ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XI, № 2, 1976 Математика

Ф. А. ШАМОЯН

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЗАДАЧЕЙ КРАТНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ H^p

1°. Пусть $D=\{z\colon |z|<1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости, Γ — его граница, пусть, далее, H^p — класс Харди с обычной L^p-нормой.

Определение. Будем говорить (см. [1]), что последовательность отличных друг от друга чисел $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\alpha_j \in D$, $j=1, 2,\cdots$ удовлетворяет условию Карлесона, если существует такое число δ $(0<\delta<1)$, что

$$\prod_{j\neq k}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\geqslant\delta. \tag{1}$$

В работе [2] Л. Карлесон (см. также [3]), доказал следующую теорему

Теорема А. Если последовательность $\{\alpha_j\}$ удовлетворяет условию (1), то для любого $f\in H^p$, $(0<p<+\infty)$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|f(\alpha_j)|^p(1-|\alpha_j|)\leqslant C(\delta)\|f\|_{H^p}^p, \tag{2}$$

где $C(\delta)$ — положительное число, зависящее только от δ.

М. М. Джрбашян в недавней своей работе [4], в связи с задачей кратной интерполяции в пространстве H^2 установил следующую теорему.

Теорема Б. Пусть последовательность $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (1). Тогда для любой функции $f\in H^2$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|f^{(r)}(\alpha_j)|^2(1-|\alpha_j|)^{2r+1}\leqslant C_r{}^*(\delta)\|f\|_{H^2}^2,\ r=1, 2,\cdots. \tag{3}$$

Цель настоящей статьи—распространить теорему Б на пространства H^p $(0<p<+\infty)$. Необходимость в этом возникает в связи с постановкой задачи кратной интерполяции в пространствах H^p, $0<p<+\infty$, приведенной в конце указанной статьи М. М. Джрбашяна. Докажем следующую теорему.

* В дальнейшем $C_r(\alpha, \beta)$ будет обозначать положительное число, зависящее только от α, β.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (1). *Тогда для любой функции* $f \in H^p$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|)^{rp-1} \leqslant C_r(\delta) \|f\|^p_{H^p}, \quad r=1, 2, \cdots. \tag{4}$$

Мы приведем два способа доказательства теоремы 1. Первый из них проходит для всех $0<p<+\infty$, а второй — только для $1 \leqslant p < +\infty$.

2°. Первый способ. Для любой точки $z \in D$ и для любого η, $0<\eta<1$ рассмотрим круг

$$K_\eta(z) = \{\zeta : |\zeta - z| \leqslant \eta(1-|z|)\}. \tag{5}$$

Сначала приведем следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $u(z)$ — *неотрицательная гармоническая функция в* D. *Тогда справедлива следующая оценка*:

$$\max_{t \in K_\eta(z)} u(z) \leqslant \frac{1+\eta}{1-\eta} u(z). \tag{6}$$

Доказательство. Лемма непосредственно следует из неравенства Гарнака.

Доказательство теоремы 1. Согласно интегральной формуле Коши

$$f^{(r)}(\alpha_j) = \frac{r!}{2\pi i} \int_{\partial K_\eta(\alpha_j)} \frac{f(t)}{(t-\alpha_j)^{r+1}} dt, \quad j=1, 2, \cdots.$$

Поэтому имеем

$$|f^{(r)}(\alpha_j)|^p \leqslant \left(\frac{r!}{\eta^{r+1}} \frac{\left(\max\limits_{t \in K_\eta(\alpha_j)} |f(t)|\right)}{(1-|\alpha_j|)^r} \right)^p,$$

или же

$$|f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|^{rp+1} \leqslant \left(\frac{r!}{\eta^{r+1}}\right)^p (1-|\alpha_j|) \left(\max_{t \in K_\eta(\alpha_j)} |f(t)|^p\right). \tag{8}$$

Теперь предположим, что $1<p<+\infty$ и положим

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma P_z(t) |f(t)| \, |dt|,$$

где $P_z(t)$ — ядро Пуассона. Заметим, что $u \in h^{p*}$. Если $v(z)$, $v(0)=0$ сопряженная с u гармоническая функция, то по теореме Марселя Рисса (см. [1], стр. 215)

