ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 2, 1976 Математика

Г. А. МАРТИРОСЯН

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Введение

Пусть D — плоская односвязная область (конечная или бесконечная), ограниченная одним простым контуром Γ, на котором зафиксированы некоторые точки $t_1, t_2, \cdots, t_n$.

Будем говорить, что функция $\varphi(z)$, заданная в $D+\Gamma$, принадлежит классу $H^*(t_1, \cdots, t_n)$, если

$$\varphi(z)=\frac{\varphi^*(z)}{|z-t_1|^\alpha \cdots |z-t_n|^\alpha},\ 0<\alpha<1,$$

где $\varphi^*(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера в окрестности контура Γ. В случае бесконечной области от функции $\varphi(z)$ требуется ограниченность на бесконечности.

Обозначим через Γ_k замкнутую дугу контура Γ, заключенную между точками t_k и t_{k+1}. Если

$$\alpha(t)=\alpha_k(t) \text{ при } t\in\Gamma_k,\ k=1, 2, \cdots, n,$$

а функция $\alpha_k(t)$ при любом k принадлежит классу $H(\Gamma_k)$ (т. е. удовлетворяет условию Гёльдера на Γ), то скажем, что функция $\alpha(t)$ принадлежит классу $H_0(t_1, \cdots, t_n)$ (см. [3], стр. 31).

Будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит классу $H_m(\Gamma)$, если $\frac{d^k f}{ds^k}$ (s — длина дуги контура Γ) удовлетворяет условию Гёльдера на Γ при $k\leqslant m$.

В области D рассмотрим следующее эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$A_0 u_{xx}+A_1 u_{xy}+A_2 u_{yy}=0, \tag{1}$$

где A_0, A_1, A_2 — комплексные числа, а решение ищется в классе ограниченных комплексных функций.

Напомним, что эллиптичность означает следующее: $A_2\neq 0$ и характеристическое уравнение

$$A_0+A_1\lambda+A_2\lambda^2=0 \tag{2}$$

не имеет действительных корней.

Пусть λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения (2). Будем говорить, что уравнение (1) удовлетворяет условию нормальности, если $\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, что то же самое, что и условие правильной эллиптичности.

В настоящей работе рассматриваются некоторые смешанные краевые задачи для уравнения (1) как при выполнении условия нормальности, так и при его нарушении.

В § 1 приводится общее решение уравнения (1) в бесконечной области. В § 2 рассматривается следующая задача.

Найти в области $D=\{|z|>1\}$ ограниченное дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1), первые производные которого принадлежат классу $H^*(t_1,\cdots,t_n)$ $(t_1,\cdots,t_n\in\Gamma)$, по граничному условию

$$(\alpha(t)\,u_x+\beta(t)\,u_y)|_\Gamma=f(t), \tag{3}$$

где функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t)$ принадлежат классу $H_0(t_1,\cdots,t_n)$.

При выполнении условия нормальности, используя общее решение уравнения (1), краевая задача (1), (3) сводится к задаче сопряжения, впоследствии получаются формулы для вычисления индекса и для решения задачи (1), (3). Во второй части этого параграфа рассматривается частный случай задачи (1), (3).

В § 3 при нарушении условия нормальности ставится следующая задача; найти в области $D=\{|z|>1\}$ ограниченное дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1), первые производные которого принадлежат классу $H^*(t_1,\cdots,t_n)$ $(t_1,\cdots,t_n\in\Gamma)$, по граничному условию

$$(P_1(t)\,u_x+P_2(t)\,u_y+P_3(t)\,u+\alpha(t)\,\overline{u})/_\Gamma=f(t), \tag{4}$$

где $P_k(t)$ $(k=1,\,2,\,3)$ — произвольные полиномы порядка n_k $(k=1,\,2,\,3)$, $f(t)$, $\alpha(t)\in H_0(t_1,\cdots,t_n)$ и $\alpha(t)\neq 0$ для всех $t\in\Gamma$, а $\overline{u}(x,\;y)$ — сопряженная функция к функции $u(x,\;y)$.

При некотором предположении на $P_1(t)$, $P_2(t)$ доказывается, что задача (1), (4) нётерова, и дается алгоритм для ее решения.

В § 4 при выполнении условия нормальности рассматривается следующая задача: требуется найти дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) в области $D=\{|z|<1\}$, первые производные которого принадлежат классу $H^*(t_1,\;t_2)$ $(t_1,\;t_2\in\Gamma)$, по граничным условиям

$$u/_{\Gamma_1}=f_1(t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=f_2(t), \tag{6}$$

где $f_1(t)\in H_1(\Gamma_1)$, а $f_2(t)\in H(\Gamma_2)$.

При помощи общего решения уравнения (1) в области $D=\{|z|<1\}$ задача (1), (5), (6) сводится к системе двух фредгольмовых интегральных уравнений.

§ 1. Общее решение уравнения (1) в бесконечной области

1°. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Так как $A_2 \neq 0$, то без ограничения общности можем считать, что $A_2 = -1$. В обозначениях

$$v_1(x, y) = u_x(x, y)$$

$$v_2(x, y) = u_y(x, y) \tag{7}$$

уравнение (1) (где в дальнейшем положим $A_2 = -1$) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial y} = A\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{8}$$

где $v = (v_1, v_2)$, а $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A_0 & A_1 \end{pmatrix}$.

Легко видеть, что неособое преобразование

$$v = B\omega, \tag{9}$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, а $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, приводит систему (8) к каноническому виду

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x}. \tag{10}$$

Как известно, общее решение системы (10) в области D дается формулой

$$\omega_k(z) = \varphi_k(x + \lambda_k y) \quad (k = 1, 2), \tag{11}$$

где $\varphi_k(\zeta)$ $(k = 1, 2)$ — аналитические функции в областях $D_k = \{x + \lambda_k y : z \in D\}$.

На основании (7), (9), (11) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_1\varphi_1(x + \lambda_1 y) + \lambda_2\varphi_2(x + \lambda_2 y). \tag{12}$$

Как известно, если решение $u(x, y)$ уравнения (1) ограничено в окрестности бесконечно удаленной точки, то первые производные $u_x(x, y)$ и $u_y(x, y)$ исчезают на бесконечности. Следовательно, из (12) следует, что функции $\varphi_k(x + \lambda_k y)$ $(k = 1, 2)$ тоже исчезают на бесконечности, т. е.

$$\varphi_k(x + \lambda_k y) = \frac{a_k}{x + \lambda_k y} + h_k(x + \lambda_k y) \quad (k = 1, 2), \tag{13}$$

где a_k $(k=1,\ 2)$ — некоторые комплексные постоянные, а функции $h_k(\zeta)$ $(k=1,\ 2)$ аналитичны соответственно в областях D_k и

$$|h_k(\zeta)| \leqslant \frac{\text{const}}{|\zeta|^2} \quad (\zeta \in D_k,\ k=1,\ 2). \tag{14}$$

В силу (12), (13) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{a_1}{x+\lambda_1 y} + \frac{a_2}{x+\lambda_2 y} + h_1(x+\lambda_1 y) + h_2(x+\lambda_2 y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\lambda_1 a_1}{x+\lambda_1 y} + \frac{\lambda_2 a_2}{x+\lambda_2 y} + \lambda_1 h_1(x+\lambda_1 y) + \lambda_2 h_2(x+\lambda_2 y). \end{aligned} \tag{15}$$

Легко видеть, что общее решение системы (15) имеет вид

$$u(x,\ y) = a_1 \ln(x+\lambda_1 y) + a_2 \ln(x+\lambda_2 y) + \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_1 y} h_1(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_2 y} h_2(\zeta)\, d\zeta + a_0, \tag{16}$$

где a_0 — произвольная комплексная постоянная.

