

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, В. Д. МОХОНЬКО

ОБ ОБОБЩЕННЫХ НЕВАНЛИННОВСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

1°. Пусть $f(z)$ — мероморфная в конечной плоскости функция, в дальнейшем такие функции будем просто называть мероморфными. Почти все, о чем будет идти речь в данной статье, переносится или непосредственно, или с естественными видоизменениями на случай функций, мероморфных в единичном круге, но мы для краткости ограничимся случаем конечной плоскости. Мы будем без пояснений пользоваться стандартными обозначениями неванлинновской теории распределения значений [1].

Всюду в дальнейшем $\omega(x)$ — положительная и невозрастающая функция на $[1, \infty)$. Следуя М. М. Джрбашяну [2], определим

$$\begin{aligned} N_{\omega}(r, f) &= \int_1^r \frac{n(t, f)}{t} \omega(t) dt + \omega(1) N(1, f) = \\ &= \int_1^r N(t, f) d(-\omega(t)) + \omega(r) N(r, f), \\ m_{\omega}(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_1^r \ln |f(te^{i\varphi})| d(-\omega(t)) + \omega(r) \ln |f(re^{i\varphi})| \right\}^+, \\ T_{\omega}(r, f) &= N_{\omega}(r, f) + m_{\omega}(r, f). \end{aligned}$$

Величины $N_{\omega}(r, a, f)$, $m_{\omega}(r, a, f)$, $\bar{N}_{\omega}(r, a, f)$ определяются, как обычно, то есть $N_{\omega}(r, a, f) = N_{\omega}(r, 1/(f-a))$ и т. д. Отметим, что эти характеристики отличаются от введенных в [2] ограниченными слагаемыми, но это отличие не существенно и упрощает дальнейшее изложение. Кроме того, по той же причине мы накладываем меньше требований на функцию $\omega(r)$, чем М. М. Джрбашян. При $\omega(x) \equiv 1$ получаем классические неванлинновские характеристики.

С помощью своего обобщения неванлинновских характеристик М. М. Джрбашян получил ряд очень важных результатов, главным образом в проблеме факторизации мероморфных функций. В работах М. М. Джрбашяна основное значение имели функции, для которых $T_{\omega}(r, f) = O(1)$ при $r \rightarrow \infty$, а также то обстоятельство, что за счет выбора функции ω можно добиться ограниченности характеристики

$T_{\infty}(r, f)$ для любой наперед заданной функции f . Это является одним из важнейших преимуществ характеристик $T_{\infty}(r, f)$ по сравнению с неванлинновскими, так как из $T(r, f) = O(1)$ следует, что $f(z) \equiv \text{const.}$

Как известно, обе основные теоремы неванлинновской теории распределения значений содержательны лишь при неограниченных характеристиках $T(r, f)$. Нас будет интересовать, в какой степени эти основные теоремы переносятся на обобщенные характеристики М. М. Джрбашяна, поэтому мы рассматриваем функции $f(z)$, для которых $T_{\infty}(r, f) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Прежде всего заметим, что имеет место такой аналог второй основной теоремы. Пусть $a_1, \dots, a_q$ — различные числа из расширенной комплексной плоскости, функция $\omega(x)$ имеет непрерывную производную $\omega'(x)$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \omega'(x) > -\infty, \quad (1)$$

тогда вне некоторой последовательности интервалов Δ , для которой $\int d \ln r < \infty$, выполняется

$$(q-2) T_{\infty}(r, f) \leq \sum_{k=1}^q \bar{N}_{\infty}(r, a_k, f) + O\left(\int_1^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right) + O(\sqrt{T_{\infty}(r, f) \ln T_{\infty}(r, f)}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Неравенство (2) следует из результатов Дингхаса [3], [4]. Дингхас определяет*

$$\hat{m}_{\infty}(r, f) = \int_1^r \hat{m}(t, f) d(-\omega(t)) + \omega(r) \hat{m}(r, f).$$

Так как $\hat{m}(r, f) = m(r, f) + O(1)$, то очевидно, что величина

$$\begin{aligned} \bar{m}_{\infty}(r, f) &= \int_1^r m(t, f) d(-\omega(t)) + \omega(r) m(r, f) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_1^r \ln^+ |f(te^{i\varphi})| d(-\omega(t)) + \omega(r) \ln^+ |f(re^{i\varphi})| \right\} \end{aligned}$$

отличается от $\hat{m}_{\infty}(r, f)$ на несущественное ограниченное слагаемое.

Нам будет удобнее пользоваться величиной $\bar{m}_{\infty}(r, f)$, называя ее также характеристикой Дингхаса. Характеристическую функцию $\hat{T}_{\infty}(r, f)$ Дингхас вводит с помощью $\hat{A}(r, f)$ и доказывает (см., например, [4], (3.2)), что

На самом деле свою характеристику Дингхас ассоциировал с другой функцией $\sigma(x) = \{x\omega(x)\}^{-1}$, подчинив ее довольно-таки жестким ограничениям (прим. Ред.).

$$\tilde{T}_{\omega}(r, f) = N_{\omega}(r, f) + \tilde{m}_{\omega}(r, f) + O\left(\int_1^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right).$$

Так как слагаемое $O\left(\int_1^r \omega(t) d \ln t\right)$ также не играет никакой роли для трансцендентных мероморфных функций, то мы для удобства будем называть характеристической функцией Дингхаса величину

$$\tilde{T}_{\omega}(r, f) = N_{\omega}(r, f) + \tilde{m}_{\omega}(r, f) = \int_1^r T(t, f) d(-\omega(t)) + \omega(r) T(r, f),$$

и, ссылаясь на результаты Дингхаса, без дополнительных оговорок будем заменять $\tilde{m}_{\omega}(r, f)$ на $\tilde{m}_{\omega}(r, f)$ и $\tilde{T}_{\omega}(r, f)$ на $\tilde{T}_{\omega}(r, f)$. При указанных выше условиях Дингхас доказал неравенство

$$(q-2) \tilde{T}_{\omega}(r, f) \leq \sum_{k=1}^q \tilde{N}_{\omega}(r, a_k, f) + O\left(\int_1^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right) + O\left(\sqrt{\tilde{T}_{\omega}(r, f) \ln \tilde{T}_{\omega}(r, f)}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Так как, очевидно, $\tilde{m}_{\omega}(r, f) \leq \tilde{m}_{\omega}(r, f)$ и $T_{\omega}(r, f) \leq \tilde{T}_{\omega}(r, f)$, а функция $(q-2)x - K\sqrt{x \ln x}$ при $q \geq 3$ — возрастающая функция для всех достаточно больших x , то из (3) сразу следует (2).

Отметим, что вопросы, которые изучали с помощью своих обобщенных характеристик Дингхас и М. М. Джрбашян, нигде не перекрываются. Существо различия характеристик А. Дингхаса и М. М. Джрбашяна, на наш взгляд, заключается в следующем. Характеристика $\tilde{m}_{\omega}(r, a, f)$ Дингхаса учитывает скорость приближения $f(z)$ к числу a в круге $\{|z| \leq r\}$. Характеристика же М. М. Джрбашяна $m_{\omega}(r, a, f)$ учитывает, кроме того, и способ приближения к числу a : она существенно зависит от конфигурации множества $\{z: |z| \leq r, |f(z) - a| < 1\}$ и от того, насколько отклоняется $f(z)$ от a на дополнении к этому множеству. Статья М. М. Джрбашяна, хотя и опубликована позже работ Дингхаса [3], [4], являлась завершением цикла статей, начатого в 1945 г. (ссылки см. в [2]).

