Легко проверить, что справедливо и обратное утверждение: если функция $u(z)\in C^1_\alpha(|z|\leqslant 1)\cap$ $\cap\, C^2(|z|<1)$ удовлетворяет уравнению (41) при произвольно заданных вещественных числах $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\sigma$, то она является решением задачи (1)—(2*).

Случай II: $m\geqslant -1$, $n<0$. Как и выше ограничимся случаем нечетных $m>-1$. Пусть функция $u(z)$ — произвольное решение задачи (1)—(2*). Тогда она будет удовлетворять уравнению (32), умножением которого на z^k $(k=-n)$, получаем

$$\frac{\partial(z^k u)}{\partial\bar z}=z^k Su+z^k Rh+z^k\sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu h_\nu(z).$$

Отсюда, как и в случае I, будем иметь

$$z^k u=P_0(z^k Su)+P_0(z^k Rh)+P_0\left[z^k\sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu h_\nu(z)\right]+i\beta,$$

где β — некоторое вещественное число, а $P_0 f$ определяется по формуле (39). Последнее равенство можно представить в виде (см. [1], стр. 298)

$$u-P_k^* Su=P_k^*\left(\sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu h_\nu\right)+\sum_{j=1}^{k}B_j\left(Su+Rh+\sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu h_\nu\right)z^{-j}, \tag{43}$$

где

$$P_k^* f=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}+\bar\zeta^{2k-1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{1-z\bar\zeta}\right]d\xi d\eta, \tag{44}$$

$$B_j(f)=\begin{cases} -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\zeta^{j-1}f(\zeta)+\bar\zeta^{2k-j-1}\overline{f(\zeta)}\right]d\xi d\eta & \text{при } 1\leqslant j\leqslant k-1\\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint\limits_{|\zeta|<1}\zeta^{k-1}f(\zeta)\,d\xi d\eta+j\beta & \text{при } j=k.\end{cases} \tag{45}$$

Согласно лемме 4 и известному свойству оператора P_k^*, оператор $P_k^* S$ вполне непрерывен в пространстве $C^1_\alpha(|z|\leqslant 1)$ и отображает его в себя [1].

Поскольку $u(z) \in C_\alpha^1 (|z| \leqslant 1)$, то из (43) следует, что

$$B_j\left(Su + Rh + \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu h_\nu\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant k-1 \\ -j\beta & \text{при } j = k, \end{cases} \tag{46}$$

и следовательно

$$u - P_k^* Su = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu P_k^* h_\nu. \tag{47}$$

Таким образом, каждое решение задачи (1)—(2*) удовлетворяет функциональным уравнениям (46) для некоторых вещественных чисел β и $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ и операторному уравнению (47) для тех же чисел $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$.

Непосредственной проверкой можно убедиться также в *обратном*: если для произвольно заданных вещественных чисел β и $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ $\cdots, \alpha_m$ функция $u(z) \in C_\alpha^1 (|z| \leqslant 1) \cap C^2 (|z| < 1)$, удовлетворяющая равенствам (46), является решением уравнения (47), то она будет также решением задачи (1)—(2*).

Случай III: $m < -1$, $n \geqslant 0$. Пусть функция $u(z)$ есть решение задачи (1)—(2*). Тогда она будет удовлетворять уравнению (29) и следовательно задача (30) будет разрешимой. В таком случае необходимо будут выполняться равенства

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{t^\nu (Ku - q\overline{Ku})}{X^+(t)} dt = - \int\limits_{|t|=1} \frac{t^\nu (Th - q\overline{Th})}{X^+(t)} dt, \quad \nu = 0, 1, \cdots, -m-2, \tag{48}$$

и функция $u(z)$ будет удовлетворять уравнению

$$u - P_n Su = \sum_{\nu=0}^{2n} \beta_\nu q_\nu(z) \tag{49}$$

для некоторых вещественных чисел $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{2n}$, где

$$q_\nu(z) = \begin{cases} z^\nu - z^{2n-\nu} & \text{при } 0 \leqslant \nu \leqslant n-1, \ n > 1 \\ iz^n & \text{при } \nu = n, \ n \geqslant 0 \\ i(z^{\nu-n-1} + z^{3n-1-\nu}) & \text{при } n+1 \leqslant k \leqslant 2n, \ n \geqslant 1. \end{cases} \tag{50}$$

В этом случае тоже легко проверить, что имеет место и обратное утверждение: если функция $u(z) \in C_\alpha^1 (|z| \leqslant 1) \cap C^2 (|z| < 1)$, удовлетворяющая равенствам (48), является решением уравнения (49) для произвольно заданных вещественных чисел $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{2n}$, то она будет и решением задачи (1)—(2*).

Случай IV: $m < -1$, $n < 0$. С помощью рассуждений, аналогичных вышеприведенным, легко получаем:

если функция $u(z)$ является решением задачи (1)—(2*), то имеют место равенства (48), равенства

$$B_j(Su+Rh)=\begin{cases}0 & \text{при } 1\leqslant j\leqslant k-1\\ -i\beta & \text{при } j=k,\end{cases}\tag{51}$$

где $k=-n$, β — некоторое вещественное число, и функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению

$$u-P_k^{*}Su=0.\tag{52}$$

Обратно — если функция $u(z)\in C_\alpha^1(|z|\leqslant 1)\cap C^2(|z|<1)$, удовлетворяющая равенствам (48) и (51) для произвольно заданного вещественного числа β, является решением уравнения (52), то она будет также решением задачи (1)—(2*).