Теперь, требуя от функции $u(x,\ y)$ однозначности и ограниченности в области D, будем иметь:

I. При $\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, $a_1 = a_2 = 0$, следовательно, в случае выполнения условия нормальности общее решение уравнения (1) и его производные, в силу (15), (16), даются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= h_1(x+\lambda_1 y) + h_2(x+\lambda_2 y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \lambda_1 h_1(x+\lambda_1 y) + \lambda_2 h_2(x+\lambda_2 y), \\ u(x,\ y) &= \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_1 y} h_1(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_2 y} h_2(\zeta)\, d\zeta + a_0. \end{aligned} \tag{17}$$

В этом случае получается, что из ограниченности решения $u(x,\ y)$ следует

$$|u_x(x,\ y)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^2},\quad |u_y(x,\ y)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^2}.$$

Вообще этот факт имеет место и для систем эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка (см. [1], стр. 604—605, формула (26), при выполнении условия Лопатинского);

II. При $\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 > 0$, $a_1 + a_2 = 0$, и поэтому в случае нарушения условия нормальности общее решение уравнения (1) и его производные в силу (15), (16) даются формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_1}{x+\lambda_1 y} - \frac{a_1}{x+\lambda_2 y} + h_1(x+\lambda_1 y) + h_2(x+\lambda_2 y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\lambda_1 a_1}{x+\lambda_1 y} - \frac{\lambda_2 a_1}{x+\lambda_2 y} + \lambda_1 h_1(x+\lambda_1 y) + \lambda_2 h_2(x+\lambda_2 y), \tag{18}$$

$$u(x, y) = a_1 \ln \frac{x+\lambda_1 y}{x+\lambda_2 y} + \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_1 y} h_1(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_2 y} h_2(\zeta)\,d\zeta + a_0.$$

2°. Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

В этом случае система (8) при помощи неособого преобразования

$$v = B\omega, \tag{19}$$

где на этот раз $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \lambda \frac{\partial \omega_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y} = \lambda \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x}. \tag{20}$$

Решение первого уравнения системы (20) будет

$$\omega_1(z) = \varphi_1(x+\lambda y), \tag{21}$$

где $\varphi_1(\zeta)$ аналитична в области $\tilde{D} = \{x+\lambda y\colon z = x+iy \in D\}$.

Тогда второе уравнение системы (20) примет вид

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y} = \lambda \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \varphi_1'(x+\lambda y),$$

решением которого будет

$$\omega_2(z) = \varphi_2(x+\lambda y) + y\varphi_1'(x+\lambda y). \tag{22}$$

На основании (7), (19), (21), (22) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(x+\lambda y) + y\varphi_1'(x+\lambda y) + \varphi_2(x+\lambda y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (1+\lambda)\varphi_1(x+\lambda y) + \lambda y\varphi_1'(x+\lambda y) + \lambda\varphi_2(x+\lambda y). \tag{23}$$

Отсюда вытекает, что функции $\varphi_k(\zeta)$ исчезают на бесконечности

$$\varphi_k(x+\lambda y) = \frac{a_k}{x+\lambda y} + h_k(x+\lambda y) \quad (k = 1, 2),$$

где a_k $(k=1,\ 2)$ — произвольные постоянные, а аналитические функции $h_k(\zeta)$ $(k=1,\ 2)$ удовлетворяют неравенству (14). Так что (23) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a_1+a_2}{x+\lambda y}-\frac{a_1 y}{(x+\lambda y)^2}+h_1(x+\lambda y)+yh_1'(x+\lambda y)+h_2(x+\lambda y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{(1+\lambda)\,a_1+a_2\lambda}{x+\lambda y}-\frac{\lambda a_1 y}{(x+\lambda y)^2}+(1+\lambda)\,h_1(x+\lambda y)+\lambda y\,h_1'(x+$$

$$+\lambda y)+\lambda h_2(x+\lambda y). \qquad (24)$$

Положим

$$v_0(x,\ y)=(a_1+a_2)\ln(x+\lambda y)+\frac{a_1 y}{x+\lambda y}+yh_1(x+\lambda y)+$$

$$+\int\limits_{\infty}^{x+\lambda y}[h_1(\zeta)+h_2(\zeta)]\,d\zeta.$$

Непосредственно проверяется, что $u(x,\ y)=v_0(x,\ y)$ удовлетворяет системе (24), поэтому общее решение системы (24) имеет вид

$$u(x,\ y)=(a_1+a_2)\ln(x+\lambda y)+\frac{a_1 y}{x+\lambda y}+yh_1(x+\lambda y)+$$

$$+\int\limits_{\infty}^{x+\lambda y}[h_1(\zeta)+h_2(\zeta)]\,d\zeta+a_0, \qquad (25)$$

где a_0 — произвольное комплексное число.

Требуя от $u(x,\ y)$ ограниченности и однозначности, получим

$$a_1+a_2=0.$$

Следовательно в силу (24), (25) получим для общего решения уравнения (1) и его производных формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{a_1 y}{(x+\lambda y)^2}+yh_1'(x+\lambda y)+h_1(x+\lambda y)+h_2(x+\lambda y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{a_1 x}{(x+\lambda y)^2}+\lambda yh_1'(x+\lambda y)+(1+\lambda)\,h_1(x+\lambda y)+\lambda h_2(x+\lambda y), \qquad (26)$$

$$u(x,\ y)=\frac{a_1 y}{x+\lambda y}+yh_1(x+\lambda y)+\int\limits_{\infty}^{x+\lambda y}[h_1(\zeta)+h_2(\zeta)]\,d\zeta+a_0.$$

§ 2. Смешанная краевая задача для уравнения (1) вне круга в случае выполнения условия нормальности

1°. Рассмотрим задачу (1), (3) в области $D=\{|z|>1\}$ в случае выполнения условия нормальности: $\operatorname{Im}\lambda_1>0$ и $\operatorname{Im}\lambda_2<0$.

Предположим также, что для задачи (1), (3) выполняются условия Лопатинского

$$\alpha(t) + \lambda_k \beta(t) \neq 0 \text{ для любого } t \in \Gamma \ (k=1, 2). \tag{27}$$

Положительным направлением на Γ относительно области D мы будем считать то, которое оставляет область D слева.

Подставляя выражения для u_x и u_y из формулы (17) в краевое условие (3), будем иметь

$$(\alpha(t) + \lambda_1 \beta(t))\, h_1(\xi + \lambda_1 \eta) + (\alpha(t) + \lambda_2 \beta(t))\, h_2(\xi + \lambda_2 \eta) = f(t), \tag{28}$$

где $t = \xi + i\eta \in \Gamma$.

Ясно, что при $t \in \Gamma = \{|t| = 1\}$

$$\xi + \lambda_1 \eta = \frac{i+\lambda_1}{2i}\left(t + \frac{\nu_1}{t}\right),$$

$$\xi + \lambda_2 \eta = \frac{i-\lambda_2}{2i}\left(\nu_2 t + \frac{1}{t}\right),$$

где $\nu_1 = \dfrac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\nu_2 = \dfrac{i+\lambda_2}{i-\lambda_2}$, причем $|\nu_k| < 1$ $(k=1, 2)$.

Непосредственно проверяется, что функция $\zeta = \dfrac{i+\lambda_1}{2i}\left(z + \dfrac{\nu_1}{z}\right)$ взаимно однозначно отображает область $\{|z|>1\}$ в D_1, а функция $\zeta = \dfrac{i-\lambda_2}{2i}\left(\nu_2 z + \dfrac{1}{z}\right)$ взаимно однозначно отображает область $\{|z|<1\}$ в D_2.

Отсюда будем иметь, что функции

$$\psi_1(z) = h_1\left(\frac{i+\lambda_1}{2i}\left(z + \frac{\nu_1}{z}\right)\right),$$

$$\psi_2(z) = h_2\left(\frac{i-\lambda_2}{2i}\left(\nu_2 z + \frac{1}{z}\right)\right) \tag{29}$$

аналитичны соответственно в областях $\{|z|>1\}$ и $\{|z|<1\}$.

Из (13) следует, что

$$\lim_{z\to\infty} z\,\psi_1(z) = 0,$$

$$\lim_{z\to 0} z^{-2}\,\psi_2(z) = \text{const}. \tag{30}$$

Введем кусочно-аналитическую функцию

$$\chi(z) = \begin{cases} z\psi_1(z), & |z|>1, \\ z^{-2}\psi_2(z), & |z|<1, \end{cases} \tag{31}$$

которая в силу (30) исчезает на бесконечности — $\chi(\infty) = 0$.