В настоящей статье (п. 2^а) будет показано, что в отличие от характеристик Дингхаса для характеристик М. М. Джрбашяна не выполняется аналог первой основной теоремы. М. М. Джрбашян [2] показал, что $T_{\omega}(r, 1/f) = T_{\omega}(r, f) + O(1)$. Опираясь на недавний результат С. К. Балашова [5], мы укажем пример целой функции $f(z)$ такой, что при $\omega(x) = 1/x$ для всех a , $0 < |a| < \infty$ выполняется

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T_{\infty}(r, 1/(f-a))}{T_{\infty}(r, f)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{\infty}(r, a, f)}{T_{\infty}(r, f)} = A > 1, \quad (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T_{\infty}(r, f) = \infty.$$

Далее мы докажем, что для характеристик Дингхаса при определенных ограничениях на $\omega(x)$, имеет место аналог известной леммы о логарифмической производной [1]. Это позволит получить вторую основную теорему (3) с иными ограничениями на $\omega(x)$, чем у Дингхаса и с лучшей оценкой остаточного члена, чем в (3). Отсюда очевидным образом будет следовать усиление неравенства (2) для характеристик М. М. Джрбашяна. С другой стороны, мы покажем, что без определенных дополнительных ограничений на $\omega(x)$ лемма о логарифмической производной неверна: можно указать пример целой функции $f(z)$ и $\omega(x)$ таких, что при $r \rightarrow \infty$ выполняется $\bar{T}_{\infty}(r, f) = o(\bar{m}_{\infty}(r, f/f))$. Доказать лемму о логарифмической производной для характеристик Дингхаса при условии (1) нам не удалось. Лемма о логарифмической производной часто полезна и независимо от ее приложений при доказательстве второй основной теоремы, например; в аналитической теории дифференциальных уравнений. Поэтому мы приведем также один вариант леммы о логарифмической производной для характеристик М. М. Джрбашяна.

Наконец, отметим некоторые естественные вопросы, на которые мы в настоящее время не знаем ответа.

1) Справедлива ли для характеристик М. М. Джрбашяна при определенных ограничениях на $\omega(x)$ вторая основная теорема в форме

$$\sum_{k=1}^q m_{\infty}(r, a_k, f) \leq 2 T_{\infty}(r, f) + o(T_{\infty}(r, f))?$$

Если бы была справедлива основная теорема, то это неравенство следовало бы из (2).

2) Существует ли мероморфная функция $f(z)$ и $\omega(x)$ такие, что для некоторого a , $0 < |a| < \infty$ выполняется

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m_{\infty}(r, a, f)/T_{\infty}(r, f) > 1?$$

2°. Построим пример целой функции $f(z)$, для которой выполняется (4). Пусть c — положительное число такое, что c^2 — число нецелое. Обозначим $\rho = 1 + c^2$, $p = [p]$, $\Delta = (\text{sh } \pi c)/\pi$,

$$a_k = (k/\Delta)^{1/p} \exp \{i(c/\rho) \ln(k/\Delta)\}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Пусть

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_k}, p\right), \quad (5)$$

где $E(z, \rho)$ — первичный множитель Вейерштрасса рода ρ . Легко видеть, что

$$n(r, 0, f) = [\Delta r^\rho], \quad N(r, 0, f) = \frac{\Delta}{\rho} r^\rho + O(\ln r), \quad r \rightarrow \infty.$$

В силу известной теоремы Бореля ([1], стр. 81) выполняется

$$T(r, f) = O(r^\rho) \text{ и } \ln M(r, f) = O(r^\rho) \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

поскольку ρ — нецелое число. Функция $f(z)$, определенная по (5), является частным случаем целых функций, асимптотическое поведение которых изучал С. К. Балашов [5]. Из теоремы 1 в [5] получаем следующее утверждение. Для произвольного η , $0 < \eta < \pi/2$ равномерно относительно $\theta \in [\eta, 2\pi - \eta]$ выполняется

$$\ln |f(re^{i(c \ln r + \theta)})| = r^\rho e^{c(0-\pi)} \sin \theta + o(r^\rho), \quad r \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Возьмем за $\omega(x)$ функцию $\omega(x) = 1/x$ и найдем асимптотику характеристики $T_\omega(r, f) = m_\omega(r, f)$. При фиксированном $\varphi \in [0, 2\pi)$ определим последовательности $r_k(\varphi) = \exp\{(\varphi + 2\pi k)/c\}$ и $r'_k(\varphi) = \exp\{(\varphi + 2\pi k + \pi)/c\}$, $k=0, 1, \dots$. Пусть $r > r_1(0)$. Из (6) нетрудно получить, что при

$$r_{k-1}(\varphi) e^{\eta/c} \leq r \leq r_k(\varphi) e^{-\eta/c}, \quad k=1, 2, \dots$$

выполняется

$$\begin{aligned} \ln |f(re^{i\varphi})| &= -r^\rho \exp\{c(\varphi - c \ln r + (2k-1)\pi)\} \sin(\varphi - c \ln r) + \\ &+ o(r^\rho) = -r \exp\{c(\varphi + (2k-1)\pi)\} \sin(\varphi - c \ln r) + o(r^\rho), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Определим на $[r_0(\varphi), \infty)$ функцию $\psi(r, \varphi)$, равную

$$\begin{aligned} &-r \exp\{c(\varphi + (2k-1)\pi) \sin(\varphi - c \ln r)\} \text{ при} \\ &r_{k-1}(\varphi) \leq r \leq r_k(\varphi). \text{ Пусть } q = q(r, \varphi) = [(c \ln r - \varphi)/2\pi]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} E_\eta = \{re^{i\varphi}: r > 1, -\infty < \varphi < \infty, (|\varphi - c \ln r| < \eta) \vee \\ \vee (|\varphi - \pi - c \ln r| < \eta)\}. \end{aligned}$$

Через $\chi(z)$ будем обозначать характеристическую функцию множества E_η . С помощью функции $\psi(r, \varphi)$ равенство (7) можно записать так:

$$\ln |f(re^{i\varphi})| = \psi(r, \varphi) + o(r^\rho), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \in E_\eta(\varphi), \quad (8)$$

где $E_\eta(\varphi) = E_\eta \cap \{z: \arg z = \varphi\}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Пусть $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Из (7) следует, что

$$\ln |f(re^{i\varphi}) - a| = \psi^+(r, \varphi) + o(r^\rho), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \in E_\eta(\varphi). \quad (9)$$

Оценим снизу разность $m_\omega(r, f-a) - m_\omega(r, f)$. Мы имеем, учитывая (9)