---

* h^p — класс гармонических функций u в D, для которых

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{0<r<1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < +\infty.$$

$$\|v\|_{h^p} \leqslant C(p)\, \|u\|_{h^p}.$$

Очевидно, если положить $h(z) = u(z) + iv(z)$, то будем иметь $h(z) \in H^p$, пользуясь неравенством (6), получим

$$\max_{t \in K_\eta(\alpha_j)} |f(t)| \leqslant \max_{t \in K_\eta(\alpha_j)} u(t) \leqslant \frac{1+\eta}{1-\eta} u(\alpha_j) \leqslant \frac{1+\eta}{1-\eta} |h(\alpha_j)|. \qquad (9)$$

Теперь, комбинируя оценки (8) и (9), приходим к неравенству

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant \frac{C(p)(r!)^p (1+\eta)^p}{\eta^{p(r+1)}(1-\eta)^p} \sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|)\, |h(\alpha_j)|^p.$$

Наконец, отсюда в силу теоремы А будем иметь

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\eta, \delta, p)\, \|h\|_{H^p}^p \leqslant C_r(\delta, \eta, p)\, \|f\|_{H^p}^p,\quad r = 1, 2, \cdots$$

и теорема 1 доказана в случае $1 < p < +\infty$.

Пусть теперь $0 < p \leqslant 1$, тогда по известной теореме о факторизации (см. [5], стр. 23) функция $f(z)$ представима в следующем виде:

$$f(z) = F(z)\, Q(z), \qquad (10)$$

где $F(z)$ — внутренняя функция, а $Q(z)$ — внешняя. Вновь применяя неравенство (8), получаем

$$|f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\eta)(1-|\alpha_j|)\, (\max_{t \in K_\eta(\alpha_j)} |\varphi(t)|^2),$$

где $\varphi(z) = [Q(z)]^{p/2}$, причем, легко видеть, что

$$\|f\|_{H^p}^p = \|Q\|_{H^p}^p = \|\varphi\|_{H^2}^2.$$

Применяя к функции $\varphi(z)$ неравенство (9) для $p = 2$ приходим к неравенству

$$\max_{t \in K_\eta(\alpha_j)} |\varphi(t)|^2 \leqslant \frac{(1+\eta)^2}{(1-\eta)^2} |\varphi_*(\alpha_j)|^2,$$

где

$$\operatorname{Re} \varphi_*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} P_z(t)\, |\varphi(t)|\, |dt|,$$

$$\operatorname{Im} \varphi_*(0) = 0, \text{ и поэтому } \varphi_* \in H^2.$$

Следовательно, справедливы оценки

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\eta) \sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|)\, |\varphi_*(\alpha_j)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_r(\eta, \delta)\, \|\varphi_*\|_{H^2}^2 \leqslant C_r'(\delta, \eta)\, \|\varphi\|_{H^2}^2 = C_r'(\delta, \eta)\, \|f\|_{H^p}^p,\quad r = 1, 2, \cdots,$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Несложная модификация вышеизложенных рассуждений позволяет получить следующее усиление теорем А и 1.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{\alpha_j\}$ *удовлетворяет условию* (1)

$$f \in H^p,\ 0 < p < +\infty,\ 0 < \eta < 1.$$

Тогда справедливо следующее неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\max_{t \in K_\eta(\alpha_j)} |f^{(r)}(t)|\right)^p (1 - |\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\delta, \eta) \|f\|^p_{H^p},\ r = 0, 1, 2, \cdots. \quad (11)$$

3°. Второй способ. Сначала докажем теорему для пространства H^1. Пусть $f \in H^1$ и $f(z) = F(z)\, Q(z)$, где F — внутренняя, а Q — внешняя часть функции f. Положив $f_1(z) = F(z)\, [Q(z)]^{1/2}$ $f_2(z) = [Q(z)]^{1/2}$, легко видеть, что $f_1, f_2 \in H^2$ и, кроме того, $\|f\|_{H^1} = \|f_1\|_{H^2} \|f_2\|_{H^2}$.