В обозначениях (31) краевое условие (28) примет вид

$$\chi^+(t) = G(t)\,\chi^-(t) + g(t), \tag{32}$$

где

$$G(t) = -\frac{t^3(\alpha(t)+\lambda_2\beta(t))}{\alpha(t)+\lambda_1\beta(t)},$$

$$g(t) = \frac{tf(t)}{\alpha(t)+\lambda_1\beta(t)}. \tag{33}$$

Из условий $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t) \in H_0(t_1, \cdots, t_n)$ и (27) следует, что функции $G(t)$, $g(t) \in H_0(t_1, \cdots, t_n)$, причем $G(t) \neq 0$ при любом $t \in \Gamma$.

Таким образом, получили задачу сопряжения для кусочно-аналитической функции $\chi(z)$, исчезающей на бесконечности, которая на границе удовлетворяет граничному условию (32).

Используя результаты теории задачи сопряжения (см. [3], стр. 261, 268—271), при надлежащем выборе ветви функции $\ln G(t)$ имеем:

1) индекс $\varkappa$ задачи (32) вычисляется по формуле

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_\Gamma, \tag{34}$$

где символ $[\ln G(t)]_\Gamma$ обозначает приращение $\ln G(t)$ при обходе линии Γ один раз в положительном направлении.

2) Общее решение задачи сопряжения (32), исчезающее на бесконечности, при $\varkappa \geqslant 0$ существует для любого $g(t)$ и задается формулой

$$\chi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z)\,Q_{\varkappa-1}(z), \tag{35}$$

где $Q_{\varkappa-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa-1$ ($Q_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$ при $\varkappa = 0$), а каноническая функция $X(z)$ задачи сопряжения (32) определяется формулой

$$X(z) = \begin{cases} z^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{при } |z|>1 \\ e^{\Gamma(z)} & \text{при } |z|<1, \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}, \tag{36}$$

$$\ln G_0(t) = \varkappa \ln t + \ln G(t).$$

3) При $\varkappa < 0$ решение задачи сопряжения (32) существует тогда и только тогда, когда соблюдены следующие условия:

$$\int\limits_{|t|=1}\frac{t^j g(t)\,dt}{X^+(t)} = 0,\ j = 0, 1, \cdots, -\varkappa-1, \tag{37}$$

а решение определяется формулой (35), где $Q_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$.

Теперь восстановим функции $h_k(\zeta)$ $(k = 1, 2)$.

В силу (31)

$$\psi_1(z) = z^{-1}\chi(z),$$
$$\psi_2(z) = z^2\chi(z), \tag{38}$$

где $\chi(z)$ определяется формулой (35).

Отсюда на основании (29) получим выражения для $h_k(\zeta)$ $(k=1, 2)$. Как отметили выше, аналитическая функция

$$\zeta = \frac{i+\lambda_1}{2i}\left(z + \frac{\nu_1}{z}\right) \tag{39}$$

взаимно однозначно отображает область $\{|z|>1\}$ в бесконечную область D_1, границей которой является эллипс

$$(\zeta_1 \operatorname{Im}\lambda_1 - \zeta_2 \operatorname{Re}\lambda_1)^2 + \zeta_2^2 = (\operatorname{Im}\lambda_1)^2 \quad (\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2).$$

Точки $\pm\sqrt{1+\lambda_1^2}$ являются фокусами этого эллипса. Следовательно, ветвь функции $\sqrt{\zeta^2-(1+\lambda_1^2)}$ можно выбрать так, чтобы она была аналитична в области D_1 и

$$\lim_{\zeta\to\infty}\frac{\sqrt{\zeta^2-(1+\lambda_1^2)}}{\zeta} = 1.$$

Тогда функция

$$z = \omega_1(\zeta) \equiv \frac{i}{i+\lambda_1}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-(1+\lambda_1^2)}\right), \ \zeta\in D_1 \tag{40}$$

является обратной к функции (39). Аналогично функция

$$z = \omega_2(\zeta) \equiv \frac{i-\lambda_2}{i}\,\frac{1}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-(1+\lambda_2^2)}}, \ \zeta\in D_2 \tag{41}$$

является обратной к фуниции

$$\zeta = \frac{i-\lambda_2}{2i}\left(\nu_2 z + \frac{1}{z}\right) \quad (|z|<1).$$

Окончательно, в силу (29), (38)—(40) получим

$$h_1(\zeta) = (\omega_1(\zeta))^{-1}\chi(\omega_1(\zeta)), \ \zeta\in D_1,$$
$$h_2(\zeta) = (\omega_2(\zeta))^2\chi(\omega_2(\zeta)), \ \zeta\in D_2, \tag{42}$$

где $\chi(z)$ определяется формулой (35).

Таким образом, получили следующую теорему.

Теорема 1. *При $\varkappa\geqslant 0$ однородная задача, соответствующая задаче* (1), (3), *имеет ровно $\varkappa+1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача* (1), (3) *имеет решения при любом $f(t)$.*

При $\varkappa<0$ однородная задача имеет только одно ненулевое решение, а именно: $u(x, y) = \mathrm{const}$, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнения $-\varkappa$ условий на $f(t)$

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{t^{j+1} f(t)\, dt}{X^{+}(t)(\alpha(t)+i\lambda_1 \beta(t))} = 0,\ j=0, 1, \cdots, -\varkappa - 1.$$

В обоих случаях решение определяется при помощи формул (17), (42), *а* $\varkappa$ — *формулой* (34).

2°. Рассмотрим частный случай задачи (1), (3).

В формулировке задачи (1), (3) краевое условие (3) заменим следующим условиям:

$$u|_{\Gamma_{2k-1}} = f_{2k-1}(t),\ t \in \Gamma_{2k-1}, \tag{43}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_{2k}} = f_{2k}(t),\ t \in \Gamma_{2k}, \tag{44}$$

где $f_{2k}(t) \in H(\Gamma_{2k})$, $f_{2k-1}(t) \in H_1(\Gamma_{2k-1})$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, а Γ_j — замкнутая дуга $[t_j, t_{j+1}]$ линии $\Gamma = \{|t| = 1\}$ $(j = 1, 2, \cdots, 2n)$, $t_k = \xi_k + i\eta_k$.

Условия (43) эквивалентны следующим:

$$u(\xi_{2k-1}, \eta_{2k-1}) = f_{2k-1}(t_{2k-1}) \tag{45}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\Gamma_{2k-1}} = it f'_{2k-1}(t). \tag{46}$$

Так как

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\Gamma_{2k-1}} = \left.\left(y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{\Gamma_{2k-1}} = \frac{t^2-1}{2it}\cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Gamma_{2k-1}} - \frac{t^2+1}{2t}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_{2k-1}},\ t \in \Gamma_{2k-1},$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_{2k}} = \left.\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{\Gamma_{2k}} = \frac{t^2+1}{2t}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Gamma_{2k}} + \frac{t^2-1}{2it}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_{2k}},\ t \in \Gamma_{2k},$$

то условия (44), (46) примут вид

$$(\alpha(t)\, u_x + \beta(t)\, u_y)|_{\Gamma} = f(t),\ t \in \Gamma,$$

где

$$\alpha(t) = \begin{cases} i(t^2-1), & t \in \Gamma_{2k-1} \\ i(t^2+1), & t \in \Gamma_{2k}, \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} t^2+1, & t \in \Gamma_{2k-1} \\ t^2-1, & t \in \Gamma_{2k}, \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{47}$$

$$f(t) = \begin{cases} -2i\, t^2 f'_{2k-1}(t), & t \in \Gamma_{2k-1} \\ 2it f_{2k}(t), & t \in \Gamma_{2k}. \end{cases}$$

Так что краевое условие (44), (46) имеет вид условия (3). Ясно, что $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t) \in H_0(t_1, \cdots, t_{2n})$. Из формул (47) легко вывести, что условие Лопатинского (27) выполняется, а именно:

$$\alpha(t) + \lambda_j \beta(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma \quad (j = 1, 2).$$

Таким образом, результаты предыдущего пункта имеют место для задачи (1), (44), (46), решение которой будет решением для задачи (1), (43), (44), если требовать, чтобы оно удовлетворяло условиям (45).