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_1^r \ln |f(te^{i\varphi}) - a| \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{r} \ln |f(re^{i\varphi}) - a| \right\}^+ = \\
& = \left\{ \int_{E_\eta(\varphi) \cap [1, r]} \ln |f(te^{i\varphi}) - a| \frac{dt}{t^2} + \int_{[r_0(\varphi), r] \setminus E_\eta(\varphi)} \psi^+(t, \varphi) \frac{dt}{t^2} + \right. \\
& + (1 - \chi(re^{i\varphi})) \frac{1}{r} \psi^+(r, \varphi) + \chi(re^{i\varphi}) \frac{1}{r} \ln |f(re^{i\varphi}) - a| + o(r^{p-1}) \left. \right\}^+ > \\
& > \int_{[r_0(\varphi), r] \setminus E_\eta(\varphi)} \psi^+(t, \varphi) \frac{dt}{t^2} + (1 - \chi(re^{i\varphi})) \frac{1}{r} \psi^+(r, \varphi) - \\
& - \int_{E_\eta(\varphi) \cap [1, r]} \ln^+ \frac{1}{|f(te^{i\varphi}) - a|} \cdot \frac{dt}{t^2} - \chi(re^{i\varphi}) \frac{1}{r} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} + o(r^{p-1}). \quad (10)
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали элементарное неравенство $(x + x_1 + \dots + x_n)^+ \geq x^+ - (-x_1)^+ - \dots - (-x_n)^+$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_1^r \ln |f(te^{i\varphi})| \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{r} \ln |f(re^{i\varphi})| \right\}^+ = \\
& = \left\{ \int_{E_\eta(\varphi) \cap [1, r]} \ln |f(te^{i\varphi})| \frac{dt}{t^2} + \int_{[r_0(\varphi), r] \setminus E_\eta(\varphi)} \psi(t, \varphi) \frac{dt}{t^2} + (1 - \chi(re^{i\varphi})) \times \right. \\
& \times \frac{1}{r} \psi(r, \varphi) + \chi(re^{i\varphi}) \frac{1}{r} \ln |f(re^{i\varphi})| + o(r^{p-1}) \left. \right\}^+ \leq \\
& \leq \left\{ \int_{[r_0(\varphi), r_q(\varphi)] \setminus E_\eta(\varphi)} \psi(t, \varphi) \frac{dt}{t^2} \right\}^+ + \int_{[r_q(\varphi), r] \setminus E_\eta(\varphi)} \psi^+(t, \varphi) \frac{dt}{t^2} + \\
& + (1 - \chi(re^{i\varphi})) \times \frac{1}{r} \psi(r, \varphi) + \int_{E_\eta(\varphi) \cap [1, r]} \ln^+ |f(te^{i\varphi})| \frac{dt}{t^2} + \\
& + \chi(re^{i\varphi}) \frac{1}{r} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| + o(r^{p-1}). \quad (11)
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
& \int_{[r_0(\varphi), r_q(\varphi)] \setminus E_\eta(\varphi)} \psi(t, \varphi) \frac{dt}{t^2} = - \sum_{k=0}^{q-1} \int_{r_k(\varphi)}^{r'_k(\varphi)} \exp \{ c(\varphi + \\
& + (2k+1)\pi \} \sin(\varphi - c \ln t) d \ln t -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^{q-1} \int_{r_k(\varphi) e^{\eta/c}}^{r_{k+1}(\varphi) e^{-\eta/c}} \exp \{c(\varphi + (2k+1)\pi)\} \sin(\varphi - c \ln t) d \ln t = \\
& = \sum_{k=0}^{q-1} \exp \{c(\varphi + (2k+1)\pi)\} \frac{2}{c} \cos \eta - \\
& - \sum_{k=0}^{q-1} \exp \{c(\varphi + (2k+1)\pi)\} \frac{2}{c} \cos \eta = 0. \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{[r_0(\varphi), r_q(\varphi)] \setminus E_\eta(\varphi)} \psi^+(t, \varphi) \frac{dt}{t^2} = \sum_{k=0}^{q-1} \exp \{c(\varphi + (2k+1)\pi)\} \frac{2}{c} \cos \eta = \\
& = \frac{\cos \eta}{c \operatorname{sh} \pi c} e^{c\varphi} (e^{c2q\pi} - 1) \geq \\
& \geq \frac{e^{-2\pi c} \cos \eta}{c \operatorname{sh} \pi c} r^{c^2} - \frac{e^{2\pi c} \cos \eta}{c \operatorname{sh} \pi c}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Из (10)–(13) следует, что

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_1^r \ln |f(te^{i\varphi}) - a| \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{r} \ln |f(re^{i\varphi}) - a| \right\}^+ - \\
& - \left\{ \int_1^r \ln |f(te^{i\varphi})| \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{r} \ln |f(re^{i\varphi})| \right\}^+ \geq \frac{e^{-2\pi c} \cos \eta}{c \operatorname{sh} \pi c} r^{c^2} - \\
& - \int_{E_\eta(\varphi) \cap [1, r]} \ln^+ \frac{1}{|f(te^{i\varphi}) - a|} \frac{dt}{t^2} - \chi(re^{i\varphi}) \frac{1}{r} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} - \\
& - \int_{E_\eta(\varphi) \cap [1, r]} \ln^+ |f(te^{i\varphi})| \frac{dt}{t^2} - \chi(re^{i\varphi}) \frac{1}{r} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| + o(r^{p-1}),
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
& m_\omega(r, f-a) - m_\omega(r, f) \geq \frac{e^{-2\pi c} \cos \eta}{c \operatorname{sh} \pi c} r^{c^2} - \\
& - \frac{1}{2\pi} \iint_{\{1 < |z| < r\} \cap E_\eta} \ln^+ \frac{1}{|f(te^{i\varphi}) - a|} \frac{d\varphi dt}{t^2} - \\
& - \frac{1}{2\pi} \iint_{\{1 < |z| < r\} \cap E_\eta} \ln^+ |f(te^{i\varphi})| \frac{d\varphi dt}{t^2} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\pi r} \int_{\{|z|=r\} \cap E_\eta} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|} d\varphi - \frac{1}{2\pi r} \int_{\{|z|=r\} \cap E_\eta} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \\ + o(r^{\rho-1}). \quad (14)$$

Существует такая постоянная $K > 0$, что $T(r, f) \leq \ln M(r, f) \leq Kr^\rho$ и $T(r, 1/(f-a)) \leq Kr^\rho$ при $r \geq 1$. Так как

$$\iint_{\{|z|=r\} \cap E_\eta} d\varphi = 4\eta,$$

то

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\{|z|=r\} \cap E_\eta} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \frac{2\eta K}{\pi} r^{\rho-1}, \\ \frac{1}{2\pi} \iint_{\{1 < |z| < r\} \cap E_\eta} \ln^+ |f(te^{i\varphi})| \frac{d\varphi dt}{t^2} \leq \frac{2\eta K}{\pi(\rho-1)} r^{\rho-1}.$$

Из одной теоремы Эдreja и Фукса ([1], стр. 58) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\{|z|=r\} \cap E_\eta} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|} d\varphi \leq \frac{24}{\pi} \eta \ln \frac{\pi e}{2\eta} T\left(2r, \frac{1}{f-a}\right) \leq \\ \leq \frac{24K2^\rho}{\pi} \eta \ln \left(\frac{\pi e}{2\eta}\right) r^\rho,$$

а значит

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\{1 < |z| < r\} \cap E_\eta} \ln^+ \frac{1}{|f(te^{i\varphi})-a|} \frac{d\varphi dt}{t^2} \leq \frac{24K2^\rho}{\pi(\rho-1)} \eta \ln \frac{\pi e}{2\eta} r^{\rho-1}.$$

Следовательно

$$m_\infty(r, f-a) - m_\infty(r, f) \geq r^{\rho-1} \left\{ \frac{e^{-2\pi c} \cos \eta}{c \operatorname{sh} \pi c} - \frac{2\eta K}{\pi(\rho-1)} - \right. \\ \left. - \frac{24K2^\rho \rho}{\pi(\rho-1)} \eta \ln \left(\frac{\pi e}{2\eta}\right) \right\} + o(r^{\rho-1}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Так как

$$m_\infty(r, f) = T_\infty(r, f) \leq \tilde{T}_\infty(r, f) = \\ = \int_1^r T(t, f) \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{r} T(r, f) \leq \frac{K\rho r^{\rho-1}}{\rho-1},$$