По формуле Лейбница

$$f^{(r)}(z) = \sum_{j=0}^{r} C_r^j f_1^{(r-j)}(z)\, f_2^{(j)}(z).$$

Следовательно

$$|f^{(r)}(z)| \leqslant C_r \sum_{j=0}^{r} |f_1^{(r-j)}(z)|\, |f_2^{(j)}(z)|.$$

Поэтому имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|\, (1 - |\alpha_j|)^{r+1} \leqslant C_r \sum_{k=0}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_1^{(r-k)}(\alpha_j)|\, (1 - |\alpha_j|)^{r + \frac{1}{2} - k} \times \right.$$
$$\left. \times |f_2^{(k)}(\alpha_j)|\, (1 - |\alpha_j|)^{k + \frac{1}{2}} \right).$$

Пользуясь неравенством Шварца и теоремой Б, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|\, (1 - |\alpha_j|)^{r+1} \leqslant$$
$$\leqslant C_r \sum_{k=0}^{r} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} |f_1^{(r-k)}(\alpha_j)|^2 (1 - |\alpha_j|)^{2(r-k)+1} \right]^{1/2} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\sum_{j=1}^{\infty} |f_2^{(k)}(\alpha_j)|^2 (1 - |\alpha_j|)^{2k+1} \right]^{1/2} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_r(\delta) \|f_1\|_{H^2} \|f_2\|_{H^2} = C_r(\delta) \|f\|_{H^1},\ r = 1, 2, \cdots. \quad (12)$$

Теорема 1 доказана в случае $p = 1$. Пусть теперь μ — положительная мера на D, сосредоточенная в точках α_k, с нагрузками $(1 - |\alpha_k|)$, $k = 1, 2, 3, \cdots$,

$$\iint\limits_{D} d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|) < +\infty.$$

Пусть, далее, L^p_μ — пространство всех функций, измеримых по мере μ, для которых $\iint\limits_{D} |f|^p \, d\mu < +\infty$.

Тогда теорема 1 эквивалентна ограниченности оператора $(Tf)(z) = f^{(r)}(z)(1-|z|)^r$, из пространства H^p в L^p_μ.

Поскольку

$$\iint\limits_{D} |Tf|^p \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|)^{rp+1},$$

из теоремы Б, М. М. Джрбашяна и ввиду справедливости нашей теоремы для $p=1$ следует, что T ограничен как оператор из $H^1 \to L^1_\mu$ и $H^2 \to L^2_\mu$. Используя известную теорему Рисса—Торина (см. [6], стр. 144), получим ограниченность T: $H^p \to L^p_\mu$ при $1 < p < 2$. Следовательно, теорема 1 справедлива, если $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Предположим теперь, что $2 < p < +\infty$. Тогда если

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то $1 < q < 2$. Пусть $f \in H^p$ и $g \in H^q$.

Легко видеть, что функция $\varphi(z) = f(z)\, g(z)$ принадлежит пространству H^1.

Ввиду того, что при $r=0$ теорема 1 совпадает с теоремой А, то применяя метод полной математической индукции, получим неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} f^{(r)}(\alpha_j)\, g(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{r+1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{r-1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|)^{r-k+\frac{1}{q}} |g^{(r-k)}(\alpha_j)| \cdot |f^{(k)}(\alpha_j)| \, (1-|\alpha_j|)^{k+\frac{1}{p}} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi^{(r)}(\alpha_j)| \, (1-|\alpha_j|)^{r+1}.$$

Пользуясь неравенством Гельдера и (12), получим

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} f^{(r)}(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{r+\frac{1}{p}} \cdot g(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{\frac{1}{q}} \right| \leqslant C_r(\delta)(\|\varphi\|_{H^1} + \|f\|_{H^p} \|g\|_{H^q}),$$

или же

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} f^{(r)}(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{r+\frac{1}{p}} g(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{\frac{1}{q}}\right| \leqslant C_r(\delta)\,\|f\|_{H^p}\|g\|_{H^q}.$$

Теперь применим интерполяционную теорему Шапиро и Шилдса (см. [3]):

Для любого элемента $w \in l^q$, $\|w\|_{l^q}=1$ существует функция $g \in H^q$, $\|g\|_{H^q} \leqslant A_q(\delta)$ такая, что $g(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{\frac{1}{q}} = w_j$, $j=1, 2, \cdots$.