Коэффициенты $G(t)$ и $g(t)$ задачи сопряжения (32) на этот раз, в силу (33) и (47), определяются формулами

$$G(t) = \begin{cases} \nu \dfrac{t(1 - \nu_2 t^2)}{1 - \nu_1 t^2}, & t \in \Gamma_{2k-1} \\ -\nu \dfrac{t(1 + \nu_2 t^2)}{1 + \nu_1 t^2}, & t \in \Gamma_{2k} \end{cases} \quad \left(\nu = \frac{i - \lambda_2}{i + \lambda_1}\right),$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (48)$$

$$g(t) = \begin{cases} -\dfrac{2it f_{2k-1}(t)}{(i + \lambda_1)(1 - \nu_1 t^2)}, & t \in \Gamma_{2k-1}, \\ \dfrac{2i f_{2k}(t)}{(i + \lambda_1)(1 + \nu_1 t^2)}, & t \in \Gamma_{2k}. \end{cases}$$

Вычисляя индекс $\varkappa$ задачи сопряжения (32), где $G(t)$, $g(t)$ определяются формулами (48), по формуле (34) получим

$$\varkappa = n - 1.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 будем иметь, что однородная задача, соответствующая задаче (1), (44), (46), имеет ровно n линейно независимых решений, а неоднородная задача (1), (44), (46) при любом $f(t)$ имеет решение, которое дается формулой (17)

$$u(x, y) = \int_{\infty}^{x + \lambda_1 y} h_1(\zeta)\, d\zeta + \int_{\infty}^{x + \lambda_2 y} h_2(\zeta)\, d\zeta + a_0, \qquad (49)$$

где $h_k(\zeta)$ $(k = 1, 2)$ определяются формулами (42), (35), в выражения которых входят $n - 1$ коэффициентов полинома $Q_{\varkappa-1}(z)$ — $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$. Из первого условия (45) и из (49) получим

$$u(x, y) = \int_{\xi_1 + \lambda_1 \eta_1}^{x + \lambda_1 y} h_1(\zeta)\, d\zeta + \int_{\xi_1 + \lambda_2 \eta_1}^{x + \lambda_2 y} h_2(\zeta)\, d\zeta + f_1(t_1). \qquad (50)$$

Подставляя значение $u(x, y)$ из (50) в остальные условия (45), для определения постоянных $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ получим систему алгебраических уравнений

$$\delta c = d, \qquad (51)$$

где δ — квадратная матрица порядка $n-1$, $d=(d_1,\cdots, d_{n-1})$ — определенный вектор, а $c=(c_1,\cdots, c_{n-1})$ — искомый вектор.

Пусть ранг матрицы δ равен r, тогда, как известно, однородная система, которая соответствует системе (51), имеет $(n-r-1)$ линейно независимых решений, а система (51) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено $n-r-1$ условий на d. Но однородной задаче (1), (43), (44) соответствует однородная алгебраическая система (52), поэтому однородная задача (1), (43), (44) имеет $n-r-1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача (1), (43), (44) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено $n-r-1$ условий на $f_j(t) (j=1, 2,\cdots, 2n)$. Отсюда следует, что индекс $\varkappa_0$ задачи (1), (43), (44) равен нулю: $\varkappa_0=0$.

При $n=1$ имеем: задача (1), (43), (44) однозначно и везде разрешима.

При $n\geqslant 2$: для того чтобы задача (1), (43), (44) была однозначно и везде разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы $r=n-1$, то есть $\det \delta\neq 0$.

§ 3. Смешанная краевая задача для уравнения (1) вне круга в случае нарушения условия нормальности

В области $D=\{|z|>1\}$ рассмотрим задачу (1), (4), когда нарушается условие нормальности: $\operatorname{Im}\lambda_k>0$ $(k=1, 2)$.

Как видно из краевого условия (4), линейную независимость следует взять в поле действительных чисел.

1°. Пусть $\lambda_1\neq\lambda_2$. Подставляя выражения для $u(x, y)$, u_x и u_y из формулы (18) в краевое условие (4), будем иметь

$$[P_1(t)+\lambda_1 P_2(t)]\, h_1(\xi+\lambda_1\eta)+[P_1(t)+\lambda_2 P_2(t)]\, h_2(\xi+\lambda_2\eta)+$$

$$+P_3(t)\left[\int\limits_{\infty}^{\xi+\lambda_1\eta} h_1(\zeta)\,d\zeta+\int\limits_{\infty}^{\xi+\lambda_2\eta} h_2(\zeta)\,d\zeta\right]+\alpha(t)\overline{\left[\int\limits_{\infty}^{\xi+\lambda_1\eta} h_1(\zeta)\,d\zeta+\int\limits_{\infty}^{\xi+\lambda_2\eta} h_2(\zeta)\,d\zeta\right]}=$$

$$=f(t)-a_0P_3(t)-\bar a_0\alpha(t)-\frac{a_1}{\xi+\lambda_1\eta}[P_1(t)+\lambda_1P_2(t)]+$$

$$+\frac{a_1}{\xi+\lambda_2\eta}[P_1(t)+\lambda_2P_2(t)]-a_1P_3(t)\ln\frac{\xi+\lambda_1\eta}{\xi+\lambda_2\eta}-\bar a_1\alpha(t)\ln\frac{\overline{\xi+\lambda_1\eta}}{\xi+\lambda_2\eta}, \tag{52}$$

где $t=\xi+i\eta$.

Положим

$$\psi_k(z)=\int\limits_{\infty}^{\frac{i+\lambda_k}{2i}\left(z+\frac{\nu_k}{z}\right)} h_k(\zeta)\,d\zeta \quad (k=1, 2), \tag{53}$$

где $\nu_k=\dfrac{i-\lambda_k}{i+\lambda_k}$, причем $|\nu_k|<1$ $(k=1, 2)$.

Поскольку функции $h_k(\zeta)$ $(k=1, 2)$ аналитичны соответственно в областях $D_k = \{x + \lambda_k y: z = x + iy \in D\}$ $(k = 1, 2)$, а функции

$$\zeta = \frac{i+\lambda_k}{2i}\left(z + \frac{\nu_k}{z}\right) \quad (k=1, 2)$$

взаимно однозначно отображают область $\{|z|>1\}$ в D_k соответственно, то $\psi_k(z)$ $(k = 1, 2)$ аналитичны в области $\{|z|>1\}$ и исчезают на бесконечности.

Из (53) имеем

$$\psi_k'(z) = \frac{i+\lambda_k}{2i}\left(1 - \frac{\nu_k}{z^2}\right) h_k\left(\frac{i+\lambda_k}{2i}\left(z + \frac{\nu_k}{z}\right)\right), \quad (k = 1, 2). \tag{54}$$

В силу (53), (54) краевое условие (52) примет вид

$$\frac{P_1(t) + \lambda_1 P_2(t)}{\frac{i+\lambda_1}{2i}\left(1 - \frac{\nu_1}{t^2}\right)} \psi_1'(t) + \frac{P_1(t) + \lambda_2 P_2(t)}{\frac{i+\lambda_2}{2i}\left(1 - \frac{\nu_2}{t^2}\right)} \psi_2'(t) + [\psi_1(t) + \psi_2(t)] P_3(t) +$$

$$+ \overline{[\psi_1(t) + \psi_2(t)]}\, \alpha(t) = g(t), \tag{55}$$

где

$$g(t) = f(t) - \frac{a_1[P_1(t) + \lambda_1 P_2(t)]}{\frac{i+\lambda_1}{2i}(1 + \nu_1 \bar{t}^2)\, t} + \frac{a_1[P_1(t) + \lambda_2 P_2(t)]}{\frac{i+\lambda_2}{2i}\, t\,(1 + \nu_2 \bar{t}^2)} - a_0 P_3(t) -$$

$$- \bar{a}_0\, \alpha(t) - a_1 P_3(t) \ln \frac{(i+\lambda_1)(1+\nu_1 \bar{t}^2)}{(i+\lambda_2)(1+\nu_2 \bar{t}^2)} - \bar{a}_1\, \alpha(t) \ln \frac{(i-\bar{\lambda}_1)(1+\bar{\nu}_1 t^2)}{(i-\bar{\lambda}_2)(1+\bar{\nu}_2 t^2)}. \tag{56}$$