то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T_\infty(r, 1/(f-a))}{T_\infty(r, f)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_\infty(r, f-a)}{m_\infty(r, f)} >$$

$$\geq 1 + \frac{ce^{-2\pi c}}{K\rho \operatorname{sh} \pi c} \cos \eta - \frac{2\eta}{\pi} - \frac{24 \cdot 2^{\rho}}{\pi} \eta \ln \left(\frac{\pi e}{2\eta} \right).$$

Устремим здесь η к нулю. Получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T_{\infty}(r, 1/(f-a))}{T_{\infty}(r, f)} = A > 1 + \frac{c \exp(-2\pi c)}{K(1+c^2) \operatorname{sh} \pi c} > 1. \quad (16)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} T_{\infty}(r, f) &\geq N_{\infty}(r, 0, f) + O(1) = \int_1^r \Delta t^{\rho-2} dt + O(1) = \\ &= \frac{\operatorname{sh} \pi c}{\pi c^2} r^{\rho-1} + O(1). \end{aligned}$$

Из (7) следует, что

$$\ln + \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} = o(r^{\rho}), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \in E_{\eta}.$$

Используя известные результаты ([1], стр. 59–60), легко получить, что $m(r, a, f) = o(r^{\rho})$ при

$$r \rightarrow \infty \text{ и } m_{\infty}(r, a, f) \leq \bar{m}_{\infty}(r, a, f) = o(r^{\rho-1}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$m_{\infty}(r, a, f) = o(T_{\infty}(r, 1/(f-a))) \text{ и } T_{\infty}(r, 1/(f-a)) \sim N_{\infty}(r, a, f)$$

при $r \rightarrow \infty$. Поэтому (15) можно переписать так

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{\infty}(r, a, f)}{T_{\infty}(r, f)} = A > 1.$$

Таким образом, целая функция $f(z)$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Было бы интересно выяснить, существует ли мероморфная функция $f(z)$ и функция $\omega(x)$ такие, что $T_{\infty}(r, f) = o(N_{\infty}(r, a, f))$ при $r \rightarrow \infty$.

3°. Как уже отмечалось в пункте 1°, Дингхас [3], [4] доказал аналог второй основной теоремы — неравенство (2) при условии, что непрерывно дифференцируемая функция $\omega(x)$ удовлетворяет условию (1). В этих же статьях Дингхас показал, что некоторый аналог второй основной теоремы имеет место, если принять $\omega(x) = T(x, f)^{\alpha-1}$, $0 \leq \alpha < 1$. В этом разделе будет показано, что вторая основная теорема имеет место для характеристик Дингхаса при некоторых ограничениях на $\omega(x)$ и $T(r, f)$, не содержащихся в условиях Дингхаса, притом с лучшей, чем в (2) оценкой остаточного члена. Мы приведем здесь лишь доказательство аналога леммы о логарифмической про-

изводной для характеристик Дингхаса, с его помощью вторая основная теорема доказывается точно так, как в классическом случае [1].

Пусть нам заданы мероморфная функция $f(z)$ и положительная невозрастающая на $[1, \infty)$ функция $\omega(x)$. Обозначим $r_1 = r_1(r) = r + (T(r, f))^{-2}$. Скажем, что выполняется

Условие А: если существует такое положительное число M , что для всех r , начиная с некоторого, выполняется

$$T(r_1, f) \leq \{T(r, f)\}^{-M}. \quad (17)$$

Условие А относится только к $T(r, f)$. Следующие четыре условия налагаются одновременно на $\omega(x)$ и на $T(r, f)$. Будем считать, что выполнено

Условие Б: если существует такое число τ , $0 < \tau < 1$, что для всех r , начиная с некоторого, выполняется

$$\omega(r) > |T(r_1, f)|^{-\tau}. \quad (18)$$

Условие В: если существует такое число τ , $0 < \tau < 1$, что для всех r , начиная с некоторого, выполняется

$$\omega(r) \leq |T(r_1, f)|^{-\tau}. \quad (19)$$

Условие Г: существуют такие числа τ , $0 < \tau < 1$ и M , $1 < M < \infty$, что для всех достаточно больших r , для которых выполняется (18), выполняется и (17).

Условие Д: существуют такие τ , τ_1 , $0 < \tau, \tau_1 < 1$, что для всех достаточно больших r выполняется (19) или выполняется

$$\omega(r_1) > \{T(r_1, f)\}^{-\tau_1}. \quad (20)$$

Очевидно, если $\omega(x) = T(x, f)^{a-1}$, $0 < a < 1$, то выполняется условие Б с $\tau = 1 - a$.

Теорема 1. Если выполнено хотя бы одно из условий А—Д, то для всех r , кроме, возможно, множества конечной меры, выполняется

$$\tilde{m}_\infty(r, f'/f) = O\left(\ln^+ \bar{T}_\infty(r, f) + \int_1^r \omega(t) d \ln t\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Доказательство. Известно ([1], стр. 122, формула (1.11)), что

$$m(r, f'/f) = O(\ln^+ T(r_1, f) + \ln r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Тогда

$$\bar{m}_\infty(r, f'/f) = m(r, f'/f) \omega(r) + \int_1^r m(t, f'/f) d(-\omega(t)) =$$

$$\begin{aligned}
&= O(\omega(r) \ln^+ T(r, f) + \int_1^r \ln^+ T(t, f) d(-\omega(t)) + \\
&\quad + \int_1^r \omega(t) d \ln t), \quad r \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{23}$$

По теореме Бореля—Неванлинны ([1], стр. 120) выполняется $T(r_1, f) \leq T(r, f) + 1$, кроме, возможно, множества конечной меры. Поэтому

$$\omega(r) \ln^+ T(r_1, f) \leq \omega(r) \ln^+ T(r, f) + O(1). \tag{24}$$

Если

$$\begin{aligned}
&\omega(r) > \{T(r, f)\}^{-1/2}, \text{ то } \omega(r)^{-1} < T(r, f) \text{ и } \omega(r) \leq \bar{T}_\omega(r, f) \text{ и} \\
&\omega(r) \ln^+ T(r, f) \leq \left\{ \ln^+ (T(r, f) \omega(r)) + \ln^+ \frac{1}{\omega(r)} \right\} \leq 2\omega(1) \cdot \ln^+ T_\omega(r, f).
\end{aligned}$$

Если же

$$\omega(r) \leq \{T(r, f)\}^{-1/2}, \text{ то } \omega(r) \ln^+ T(r, f) = O(1).$$

Из (24) получаем, что для всех r , кроме, возможно, множества конечной меры, выполняется

$$\omega(r) \ln^+ T(r_1, f) = O(\ln^+ \bar{T}_\omega(r, f)), \quad r \rightarrow \infty.$$

Чтобы вывести из (23) соотношение (21), остается доказать, что вне множества конечной меры выполняется

$$\int_1^r \ln^+ T(t, f) d(-\omega(t)) = O(\ln^+ \bar{T}_\omega(r, f)), \quad r \rightarrow \infty. \tag{25}$$

Пусть выполнено условие А. Используя неравенство ($b > a$):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega(a) - \omega(b)} \int_a^b \ln^+ f(x) d(-\omega(x)) \leq \ln^+ \left\{ \frac{1}{\omega(a) - \omega(b)} \times \right. \\
&\quad \times \left. \int_a^b f(x) d(-\omega(x)) \right\} + \ln 2,
\end{aligned}$$

где $f(x)$ — непрерывная неотрицательная функция (см. [1], стр. 116), получим

$$\int_1^r \ln^+ T(t, f) d(-\omega(t)) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq M \int_1^r \ln^+ T(t, f) d(-\omega(t)) \leq O(1) + \\
&+ M(\omega(1) - \omega(r)) \ln^+ \left\{ \frac{1}{\omega(1) - \omega(r)} \int_1^r T(t, f) d(-\omega(t)) \right\} \leq \\
&\leq M\omega(1) \ln^+ \int_1^r T(t, f) d(-\omega(t)) + O(1) \leq \\
&\leq M\omega(1) \ln^+ \tilde{T}_\omega(r, f) + O(1),
\end{aligned}$$

т. е. (25), причем без исключительного множества.