§ 2. Об индексе задачи (1)—(2*)

Как было показано в случае I, задача (1) — (2*) эквивалентна уравнению (41). Легко убедиться, что функции $H_1(z), H_2(z),\cdots, H_\sigma(z)$, входящие в уравнение (41), линейно независимы. Здесь и в дальнейшем линейная зависимость и независимость понимаются относительно поля вещественных чисел.

Пусть линейные функционалы $v_1, v_2,\cdots, v_\tau$, определенные в пространстве $C_\alpha^1(|z|\leqslant 1)$, составляют полную систему линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения, соответствующего уравнению (41).

Тогда для разрешимости уравнения (41) необходимо и достаточно, чтобы $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\sigma)$ являлось решением системы

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} v_j(H_\nu)\gamma_\nu=-v_j(P_nRh),\ j=1, 2,\cdots,\tau.\tag{53}$$

Для разрешимости же системы (53) необходимы и достаточны следующие условия:

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} v_\nu(P_nRh)\beta_\nu^{(j)}=0,\ j=1, 2,\cdots,\tau-r,\tag{54}$$

где $(\beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)},\cdots, \beta_\tau^{(j)})$, $j=1, 2,\cdots, \tau-r$ является полной системой линейно независимых решений сопряженной однородной системы, соответствующей системе (53), а $r=\mathrm{Rang}\,\|v_j(H_\nu)\|$.

Предположим, что свободными из $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\sigma$ являются $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,\cdots, \gamma_{\sigma-r}$. Выражая остальные через эти и подставляя в (41), получим

$$u-P_nSu=P_nRh+\sum_{\nu=1}^{\sigma-r} H_\nu^{*}\cdot\gamma_\nu,\tag{55}$$

где H_ν^{*}, $\nu=1, 2,\cdots, \sigma-r$ есть определенная линейная комбинация функций $H_\nu, H_{\sigma-r+1}, \cdots, H_\sigma$. Очевидно функции $H_1^{*}, H_2^{*}, \cdots, H_{\sigma-r}^{*}$ также будут линейно независимыми.

Легко видеть, что общее решение уравнения (55) будет иметь вид

$$u = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \cdots + \delta_\tau u_\tau + u_0 + \gamma_1 \overset{*}{u}_1 + \cdots + \gamma_{\sigma-r} \overset{*}{u}_{\sigma-r}, \qquad (56)$$

где $u_1, u_2, \cdots, u_\tau$ — полная система линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения, $u_0, u_1^*, \cdots, u^*_{\sigma-r}$ являются частными решениями неоднородных уравнений типа (55) соответственно с правыми частями $P_n Rh$, $H_1^*, \cdots, H^*_{\sigma-r}$. Очевидно, что линейно независимых решений однородной задачи (1) — (2*) ($h(z) = 0$) будет $\tau + \sigma - r$, а число линейно независимых условий, наложенных на функцию $h(z)$ (см. (54)) меньше или равно $\tau - r$. Отсюда для индекса $\varkappa$ задачи (1)—(2*) при $m \geqslant -1$, $n \geqslant 0$ получаем оценку

$$\varkappa \geqslant m + 2n + 2. \qquad (57)$$

Аналогичными рассуждениями в остальных случаях легко получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\varkappa \geqslant m + n + 2 \quad \text{при} \quad n < 0, \\ &\varkappa \geqslant m + 2n + 3 \ \text{при} \ m < -1, \ n \geqslant 0. \end{aligned} \qquad (58)$$

Автор выражает признательность проф. Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и ценные указания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15.I.1975

Ս. Կ. ԱՓՅԱՆ. Ռիման-Հիլբերտի եզրային խնդիրը վերածվող էլիպտական երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների մի դասի համար *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է Ռիման-Հիլբերտի խնդիրը տիրույթի եզրում վերածվող դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտական սիստեմների մի դասի համար։ Բերված է այդ խնդիրը u+Au=f *տեսքի հավասարման, որտեղ* A-*ն լրիվին անընդհատ օպերատոր է։ Հնարավոր դեպքերից մեկում խնդրի ինդեքսի համար ստացված է բանաձև, իսկ մնացած դեպքերում — գնահատականներ։*

S. K. AFIAN. *The Rieman—Hilbert boundary problem for a class of elliptical differential equations of the second order with degeneration* (summary)

In the paper the Rieman—Hilbert problem for a class of elliptical systems of differential equations of the second order with degeneration on the boundary is considered. This problem is reduced to the equation $u - Au = f$ where A is a complitely continuous operator. For the index of the same problem a formula is obtained in one of the possible cases and in all other cases evaluations are made.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
2. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.
3. *С. К. Афян.* Задача Римана –Гильберта для одного класса вырождающихся на границе области эллиптических систем дифференциальных уравнений, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 4, 1973, 322–328.