Положим

$$\Phi(z) = \frac{P_1(z) + \lambda_1 P_2(z)}{\frac{i+\lambda_1}{2i}\left(1 - \frac{\nu_1}{z^2}\right)} \psi_1'(z) + \frac{P_1(z) + \lambda_2 P_2(z)}{\frac{i+\lambda_2}{2i}\left(1 - \frac{\nu_2}{z^2}\right)} \psi_2'(z) +$$

$$+ [\psi_1(z) + \psi_2(z)] P_3(z), \tag{57}$$

$$F(z) = \overline{\psi_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + \psi_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \tag{58}$$

Как видно из (57), порядок $\Phi(z)$ на бесконечности не превышает числа

$$m = \max[\max(n_1, n_2) - 2;\ n_3 - 1]. \tag{59}$$

Так как $\psi_k(z)(k=1, 2)$ аналитичны в области $\{|z|>1\}$, а $P_j(z)(j = 1, 2, 3)$ полиномы, то $\Phi(z)$ аналитична в области $\{|z|>1\}$, а $F(z)$ — аналитична в области $\{|z|<1\}$, причем $F(0) = 0$.

В новых обозначениях (57), (58) граничное условие (55) примет вид

$$\Phi(t) = -\alpha(t) F(t) + g(t). \tag{60}$$

Положим, наконец

$$\chi(z) = \begin{cases} z^{-1} F(z), & |z| < 1 \\ z^{-(m+1)} \Phi(z), & |z| > 1. \end{cases} \tag{61}$$

Ясно, что $\chi(\infty) = 0$.

Таким образом, на основании (60), (61) получаем задачу сопряжения

$$\chi^+(t) = -t^{-m} \alpha(t) \chi^-(t) + t^{-(m+1)} g(t) \tag{62}$$

для кусочно-аналитической функции $\chi(z)$, исчезающей в бесконечности, причем в силу условия задачи (1), (4) ($\alpha(t) \neq 0$) имеем, что

$$G(t) \equiv -t^{-m} \alpha(t) \neq 0 \text{ при любом } t \in \Gamma.$$

При надлежащем выборе ветви функции $\ln G(t)$ (см. [3], стр. 268—271) имеем:

1) Индекс $\varkappa$ задачи (62) дается формулой

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t)]_\Gamma = \frac{1}{2\pi i} [\ln(-t^{-m} \alpha(t))]_\Gamma. \tag{63}$$

2) Общее решение задачи сопряжения (62), исчезающее на бесконечности, при $\varkappa \geqslant 0$ всегда существует и дается формулой

$$\chi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{t^{-(m+1)} g(t)\, dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z) Q_{\varkappa-1}(z), \tag{64}$$

где $g(t)$ определяется формулой (56), $Q_{\varkappa-1}(z)$ — полином степени не выше $\varkappa - 1$ ($Q_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$ при $\varkappa = 0$), а каноническая функция $X(z)$ определяется формулой

$$X(z) = \begin{cases} z^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)}, & |z| > 1, \\ e^{\Gamma(z)}, & |z| < 1, \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\ln G_0(t)\, dt}{t-z}, \tag{65}$$

$$\ln G_0(t) = \varkappa \ln t + \ln G(t).$$

3) При $\varkappa < 0$ задача сопряжения (62) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{t^{j-(m+1)} g(t)\, dt}{X^+(t)} = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, -\varkappa - 1. \tag{66}$$

При соблюдении этих условий решение задачи (62), исчезающее в бесконечности, дается формулой (64), где $Q_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$:

Из (61) следует, что

$$\Phi(z) = z^{m+1}\chi(z), \ |z| > 1,$$
$$F(z) = z\chi(z), \ |z| < 1. \tag{67}$$

В силу (57), (58) имеем

$$\left[\frac{P_1(z) + \lambda_1 P_2(z)}{\frac{i+\lambda_1}{2i}\left(1 - \frac{\nu_1}{z^2}\right)} - \frac{P_1(z) + \lambda_2 P_2(z)}{\frac{i+\lambda_2}{2i}\left(1 - \frac{\nu_2}{z^2}\right)}\right]\psi_1'(z) = \Theta(z), \tag{68}$$

$$\psi_2(z) = -\psi_1(z) + \overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \tag{69}$$

где

$$\Theta(z) = \Phi(z) - \overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}P_3(z) - \frac{P_1(z) + \lambda_2 P_2(z)}{\frac{i+\lambda_2}{2i}\left(1 - \frac{\nu_2}{z^2}\right)}\left(\overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right)_z'. \tag{70}$$

В силу (59) ясно, что порядок $\Theta(z)$ на бесконечности не превышает m. После необходимых упрощений в (68) получим

$$[(z^2+1)P_1(z) - i(z^2-1)P_2(z)]\psi_1'(z) = \Theta_0(z), \tag{71}$$

где

$$\Theta_0(z) = \frac{(i+\lambda_1)(i+\lambda_2)}{2i(\lambda_2 - \lambda_1)}\left(1 - \frac{\nu_1}{z^2}\right)\left(1 - \frac{\nu_2}{z^2}\right)z^2\Theta(z). \tag{72}$$

Обозначим через m_0 порядок полинома

$$R(z) = (z^2+1)P_1(z) - i(z^2-1)P_2(z). \tag{73}$$

На основании (59) $m_0 \leqslant \max(n_1, n_2) + 2 \leqslant m + 4$.

Дополнительно требуем, чтобы полином $R(z)$ не имел корней на Γ, то есть

$$R(t) \neq 0 \text{ при любом } t \in \Gamma. \tag{74}$$

Из (71) получим

$$\psi_1'(z) = \frac{\Theta_0(z)}{R(z)}. \tag{75}$$

Так как порядок полинома $R(z)$ равен m_0, а порядок функции $\Theta_0(z)$ на бесконечности не превышает $m+2$ (см. (72), (73)), то для того чтобы функция $\psi_1(z)$, которая получается из (75), исчезла в бесконечности, была аналитичной в области $\{|z|>1\}$ и удовлетворяла уравнению (71), необходимо и достаточно соблюдение следующих условий:

$$\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{\Theta_0(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{k+1}} = 0 \ (R<1, \ k = m_0-1, \cdots, m+2),$$

$$\Theta_0^{(l)}(z_j) = 0 \ (l = 0, 1, \cdots, \beta_j - 1; \ j = 1, 2, \cdots, r), \tag{76}$$

где $z_1, \cdots, z_r$ — корни полинома $R(z)$ с кратностями $\beta_1, \cdots, \beta_r$, которые находятся в области $\{|z|>1\}$.

Выражение $\Theta_0(z)$, которое зависит от $f(t)$, a_0, a_1 и от коэффициентов полинома $\Theta_{\varkappa-1}(z)$ — $c_1, c_2, \cdots, c_\varkappa$ (при $\varkappa \leqslant 0$ $Q_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$, так что $c_1, \cdots, c_\varkappa$ отсутствуют), из (72) подставляя в (76) для определения действительного вектора

$$a = \{\mathrm{Re}\, a_0, \mathrm{Re}\, a_1, \mathrm{Re}\, c_1, \cdots, \mathrm{Re}\, c_\varkappa, \mathrm{Im}\, a_0, \mathrm{Im}\, a_1, \mathrm{Im}\, c_1, \cdots, \mathrm{Im}\, c_\varkappa\}$$

получим алгебраическое уравниние

$$Aa = b_0, \tag{77}$$

где $A - (2\varkappa + 4) \times 2k_0$ — действительная постоянная матрица (k_0 — число условий в (76)), b_0 — действительный вектор следующего типа:

$$b_0 = \int\limits_{|t|=1} (K(t)\, f(t) + \overline{K(t)\, f(t)})\, dt \quad (K(t) \text{— вектор-функция}).$$

Как известно, если ранг матрицы A равен r_0, то для разрешимости уравиения (77) необходимо и достаточно соблюдение $2k_0 - r_0$ условий ортогональности на b_0. При соблюдении этих условий общее решение уравнения (77) будет

$$a = a^{(0)} + \alpha_1 a^{(1)} + \cdots + \alpha_{2\varkappa+4-r_0}\, a^{(2\varkappa+4-r_0)}, \tag{78}$$

где $a^{(0)}$ — частное решение уравнения (77), $a^{(k)}$ — линейно независимые решения однородного уравнения (77) ($Aa = 0$), а α_k — произвольные действительные постоянные.