Пусть выполнено условие Б. Тогда для всех $r \geq r_0 > 1$ имеем

$$\{\omega(r) T(r, f)\}^\tau \geq \omega(r)^{\tau-1}. \quad (26)$$

Очевидно

$$\int_1^r \ln^+ T(t_1, f) d(-\omega(t)) \leq \omega(1) \ln^+ T(r_1, f).$$

Но вне множества конечной меры по теореме Бореля—Неванлинны имеем

$$\begin{aligned}
\ln^+ T(r_1, f) &\leq \ln^+ T(r, f) + O(1) \leq \ln^+ \{T(r, f) \omega(r)\} + \\
&+ \ln^+ \frac{1}{\omega(r)} + O(1) \leq \ln^+ \{T(r, f) \omega(r)\} + O(1) + \\
&+ \frac{\tau}{1-\tau} \ln^+ \{T(r, f) \omega(r)\} \leq \frac{1}{1-\tau} \ln^+ \tilde{T}_\omega(r, f) + O(1), \quad (27)
\end{aligned}$$

здесь было использовано (26). Таким образом, и в этом случае доказано (25).

Предположим теперь, что при $r \geq r_3 \geq 1$ выполняется (19), тогда

$$\begin{aligned}
\int_1^r \ln^+ T(t_1, f) d(-\omega(t)) &= 2 \int_{r_0}^r \ln^+ T(t_1, f) \sqrt{\omega(t)} d(-\sqrt{\omega(t)}) + \\
&+ O(1) \leq 2 \int_{r_0}^r \{T(t_1, f)\}^{-\tau/2} \ln^+ T(t_1, f) d(-\sqrt{\omega(t)}) + \\
&+ O(1) \leq C \int_{r_0}^r d(-\sqrt{\omega(t)}) + O(1) = O(1), \quad (28)
\end{aligned}$$

т. е. соотношение более сильное, чем (25).

Пусть выполняется условие Г. Не уменьшая общности, можно считать, что функция $\omega(r)$ непрерывна слева. Для всех достаточно больших r выполняется неравенство (18) или (19), соответствующие множества обозначим через E_1 и E_2 . Пусть

$$\bar{r} = \max \{x \in E_1: x \leq r\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_1^r \ln^+ T(t_1, f) d(-\omega(t)) &\leq \int_{E_1 \cap [1, r]} \ln^+ T(t_1, f) d(-\omega(t)) + \\ &+ \int_{E_2 \cap [1, r]} \ln^+ T(t_1, f) d(-\omega(t)) + O(1) \leq O(1) + \\ &+ \ln^+ T(r_1(\bar{r}), f) \int_{E_1 \cap [1, r]} d(-\omega(t)) \leq O(1) + \omega(1) \ln^+ T(r_1(\bar{r}), f). \end{aligned}$$

Здесь интеграл по $E_2 \cap [1, r]$ мы оценили точно так, как (28). В силу условия Г при $r = \bar{r}$ выполняется (17), поэтому

$$\ln^+ T(r_1(\bar{r}), f) \leq M \ln^+ T(\bar{r}, f).$$

Используя (27), получаем

$$\ln^+ T(\bar{r}, f) \leq \frac{1}{1-\tau} \ln^+ \bar{T}_\omega(\bar{r}, f) \leq \frac{1}{1-\tau} \ln^+ \bar{T}_\omega(r, f),$$

в силу неубывания характеристики $\bar{T}_\omega(r, f)$ [3]. Таким образом, и в случае Г доказано (25).

Предположим, что выполняется условие Д. Как и выше

$$\int_{E_2 \cap [1, r]} \ln^+ T(t_1, f) d(-\omega(t)) = O(1).$$

Обозначим через E_3 множество тех значений r , для которых выполняется (20), причем снова можем считать функцию $\omega(r)$ непрерывной слева. Обозначим $\bar{r} = \max \{x \in E_3: x \leq r\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{E_3 \cap [1, r]} \ln^+ T(t_1, f) d(-\omega(t)) &\leq \omega(1) \ln^+ T(r_1(\bar{r}), f) \leq \\ &\leq \omega(1) \ln^+ \{T(r_1(\bar{r}), f) \omega(r_1(\bar{r}))\} + \omega(1) \ln^+ \frac{1}{\omega(r_1(\bar{r}))} \leq \\ &\leq \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \{T(r_1(\bar{r}), f) \omega(r_1(\bar{r}))\} \leq \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \bar{T}_\omega(r_1(\bar{r}), f). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \int_1^r \ln^+ T(t, f) d(-\omega(t)) &\leq \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \bar{T}_\omega(r_1(\bar{r}), f) + O(1) \leq C(1) + \\ &+ \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \bar{T}_\omega\left(\bar{r} + \left\{ \frac{\omega(1)}{\bar{T}_\omega(\bar{r}, f)} \right\}^2, f\right) \leq O(1) + \\ &+ \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \bar{T}_\omega(\bar{r}, f) \leq \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \bar{T}_\omega(r, f) + O(1), \end{aligned}$$

где предпоследнее неравенство справедливо вне множества конечной меры. Здесь мы снова использовали теорему Бореля—Неванлинны, а также неравенство

$$\begin{aligned} \bar{T}_\omega(r, f) &= \omega(1) T(1, f) + \int_1^r T'(t, f) \omega(t) dt \leq \\ &\leq \omega(1) \left\{ T(1, f) + \int_1^r T'(t, f) dt \right\} = \omega(1) T(r, f). \end{aligned}$$

Замечание. Если функция $f(z)$ имеет конечный порядок, измеренный относительно $T(r, f)$, то

$$\tilde{m}_\omega(r, f'/f) = O\left(\int_1^r \omega(t) d \ln t\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Действительно, в этом случае имеем $m(r, f'/f) = O(\ln r)$ и, вместо (23), сразу получаем (29).

Из теоремы 1 и этого замечания обычным образом следует

Теорема 2. Пусть $a_1, \dots, a_q$ — различные числа из расширенной комплексной плоскости, $f(z)$ — мероморфная функция. Если выполнено хотя бы одно из условий A — D , то вне множества значений конечной меры выполняется

$$\begin{aligned} (q-2) \bar{T}_\omega(r, f) &\leq \sum_{k=1}^q \bar{N}_\omega(r, a_k, f) + O(\ln \bar{T}_\omega(r, f) + \\ &+ \int_1^r \omega(t) d \ln t), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (30)$$

Если $f(z)$ — функция конечного порядка, то для любой функции $\omega(x)$ выполняется (без исключительных значений)

$$(q-2) \bar{T}_\omega(r, f) \leq \sum_{k=1}^q \bar{N}_\omega(r, a_k, f) + O\left(\int_1^r \omega(t) d \ln t\right). \quad (31)$$

Эти соотношения (30) и (31) остаются в силе, если в них заменить $\bar{T}_\omega(r, f)$ на $T_\omega(r, f)$.