Из вида вектора b_0 видно, что условия ортогональности на b_0 дают условия ортогональности на $f(t)$, ясно, что число k' линейно независимых условий на $f(t)$ не превышает числа $2k_0 - r_0$, т. е. $k' \leqslant 2k_0 - r_0$.

Подставляя общее решение (78) уравнения (77) в (75), получим функцию $\psi_1'(z)$, а из (69) получим

$$\psi_2'(z) = -\frac{\Theta_0(z)}{R(z)} + \left(\overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right)_z'. \tag{79}$$

Обозначим через $\omega_k(\zeta)$ обратные аналитические функции относительно функций

$$\zeta = \frac{i+\lambda_k}{2i}\left(z + \frac{\nu_k}{z}\right) \; (k=1, 2) \; (\text{см. формулы (39), (40)}),$$

а именно:

$$z = \omega_k(\zeta) \equiv \frac{i}{i+\lambda_k}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - (1+\lambda_k^2)}) \; (k=1, 2),$$

где под $\sqrt{\zeta^2-(1+\lambda_k^2)}$ понимается ветвь, аналитичная в области D_k и $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\frac{\sqrt{\zeta^2-(1+\lambda_k^2)}}{\zeta}=1$.

Отсюда на основании (54), (74), (79) будем иметь

$$h_1(\zeta)=\frac{i\omega_1(\zeta)\,\Theta_0(\omega_1(\zeta))}{(i+\lambda_1)(\omega_1(\zeta)-\zeta)\,R(\omega_1(\zeta))},$$

$$h_2(\zeta)=\frac{i\omega_2(\zeta)}{(i+\lambda_2)(\omega_2(\zeta)-\zeta)}\left[-\frac{\Theta_0(\omega_2(\zeta))}{R(\omega_2(\zeta))}+\left(\overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right)_z'\Bigg|_{z=\omega_2(\zeta)}\right]. \qquad (80)$$

Тем самым мы получили решение задачи (1), (4), которое дается при помощи формул (18), (80).

Итак, при $\varkappa\geqslant 0$ однородная задача (1), (4) имеет ровно $2\varkappa+4-r_0$ линейно независимых решений, а для разрешимости задачи (1), (4) необходимо и достаточно соблюдение k' линейно независимых условий ортогональности на $f(t)$.

При $\varkappa<0$ подставляя общее решение (78), которое содержит $4-r_0$ произвольных действительных постоянных, в условия (66), получим относительно действительного вектора $\alpha=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{4-r_0}\}$ алгебраическое уравнение

$$B\alpha=b_1, \qquad (81)$$

где $B-(4-r_0)\times(-\varkappa)$ — действительная матрица, b_1 — определенный вектор типа b_0. Пусть ранг матрицы B равен r_1, тогда однородное уравнение (81) ($b_1=0$) имеет $4-r_0-r_1$ линейно независимых решений, а неоднородное уравнение (81) разрешимо тогда и только тогда, когда соблюдено $-\varkappa-r_1$ линейно независимых условий ортогональности на b_1 или, что то же самое, $k''\leqslant-\varkappa-r_1$ линейно независимых условий ортогональности на $f(t)$. Подставляя общее решение уравнения (81) в (80), при помощи формул (18), (80) получим решение задачи (1), (4).

Таким образом, доказали, что если

$$R(t)\neq 0 \text{ для любого } t\in\Gamma,$$

то задача (1), (4) нетерова, и при соблюдении необходимых и достаточных условий ортогональности на $f(t)$, решение задачи (1), (4) дается при помощи формул (18), (80), (72), (67), (64), (55).

2°. В случае $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ задача (1), (4) решается аналогично, только в граничное условие (4) на этот раз надо подставить выражения для $u(x, y)$, u_x, u_y из формул (26).

В заключение параграфа отметим, что полученные результаты остаются в силе, если в граничном условии вместо $P_k(t)$ ($k=1, 2, 3$) взять функции $f_k(t)$ ($k=1, 2, 3$), которые аналитически продолжаются в область $\{|z|>1\}$, а на бесконечности имеют конечные порядки.

§ 4. Смешанная краевая задача для уравнения (1) внутри круга в случае выполнения условия нормальности

В конечной области $\{|z|<1\}$ в случае выполнения условия нормальности: $\operatorname{Im}\lambda_1>0$, $\operatorname{Im}\lambda_2<0$, рассмотрим задачу (1), (5), (6).

Для вывода интегрального представления решения уравнения (1) понадобится следующая

Лемма. *Пусть $\varphi(x+\lambda y)$ аналитична относительно аргумента $x+\lambda y$ ($|x+iy|<1$) и принадлежит классу $H^*(t_1,\cdots,t_n)$ $(t_1,\cdots,t_n\in\Gamma)$. Тогда она представима в виде:*

$$\varphi(x+\lambda y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi(t)\,dt}{\xi+\lambda\eta-x-\lambda y}\qquad при\quad \operatorname{Im}\lambda>0,$$

$$\varphi(x+\lambda y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi(t)\,dt}{\xi-\lambda\eta-x-\lambda y}\qquad при\quad \operatorname{Im}\lambda<0,$$

где в обоих случаях $\Phi(t)$ — аналитическая функция в области $\{|z|<1\}$ и принадлежит классу $H^*(t_1,\cdots,t_n)$, причем $\Phi(t)$ определяется по $\varphi(x+\lambda y)$ единственным образом.

Непосредственно проверяется, что доказательство леммы 1, данное Н. Е. Товмасяном в работе [2], проходит и в этом случае.

Аналогично формуле (17) получим, что общее решение уравнения (1) представляется в следующем виде:

$$u(x,y)=\int\limits_0^{x+\lambda_1 y}\varphi_1(\zeta)\,d\zeta+\int\limits_0^{x+\lambda_2 y}\varphi_2(\zeta)\,d\zeta+a_0,\tag{82}$$

где $\varphi_k(\zeta)$ $(k=1,2)$ аналитичны соответственно в областях $D_k=\{x+\lambda_k y\colon |x+iy|<1\}$, а a_0 — произвольная комплексная постоянная.

Так как по условию задачи (1), (5), (6) $u_x, u_y\in H^*(t_1,t_2)$, то из (82) получим, что $\varphi_k(x+\lambda_k y)\in H^*(t_1,t_2)$ $(k=1,2)$. Следовательно, в силу леммы имеем

$$\varphi_1(x+\lambda_1 y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_1(t)\,dt}{\xi+\lambda_1\eta-x-\lambda_1 y},$$

$$\varphi_2(x+\lambda_2 y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_2(t)\,dt}{\xi-\lambda_2\eta-x-\lambda_2 y},\quad t=\xi+i\eta,\tag{83}$$

где $\Phi_k(z)$ аналитичны в области $\{|z|<1\}$ и принадлежат классу $H^*(t_1,t_2)$.

Подставляя значения $\varphi_k(x+\lambda_k y)$ $(k=1,2)$ из (83) в (82), получим интегральное представление для решения уравнения (1).

Теперь перейдем к исследованию задачи (1), (5), (6).