Замечание 1. Неравенство (31) легко получить и непосредственно из второй основной теоремы Р. Неванлинны

$$(q-2) T(r, f) \leq \sum_{k=1}^q \bar{N}(r, a_k, f) + O(\ln r).$$

Замечание 2. Из неравенства (44), доказываемого в конце статьи, следует, что неравенство (30) справедливо вне множества конечной логарифмической меры, если вне множества конечной логарифмической меры выполняется

$$\ln \frac{1}{\omega(r)} = O\left(\int_1^r \omega(t) d \ln t\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Легко видеть, что если $\bar{T}_\omega(r, f) \rightarrow \infty$, при $r \rightarrow \infty$, то

$$\int_1^r \omega(t) d \ln t = o(\bar{T}_\omega(r, f)), \quad r \rightarrow \infty.$$

Из (30) обычным образом вытекает, что множество дефектных значений в смысле А. Дингхаса, т. е. тех $a \in \bar{C}$, для которых

$$\delta_\omega(a, f) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} N_\omega(r, a, f) / \bar{T}_\omega(r, f) > 0,$$

не более чем счетно. Используя результат Хеймана [6], покажем, что если не накладывать некоторых ограничений на $f(z)$ и на $\omega(x)$, то для всех a из некоторого множества, имеющего мощность континуума, может быть $\delta_\omega(a, f) = 1$, следовательно, не выполняется и (30). Хейман, в частности, показал, что существует целая функция $f(z)$, множество $E \subset C$ мощности континуума и такая последовательность $r_k \rightarrow \infty$, что для всех $a \in E$ выполняется $N(r_k, a, f) \leq \ln^2 r_k$, а также $T(r_k, f) \geq r_k$, $k = 1, 2, \dots$. Переходя в случае необходимости к подпоследовательности, не уменьшая общности, можно считать, что

$$r_1 > 1, \quad T(r_1, f) > 1, \quad T(r_{k+1}, f) > 2 T(r_k, f) \quad \text{и}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-1} \ln^2 f_k < \infty. \quad \text{Возьмем } \omega(r) = \{T(r_1, f)\}^{-1}$$

при $r \leq r_1$,

$$\omega(r) = [T(r_{k+1}, f)]^{-1}$$

при $r_k < r \leq r_{k+1}$. Тогда при $r_n \leq r_{n+1}$ выполняется

$$\begin{aligned} \bar{T}_\infty(r, f) &= T(r, f) \omega(r) + \int_1^r T(t, f) d(-\omega(t)) = \\ &= O(1) + \sum_{k=1}^n T(r_k, f) \left(\frac{1}{T(r_k, f)} - \frac{1}{T(r_{k+1}, f)} \right) \geq O(1) + n/2, \end{aligned}$$

т. е. $\bar{T}_\infty(r, f) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. С другой стороны, для любого $a \in E$ и $r_n < r \leq r_{n+1}$ выполняется

$$\begin{aligned} N_\infty(r, a, f) &= \omega(r) N(r, a, f) + \int_1^r N(t, a, f) d(-\omega(t)) = \\ &= O(1) + \sum_{k=1}^n N(r_k, a, f) \left\{ \frac{1}{T(r_k, f)} - \frac{1}{T(r_{k+1}, f)} \right\} \leq \\ &\leq O(1) + \sum_{k=1}^n \frac{\ln^2 r_k}{T(r_k, f)} < O(1) + \sum_{k=1}^n r_k^{-1} \ln^2 r_k, \end{aligned}$$

т. е. $N_\infty(r, a, f) = O(1)$ при $r \rightarrow \infty$ и $\delta_\infty(a, f) = 1$.

Функция $\omega(r)$, которой мы пользовались, имеет разрывы в точках r_k . Очевидно, ее можно „сгладить“ в достаточно малых окрестностях r_k так, что и для непрерывно дифференцируемой функции $\omega(r)$ будет выполняться $\bar{T}_\infty(r, f) \rightarrow \infty$ и $N_\infty(r, a, f) = O(1)$, при $a \in E$, $r \rightarrow \infty$.

Легко видеть, что при условиях теоремы 1 выполняется

$$\bar{m}_\infty(r, f'/f) = o(\bar{T}_\infty(r, f)), \quad r \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Если проследить доказательство теоремы 2, повторяющее обычный вывод второй основной теоремы с помощью леммы о логарифмической производной, то нетрудно прийти к заключению, что в предыдущем примере выполняется

$$\bar{T}_\infty(r, f) = o(\bar{m}_\infty(r, f'/f)), \quad r \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Покажем, что и для характеристик М. М. Джрбашяна для некоторых функций $f(z)$ и $\omega(x)$ может выполняться аналогичное соотношение

$$T_\infty(r, f) = o(m_\infty(r, f'/f)), \quad r \rightarrow \infty \quad (34)$$

вне множества конечной меры. В указываемом ниже примере будет выполняться также (33), что будет показано непосредственно.

Возьмем принадлежащий Хейману ([1], стр. 123) пример целой функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{r_n} \right)^{\lambda_n},$$

где $r_n = 2^{n-1}$, а λ_n — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $n^2 \lambda_{n-1}^2 = o(\ln \lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$. Известно ([1], стр. 124), что тогда $m(r_n, f'/f) > T^2(r_n, f) > 1$, $n \geq n_0$. Пусть $\omega(r) = 1$ при $r \leq r_{n_0}$, а при $r_n < r \leq r_{n+1}$, $n \geq n_0$, $\omega(r) = \{T(r_{n+1}, f)\}^{-1}$. Известно ([1], стр. 124, (1.15)), что $T(r_n, f) \leq (1 + o(1)) n \lambda_{n-1} \ln 2$. С другой стороны

$$\begin{aligned} |f(r_n e^{i\varphi})| &\geq \left(\frac{r_n}{r_{n-1}} \right)^{\lambda_{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{r_n}{r_k} \right)^{\lambda_k} - \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{r_n}{r_k} \right)^{\lambda_k} \geq \\ &\geq 2^{\lambda_{n-1}} - (n-2) 2^{(n-1)\lambda_{n-2}} - 2 = (1 + o(1)) 2^{\lambda_{n-1}}, \\ T(r_n, f) &\geq \lambda_{n-1} \ln 2 + o(1). \end{aligned}$$

Поэтому

$$T(r_n, f) = o(T(r_{n+1}, f)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{T}_\omega(r, f) &= T(r, f) \omega(r) + \int_1^r T(t, f) d(-\omega(t)) = \\ &= O(1) + \sum_{n=n_0+1}^{[\ln r / \ln 2]} T(r_n, f) \left\{ \frac{1}{T(r_n, f)} - \frac{1}{T(r_{n+1}, f)} \right\} = \\ &= O(1) + \sum_{n=n_0+1}^{[\ln r / \ln 2]} (1 + o(1)) \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда видим, что $\bar{T}_\omega(r, f) \rightarrow \infty$ и $\bar{T}_\omega(r, f) = O(\ln r)$ при $r \rightarrow \infty$. Зафиксируем $v > n_0$. Тогда при $r > r_v$,

$$\begin{aligned} \bar{m}_\omega(r, f'/f) &\geq \int_1^r m(t, f'/f) d(-\omega(t)) \geq \\ &\geq \sum_{n=v}^{[\ln r / \ln 2]} m(r_n, f'/f) \left\{ \frac{1}{T(r_n, f)} - \frac{1}{T(r_{n+1}, f)} \right\} \geq \\ &\geq \sum_{n=v}^{[\ln r / \ln 2]} \{T(r_n, f)\}^2 \left\{ \frac{1}{T(r_n, f)} - \frac{1}{T(r_{n+1}, f)} \right\} \geq \\ &\geq T(r_v, f) \sum_{n=v}^{[\ln r / \ln 2]} T(r_n, f) \left\{ \frac{1}{T(r_n, f)} - \frac{1}{T(r_{n+1}, f)} \right\} = \end{aligned}$$

$$= T(r, f) |\bar{T}_\infty(r, f) + O(1)|.$$

Следовательно

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{m}_\infty(r, f'/f) / \bar{T}_\infty(r, f) \geq T(r, f).$$

Перейдя здесь к пределу при $r \rightarrow \infty$, получаем (33). Покажем, что в этом примере выполняется (34). Действительно, при $|z| = r_n$, $n \geq n_0$, выполняется $|f'(z)/f(z)| > 1$ ([1], стр. 124), поэтому

$$\left\{ \omega(r) \ln |f'(re^{i\varphi})/f(re^{i\varphi})| + \sum_{n=n_0}^{[\ln r / \ln 2]} \ln |f'(r_n e^{i\varphi})/f(r_n e^{i\varphi})| (\omega(r_n) - \right. \\ \left. - \omega(r_n + 0)) \right\}^+ > \omega(r) \ln^+ |f'(re^{i\varphi})/f(re^{i\varphi})| + \\ + \sum_{n=n_0}^{[\ln r / \ln 2]} \ln |f'(r_n e^{i\varphi})/f(r_n e^{i\varphi})| (\omega(r_n) - \omega(r_n + 0)) - \\ - \omega(r) \ln^+ |f(re^{i\varphi})/f'(re^{i\varphi})|$$

и

$$\tilde{m}_\infty(r, f'/f) > \bar{m}_\infty(r, f'/f) - \omega(r) m(r, f/f'),$$

но вне множества конечной меры

$$m(r, f/f') \leq T(r, f'/f) + O(1) \leq (2 + o(1)) T(r, f)$$

и

$$\omega(r) m(r, f/f') \leq (2 + o(1)) \omega(r) T(r, f) \leq 2 + o(1).$$

Из (33) следует

$$T_\infty(r, f) \leq \bar{T}_\infty(r, f) = o(\bar{m}_\infty(r, f'/f)) = \\ = o(\tilde{m}_\infty(r, f'/f) + O(1)) = o(m_\infty(r, f'/f)),$$

т. е. имеет место (34).

Замечание. Из (33) следует, что $\ln r = o(\bar{m}_\infty(r, f'/f))$ и

$$\int_1^r \omega(t) d \ln t = o(\bar{m}_\infty(r, f'/f)), \quad r \rightarrow \infty.$$

Это показывает, что (29) может не иметь места, если конечен порядок функции $\bar{T}_\infty(r, f)$ (в нашем случае порядок $\bar{T}_\infty(r, f)$ равен нулю).

4°. Если функция $f(z)$ имеет конечный порядок, то, очевидно, выполняется (29), где характеристика $\bar{m}_\infty(r, f'/f)$ заменена характеристикой М. М. Джрбашяна $m_\infty(r, f'/f)$. В случае, когда $f(z)$ имеет бесконечный порядок, нам удалось получить оценку (21),

где вместо характеристик Дингхаса стоят характеристики М. М. Джрбашяна, лишь при условии, что

$$\ln \frac{1}{\omega(r)} = O\left(\int_1^r \omega(t) d \ln t\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Исключительно с целью сокращения записей будем предполагать, что: 1) $f(0) = 1$; 2) $f(z)$ не имеет нулей и полюсов в единичном круге; 3) $\omega(1) = 1$, и положим $\omega(x) \equiv 1$ при $0 \leq x \leq 1$. Обозначим

$$\ln_{\omega} |f(Re^{i\varphi})| = \omega(R) \ln |f(Re^{i\varphi})| + \int_0^R \ln |f(te^{i\varphi})| d(-\omega(t)),$$

$$\ln_{\omega}^{+} |f(Re^{i\varphi})| = \omega(R) \ln^{+} |f(Re^{i\varphi})| + \int_0^R \ln^{+} |f(te^{i\varphi})| d(-\omega(t)).$$

Тогда

$$m(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ln_{\omega} |f(Re^{i\varphi})|)^{+} d\varphi,$$

$$\bar{m}(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln_{\omega}^{+} |f(Re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Пусть a_{μ} — нули $f(z)$, b_{ν} — полюсы $f(z)$, c_m — последовательность, составленная из нулей и полюсов

$$f(z), \Delta_k(R) = \int_0^R \omega(x) dx^k, \quad S_R(z, \omega) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k / \Delta_k(R).$$

М. М. Джрбашян ([2], теорема 3) доказал следующее обобщение формулы Шварца—Иенсена: при $|z| < R$

$$\begin{aligned} \ln f(z) &= \sum_{|a_{\mu}| < R} \ln \left(1 - \frac{z}{a_{\mu}}\right) - \sum_{|b_{\nu}| < R} \ln \left(1 - \frac{z}{b_{\nu}}\right) - \\ &- \sum_{|a_{\mu}| < R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_R(e^{-i\theta} z, \omega) \ln_{\omega} \left|1 - \frac{Re^{i\theta}}{a_{\mu}}\right| d\theta + \\ &+ \sum_{|b_{\nu}| < R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_R(e^{-i\theta} z, \omega) \ln_{\omega} \left|1 - \frac{Re^{i\theta}}{b_{\nu}}\right| d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_R(e^{-i\theta} z, \omega) \ln_{\omega} |f(Re^{i\theta})| d\theta, \end{aligned} \quad (35)$$

мы воспользовались здесь также формулой (1.56) из [7]. Так как $\Delta_k(R) > R^k \omega(R)$, то

$$|S_R'(z, \omega)| = 2 \left| \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} / \Delta_k(R) \right| \leq \frac{2}{\omega(R)} \sum_{k=1}^{\infty} k |z|^{k-1} / R^k \leq \frac{2R}{\omega(R)} \frac{1}{(R - |z|)^2}. \quad (36)$$

Продифференцировав (35), принимая во внимание (36), получим

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \sum_{|c_m| < R} \frac{1}{|z - c_m|} + \frac{2R}{\omega(R) (R - |z|)^2} \times \\ \times \left\{ \sum_{|c_m| < R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |n_\omega| \left| 1 - \frac{Re^{i\theta}}{c_m} \right| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |n_\omega| |f(Re^{i\theta})| d\theta \right\}. \quad (37)$$