Условие (5) эквивалентно условиям

$$u(\xi_1, \eta_1) = f_1(t_1),\ t_1 = \xi_1 + i\eta_1 \in \Gamma_1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\Gamma_1} = itf_1'(t),\ t = \xi + i\eta \in \Gamma_1. \tag{84}$$

Из первого условия и из (82) находим, что решение $u(x, y)$ задачи (1), (5), (6) имеет вид

$$u(x, y) = \int\limits_{\xi_1+\lambda_1\eta_1}^{x+\lambda_1 y} \varphi_1(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\xi_1+\lambda_2\eta_1}^{x+\lambda_2 y} \varphi_2(\zeta)\, d\zeta + f_1(t_1), \tag{85}$$

Подставляя (85) в краевое условие (84), (6), получим

$$\frac{i+\lambda_1}{2} t(1-\nu_1 \bar{t}^2)\varphi_1(\xi+\lambda_1\eta) - \frac{i-\lambda_2}{2t}(1-\nu_2 t^2)\varphi_2(\xi+\lambda_2\eta) = itf_1'(t),\quad t\in\Gamma_1,$$

$$-\frac{i+\lambda_1}{2i} t(1+\nu_1\bar{t}^2)\varphi_1(\xi+\lambda_1\eta) - \frac{\bar{i}-\lambda_2}{2it}(1+\nu_2 t^2)\varphi_2(\xi+\lambda_2\eta) = f_2(t),\quad t\in\Gamma_2. \tag{86}$$

Граничные значения функций $\varphi_k(x+\lambda_k y)$ $(k=1, 2)$ из (83) непосредственно вычисляются при помощи формул Сохоцкого—Племеля (см. [3], стр. 55), а именно:

$$\lim_{z\to t_0} \varphi_1(x+\lambda_1 y) = \frac{2i}{(i+\lambda_1)(1-\nu_1\bar{t}_0^2)}\Phi_1(t_0) - \frac{2i\nu_1\bar{t}_0^2}{(i+\lambda_1)(1-\nu_1\bar{t}_0^2)}\Phi_1(\nu_1\bar{t}_0),$$

$$\lim_{z\to t_0} \varphi_2(x+\lambda_2 y) = \frac{2i}{(\bar{i}-\lambda_2)(1-\nu_2 t_0^2)}\Phi_2(\bar{t}_0) - \frac{2i\nu_2 t_0^2}{(\bar{i}-\lambda_2)(1-\nu_2 t_0^2)}\Phi_2(\nu_2 t_0), \tag{87}$$

где $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$ и $t_0 \neq t_k$ $(k=1, 2)$.

Подставляя граничные значения $\varphi_k(x+\lambda_k y)$ $(k=1, 2)$ из (87) в (86), получим

$$it\Phi_1(t) - \frac{i\nu_1}{t}\Phi_1(\nu_1\bar{t}) - \frac{i}{t}\Phi_2(\bar{t}) + i\nu_2 t\Phi_2(\nu_2 t) = itf_1'(t),\quad t\in\Gamma_1.$$

$$-\frac{1+\nu_1\bar{t}^2}{1-\nu_1\bar{t}^2}t\Phi_1(t) + \frac{1+\nu_1\bar{t}^2}{1-\nu_1\bar{t}^2}\cdot\frac{\nu_1}{t}\Phi_1(\nu_1\bar{t}) - \frac{1+\nu_2 t^2}{1-\nu_2 t^2}\frac{1}{t}\Phi_2(\bar{t}) +$$

$$+\frac{1+\nu_2 t^2}{1-\nu_2 t^2}\nu_2 t\Phi_2(\nu_2 t) = f_2(t),\quad t\in\Gamma_2 \tag{88}$$

или, полагая

$$\chi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z), & |z|<1, \\ z^{-1}\Phi_2\left(\dfrac{1}{z}\right), & |z|>1, \end{cases} \tag{89}$$

из (88) получим задачу сопряжения для кусочно-аналитической функции $\chi(z)$, исчезающей в бесконечности

$$\chi^+(t) = G(t)\chi^-(t) + \frac{\nu_1}{t^2}\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right) - \nu_2 t G(t)\Phi_2(\nu_2 t) + g(t), \qquad (90)$$

где

$$G(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{при} \quad t \in \Gamma_1 \\ -\dfrac{(1+\nu_2 t^2)(1-\nu_1 \bar{t}^2)}{t(1-\nu_2 t^2)(1+\nu_1 \bar{t}^2)} & \text{при } t \in \Gamma_2, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} f(t), \ t \in \Gamma_1 \\ -\dfrac{1-\nu_1 \bar{t}^2}{t(1+\nu_1 \bar{t}^2)} f_2(t), \ t \in \Gamma_2. \end{cases} \qquad (91)$$

Решение ищем в виде (см. [3], стр. 318)

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{\psi(t)\,dt}{t-z},$$

где $\psi(t)$ принадлежит классу $H^*(t_1, t_2)$ на Γ.

Тогда из (90) получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $\psi(t)$

$$K\psi \equiv K^0\psi + k\psi = g(t), \qquad (92)$$

где K^0 — характеристическая часть оператора K, а k — вполне непрерывный оператор, который получается от членов $\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right)$, $\Phi_2(\nu_2 t)$, входящих в (90). Как известно (см. [3], стр. 320, 325, теорема 2), индекс уравнения (92) равен индексу соответствующего характеристического уравнения $K^0\psi = g(t)$, а его индекс—индексу соответствующей задачи сопряжения

$$\chi^+(t) = G(t)\chi^-(t) + g(t),$$

индекс которого равен нулю.

Таким образом, индекс задачи (90) равен нулю, а задачу сопряжения (90) сводим к системе двух фредгольмовых интегральных уравнений следующим методом.

Считая, что значения $\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right)$ и $\Phi_2(\nu_2 t)$ известны и выбирая надлежащим образом ветвь функции $\ln G(t)$, для решения задачи (90), как решение задачи сопряжения с индексом нуль, будем иметь

$$\chi(z) = \frac{e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{\frac{\nu_1}{t^2}\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right) - \nu_2 t G(t)\Phi_2(\nu_2 t) + g(t)}{e^{\gamma(t)}(t-z)}\,dt, \qquad (93)$$

где

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\ln G(t)\,dt}{t-z}.$$

Граничное значение $e^{\gamma(z)}$ имеет вид (см. [3], стр. 257)

$$e^{\gamma(t)}=e^{\frac{1}{2}\ln G(t)}\,\omega(t)(t-t_1)^{\alpha_1+i\beta_1}(t-t_2)^{\alpha_2+i\beta_2}, \tag{94}$$

где $\omega(t)\in H_0(t_1,\ t_2)$ и $\omega(t)\neq 0$ для любого $t\in\Gamma$, а

$$\alpha_k+i\beta_k=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(t_k-0)-\ln G(t_k+0)\right]\quad (k=1,2),$$

причем в силу выбора ветви $\ln G(t)$ имеем

$$-1<\alpha_k<0\ (k=1,\ 2).$$

На основании (93), (89) имеем

$$\Phi_1(z)=\frac{\nu_1 e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right)dt}{t^2 e^{\gamma(t)}(t-z)}-\frac{\nu_2 e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{tG(t)\,\Phi_2(\nu_2 t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(t-z)}+$$

$$+\frac{e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{g(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(t-z)}, \tag{95}$$

$$\Phi_2(z)=-\frac{\nu_1 e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right)dt}{t^2 e^{\gamma(t)}(1-tz)}+\frac{\nu_2 e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{t\,G(t)\,\Phi_2(\nu_2 t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(1-tz)}-$$

$$-\frac{e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{g(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(1-tz)},$$

так как $|\nu_1\bar{t}|<1$ и $|\nu_2 t|<1$, то

$$\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\Phi_1(\tau)\,d\tau}{\tau-\frac{\nu_1}{t}};\quad \Phi_2(\nu_2 t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\Phi_2(\tau)\,d\tau}{\tau-\nu_2 t}.$$

Подставляя эти выражения в (95) и заменяя порядок интегрирования, получим следующую систему функциональных уравнений:

$$\Phi_1(z)=\frac{e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}K_{11}(\tau,z)\,\Phi_1(\tau)\,d\tau+\frac{e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}K_{12}(\tau,z)\,\Phi_2(\tau)\,d\tau+$$

$$+e^{\gamma(z)}Q_1(z), \tag{96}$$

$$\Phi_2(z)=\frac{e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}K_{21}(\tau,z)\,\Phi_1(\tau)\,d\tau+\frac{e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}K_{22}(\tau,z)\,\Phi_2(\tau)\,d\tau+$$

$$+e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}Q_2(z),$$

где

$$Q_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=2}\frac{g(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(t-z)};\quad Q_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{g(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(1-tz)}$$