Мы имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |n_\omega| |f(Re^{i\theta})| d\theta = m_\omega(R, f) + m_\omega(R, 1/f), \quad (38)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |n_\omega| \left| 1 - \frac{Re^{i\theta}}{c_m} \right| d\theta = m_\omega \left(R, 1 - \frac{z}{c_m} \right) + m_\omega \left(R, \left(1 - \frac{z}{c_m} \right)^{-1} \right) \leq$$

$$\leq 2 m_\omega \left(R, 1 - \frac{z}{c_m} \right) \leq 2 \bar{m}_\omega \left(R, 1 - \frac{z}{c_m} \right) =$$

$$= 2 \left\{ \omega(R) m \left(R, 1 - \frac{z}{c_m} \right) + \int_1^R m \left(t, 1 - \frac{z}{c_m} \right) d(-\omega(t)) \right\}.$$

Но

$$m \left(r, 1 - \frac{z}{c_m} \right) \leq m \left(r, \frac{z}{c_m} \right) + \ln 2 = \ln^+ \frac{r}{|c_m|} + \ln 2,$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |n_\omega| \left| 1 - \frac{Re^{i\theta}}{c_m} \right| d\theta \leq 2 \left\{ \omega(R) \ln \frac{R}{|c_m|} + \int_1^R \ln^+ \frac{t}{|c_m|} d(-\omega(t)) \right\} + 2 \ln 2,$$

$$\sum_{|c_m| < R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |n_\omega| \left| 1 - \frac{Re^{i\theta}}{c_m} \right| d\theta \leq 2 N_\omega(R, f) + 2 N_\omega(R, 1/f) + \\ + 2 \ln 2 \{n(R, f) - n(R, 1/f)\}. \quad (39)$$

Из (37) — (39) следует

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \sum_{|c_m| < R} \frac{1}{|z - c_m|} + \frac{8R}{\omega(R)(R-|z|)^2} T_\infty(R, f) + \\ + \frac{4R \ln 2}{\omega(R)(R-|z|)^2} \{n(R, f) + n(R, 1/f)\}.$$

Так как при $R' > R$

$$n(R, f) \leq \frac{R'}{R' - R} N(R', f) \leq \frac{R'}{\omega(R')(R' - R)} N_\infty(R', f), \quad (40)$$

а $T_\infty(r, f)$ — неубывающая функция, то

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \sum_{|c_m| < R} \frac{1}{|z - c_m|} + \frac{16R'^2}{\omega(R')^2(R-|z|)^2(R'-R)} T_\infty(R', f).$$

Пусть $|z| \leq r < R < R'$, $R - r = R' - R = (R' - r)/2$. Тогда

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \psi_R(z) + \frac{128R'^2}{\omega(R')^2(R'-r)^2} T_\infty(R', f),$$

где $\psi_R(z) = \sum_{|c_m| < R} \frac{1}{|z - c_m|}$, и

$$\bar{m}_\infty(r, f'/f) \leq \bar{m}_\infty(r, \psi_R(z)) + \\ + \ln^+ \left\{ \frac{128R'^2}{\omega(R')^2(R'-r)^2} T_\infty(R', f) \right\} + \ln 2. \quad (41)$$

Учитывая известные соотношения ([1], стр. 116, 118) и (40), при $1 \leq t < r$ имеем

$$m(t, \psi_R(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \psi_R(te^{i\varphi}) d\varphi = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \{\psi_R(te^{i\varphi})\}^{1/2} d\varphi \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left\{ \sum_{|c_m| < R} \frac{1}{|te^{i\varphi} - c_m|^{1/2}} \right\} d\varphi \leq \\ \leq 2 \ln^+ \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{|c_m| < R} \frac{1}{|te^{i\varphi} - c_m|^{1/2}} \right\} d\varphi \right) + 2 \ln 2 \leq \\ \leq 2 \ln^+ 2 \{n(t, f) + n(t, 1/f)\} + 2 \ln 2 \leq \\ \leq 2 \ln^+ \frac{4R' T_\infty(R', f)}{\omega(R')(R'-r)} + 2 \ln 2$$

$$\bar{m}_\infty(r, \psi_R(z)) = \omega(r) m(r, \psi_R) + \int_1^r m(t, \psi_R) d(-\omega(t)) \leq$$

$$\leq 2 \ln + \frac{4R'T_*(R', f)}{\omega(R')(R'-r)} + 2 \ln 2. \quad (42)$$

Из (41) и (42) следует

$$\begin{aligned} \bar{m}_*(r, f/f) &\leq 3 \ln + T_*(R', f) + 4 \ln \frac{1}{\omega(R')} + \\ &+ 5 \ln + \frac{R'}{R'-r} + 14 \ln 2. \end{aligned} \quad (43)$$

Предположим, что $T_*(r, f) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Выберем $R' = r + r \min [(T_*(r, f))^{-2}, \omega(r)^2]$. Из теоремы Бореля—Неванлинны легко вывести (ср. упражнение 2 на стр. 121 в [1]), что вне множества конечной логарифмической меры выполняются неравенства

$$\frac{1}{\omega(R')} \leq \frac{1}{\omega(R)} + 1 \text{ и } T_*(R', f) \leq T_*(r, f) + 1.$$

Учитывая (43), имеем

$$m_*(r, f/f) \leq \bar{m}_*(r, f/f) \leq 13 \ln + T_*(r, f) + 14 \ln \frac{1}{\omega(r)} + O(1), \quad (44)$$

вне множества конечной логарифмической меры. Наличие слагаемого $-\ln \omega(r)$ является основным недостатком оценки (44). Ее преимущество перед (21) — то, что вместо $\bar{T}_*(r, f)$ стоит $T_*(r, f)$.

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступила 20.V.1974

Ս. Ս. ԴՈԼԴԵՐԴ, Վ. Դ. ՄՈՆՈՆԿՈ. Ընդհանրացված նեվանլինյան բնութագրիչների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ ընայած նրան, որ Մ. Մ. Զրբաշյանի ընդհանրացված բնութագրիչների համար տեղի ունի արժեքների բաշխման տեսության երկրորդ հիմնական թեորեմի որոշ տարրերակ, առաջին հիմնական թեորեմը կարող է տեղի չունենալ:

Ուսումնասիրվում են այն պայմանները, որոնց դեպքում Դինգհասի և Մ. Մ. Զրբաշյանի բնութագրիչների համար տեղի ունի լոգարիթմական անցյալների վերաբերյալ լեմման:

A. A. GOLDBERG, V. D. MOHONKO. *On generalized Nevanlinna's characteristics (summary)*

For generalized Nevanlinna's characteristics of M. M. Jrbashian a modification of the second main theorem of value distribution is shown to be true while the first main theorem may not be valid. Conditions when the lemma about logarithmic derivative for the characteristics of M. M. Jrbashian and A. Dinghas are considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций, Изд. «Наука», М., 1970.
2. М. М. Джрбашян. Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 6, 1970, 453—485.
3. A. Dinghas. Über eine Verallgemeinerung des Nevanlinnaschen Defekthegriffes, Kgl. norske vid. selsk. forhandl., 34, № 25, 1961, 116—123.

4. A. Dinghas. Über den Picard-Borelschen Satz und die Nevanlinnaschen Ungleichungen, J. math. pures et appl., 42, № 3, 1963, 223—251.
5. С. К. Балашов. О целых функциях конечного порядка с корнями на кривых правильного вращения, Изв. АН СССР, сер. матем., 37, № 3, 1973, 603—629.
6. W. K. Hayman. On the Valiron deficiencies of integral functions of infinite order, Ark. för math., 10, № 2, 1972, 163—172.
7. М. М. Джрбашян. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79, № 4, 1969, 517—615.