—известные функции, а ядра $K_{ij}(\tau, z)$ даются формулами

$$K_{11}(\tau,z)=\frac{\nu_1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t^2e^{\gamma(t)}\left(\tau-\frac{\nu_1}{t}\right)(t-z)};$$

$$K_{12}(\tau,z)=-\frac{\nu_2}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{tG(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(\tau-\nu_2t)(t-z)};$$

$$K_{21}(\tau,z)=-\frac{\nu_1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t^2e^{\gamma(t)}\left(\tau-\frac{\nu_1}{t}\right)(1-tz)},$$

$$K_{22}(\tau,z)=\frac{\nu_2}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{tG(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(\tau-\nu_2t)(1-tz)}. \tag{97}$$

Из (94) следует, что $K_{ij}(\tau, z)$ принадлежат по τ классу H, а относительно z аналитичны в области $\{|z|<1\}$ и непрерывно продолжаются на границу Γ, значения которых принадлежат классу H.

Введем функции

$$F_1(z)=\frac{\Phi_1(z)}{e^{\gamma(z)}},\quad F_2(z)=\frac{\Phi_2(z)}{e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}. \tag{98}$$

Тогда система (96) в матричной записи примет вид

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}K(\tau,z)\,F(\tau)\,d\tau+Q(z), \tag{99}$$

где $F(z)=(F_1(z), F_2(z))$; $Q(z)=(Q_1\,z), Q_2(z))$ — аналитичные вектор функции, причем, как видно из (98), (93), (89), $F(z)$ ограничена в окрестностях узлов t_1, t_2, следовательно $F(z)$—непрерывная функция в замкнутой области $\{|z|\leqslant 1\}$, а $K(\tau, z)$ — матрица второго порядка:

$$K(\tau,z)=\begin{pmatrix}K_{11}(\tau,z)\,e^{\gamma(\tau)} & K_{12}(\tau,z)\,e^{\gamma\left(\frac{1}{\tau}\right)}\\ K_{21}(\tau,z)\,e^{\gamma(\tau)} & K_{22}(\tau,z)\,e^{\gamma\left(\frac{1}{\tau}\right)}\end{pmatrix}. \tag{100}$$

Ясно, что любое непрерывное решение в замкнутой области $\{|z|\leqslant 1\}$ системы (99) будет аналитичным в области $\{|z|<1\}$. Далее, так как граничные значения $K_{ij}(\tau, z)$ принадлежат классу H по обеим переменным, то на основании (94) граничное значение матрицы $K(\tau, z)$ имеет вид

$$K(\tau, t)=\frac{K^*(\tau, t)}{(\tau-t_1)^{-\nu_1}(\tau-t_2)^{-\nu_2}},\ |\tau|=|t|=1,$$

где $K^*(\tau, t)$ принадлежит классу H по обеим переменным.

Рассмотрим систему фредгольмовых уравнений

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} K(\tau, t)\,\psi(\tau)\,d\tau+Q(t) \tag{101}$$

в классе непрерывных функций на Г, где $Q(t)$—граничное значение $Q(z)$. Легко проверить, что если $\psi(t)$ является решением системы (101), то

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} K(\tau, z)\,\psi(\tau)\,d\tau+Q(z) \tag{102}$$

будет аналитическим решением системы (99), и наоборот, любое аналитическое решение системы (99) представляется в виде (102).

Таким образом, решение задачи (1), (5), (6) привели к системе двух фредгольмовых интегральных уравнений (101) в классе непрерывных функций.

Если $\psi(t)$— решение системы (101), то при помощи формул (102), (98), (83), (85) получим решение задачи (1), (5), (6).

Замечание 1. Если в задаче (1), (5), (6) граничное условие (5), (6) заменим более общим краевым условием

$$(\alpha(t)\,u_x+\beta(t)\,u_y)/_\Gamma=f(t), \tag{103}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t)$ принадлежат классу $H_0(t_1,\cdots, t_n)$, то задачу (1), (103) этим же методом можно свести к системе фредгольмовых интегральных уравнений.

Замечание 2. Из (97) легко видеть, что ядра $K_{ij}(\tau, z)$ на границе имеют следующий вид:

$$K_{jj}(\tau, t)=\frac{\nu_j}{\tau t\left(1-\frac{\nu_j}{\tau t}\right)}\,(A_{jj}(t)+B_{jj}(\tau)),\ (j=1, 2),$$

$$K_{ij}(\tau, t)=\frac{1}{1-\frac{\nu_j t}{\tau}}\,(A_{ij}(t)+B_{ij}(\tau))\ \ (i\neq j,\ i,\ j=1, 2), \tag{104}$$

где функций $A_{ij}(t)$, $B_{ij}(\tau)$ ограничены на Г.

Отсюда и из (100), (104) следует, что $K(t, \tau)$ можно представить в виде

$$K(\tau, t) = K_1(\tau, t) + K_2(\tau, t),$$

где $K_1(\tau, t)$ — вырожденное ядро, а норма оператора, соответствующего ядру $K_2(\tau, t)$ меньше единицы. Следовательно решение системы (101) известным методом можно свести к решению алгебраических уравнений.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 15.I.1975

Հ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Խառը եզրային խնդիրներ երկրորդ կարգի էլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարման համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում ուսումնասիրվում են հետևյալ տիպի եզրային խնդիրներ։ Պահանջվում է D տիրույթում գտնել

$$A_0 u_{xx} + A_1 u_{xy} + A_2 u_{yy} = 0$$

(A_0, A_1, A_2 կոմպլեքս թվեր են) էլիպտիկ հավասարման սահմանափակ, երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի այն լուծումը, որի առաջին կարգի ածանցյալները պատկանում են $H^*(t_1, \cdots, t_n)$ ($t_1, \cdots, t_n$ ինչ-որ կետեր են D տիրույթի Γ եզրագծի վրա) դասին հետևյալ եզրային պայմանով։

$$(\alpha(t) u_x + \beta(t) u_y)/\Gamma = f(t),$$

որտեղ $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t)$ կտոր-առ-կտոր անընդհատ ֆունկցիաներ են եզրագծի վրա։

Նորմալության պայմանի բավարարման դեպքում $D = \{|z| > 1\}$ տիրույթում խնդրի ինդեքսի հաշվման և լուծման համար ստացվում են բանաձևեր, իսկ $D = \{|z| < 1\}$ տիրույթում խնդիրը բերվում է երկու Ֆրեդհոլմյան ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը։

Նորմալության պայմանի խախտման դեպքում $D = \{|z| > 1\}$ տիրույթում, որոշ ենթադրության դեպքում, ցույց է տրվում, որ կարելի է դնել Նետերյան եզրային խնդիր և գրված խնդրի լուծման համար տրվում է ալգորիթմ։

H. A. MARTIROSIAN. *Mixed boundary value problems for second order elliptic differential equation on the plane* (summary)

The mixed boundary problem for an elliptical equation of the form

$$A_0 u_{xx} + A_1 u_{xy} + A_2 u_{yy} = 0$$

with the boundary condition

$$(\alpha(t) u_x + \beta(t) u_y)/\Gamma = f(t)$$

is contidered.

Under condition of normality the problem is solved for the domains $|z| < 1$ and $|z| > 1$. For the domain $|z| > 1$ a formula for calculation of the index of problem is also given for the domain $|z| < 1$ the problem is reduced to system of Fredholm integral equation.

In the case, when the normality condition is violated, an algorithm is given for the solution of the Noether problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Е. Товмасян.* Об одном методе решения краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сборник, 89 (131), 1972, 599—615.
2. *Н. Е. Товмасян.* Эффективные методы решения задачи Дирихле, Дифф. уравнения, т. V, № 1, 1972, 60—71.
3. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, Изд. „Наука“, М., 1968.