Следовательно

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|)^{pr+1}\right)^{1/p} =$$

$$= \sup_{\|w\|_{l^q}\leqslant 1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} f^{(r)}(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{r+\frac{1}{p}} w_j\right| \leqslant C_r(\delta, p)\,\|f\|_{H^p},\quad r=1, 2, \cdots.$$

Доказательство закончено.

4°. Приведем, наконец, аналог теоремы 1 для других пространств аналитических функций.

Пусть Ω—любое открытое множество на комплексной плоскости и пусть $A^p(\Omega)$—множество аналитических в Ω функций, для которых

$$\|f\|_{A^p} = \left(\iint_{\Omega} |f(x+iy)|^p\,dxdy\right)^{1/p} < +\infty.$$

Определение. Последовательность $\{\alpha_j\}$, $\alpha_j \in \Omega$, $j=1, 2, \cdots$, удовлетворяет слабому условию Карлесона (или Δ^* условию), если существует такое положительное число δ, что

$$j \neq k,\ |\alpha_j-\alpha_k| > \delta\,(\max(d(\alpha_j\,\partial\Omega),\ d(\alpha_k\,\partial\Omega)),\tag{13}$$

где $d(z, \partial\Omega)$—расстояние от точки z до множества $\partial\Omega$.

Теорема 3. *Пусть* $\{\alpha_j\}$ *удовлетворяет условию* Δ^*, *тогда для любой функции* $f(z) \in A^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p\,[d(\alpha_j, \partial\Omega)]^{rp+2} \leqslant C_r(\delta)\,\|f\|_{A^p}^p,\quad r=0, 1, \cdots.\tag{14}$$

Доказательство. Пусть $C_\rho(\alpha_j)$—окружность радиуса ρ с центром в точке α_j и пусть $0<\rho<\frac{\delta}{2}\,d(\alpha_j\,\partial\Omega)$, тогда

$$f^{(r)}(\alpha_j) = \frac{r!}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(t)}{(t-\alpha_j)^{r+1}}\,dt,$$

или же

$$\rho^{rp+1}\,|f^{(r)}(\alpha_j)|^p \leqslant \left(\frac{r!}{2\pi}\right)^p \int_{-\pi}^{\pi} |f(\alpha_j + \rho e^{i\theta})|^p \rho\, d\theta.$$

Интегрируя это неравенство по ρ в интервале $\left(0, \frac{\delta}{2} d(\alpha_j, \partial\Omega)\right)$, получим

$$|f^{(r)}(\alpha_j)|^p \, [d(\alpha_j, \partial\Omega)]^{rp+2} \leqslant \frac{(r!)^p}{\delta^{rp+2}} \iint_{K_j} |f(x+iy)|^p \, dx\,dy,$$

где

$$K_j = \left\{ t\colon |t-\alpha_j| \leqslant \frac{\delta}{2} d(\alpha_j, \partial\Omega) \right\}.$$

Используя тот факт, что $K_j \cap K_i = \varnothing$ при $j \neq i$, приходим к неравенству

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p \, [d(\alpha_j, \partial\Omega)]^{rp+2} \leqslant C_r(\delta) \, \|f\|^p_{A^p}; \quad r = 0, 1, \cdots.$$

Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору М. М. Джрбашяну за полезное обсуждение.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.IV.1975

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Ներդրման թեորեմներ, կապված H^p տարածություններում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի հետ (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է, որ եթե իրարից տարբեր կոմպլեքս թվերի $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, ($|\alpha_j| < 1$, $j = 1, 2, \cdots$) *հաջորդականությունը բավարարում է հետևյալ պայմանին*

$$\inf_k \prod_{j \neq k}^{\infty} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k} \right| \geqslant \delta > 0,$$

ապա ցանկացած $f \in H^p$, $0 < p < +\infty$ *տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p \, (1 - |\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\delta) \, \|f\|^p_{H^p}, \quad r = 1, 2, \cdots.$$

F. A. SHAMOIAN. *Imbedding theorems connected with problem of multiple interpolation in space* H^p (summary)

Let the sequence of comlpex numbe:s

$$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \ (|\alpha_k| < 1, \ \alpha_k \neq \alpha_j, \ j \neq k, \ k, \ j = 1, 2, \cdots,$$

satisfy the condition

$$\prod_{j \neq k} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k} \right| \geqslant \delta > 0.$$

Then for any function $f \in H^p$ $(0 < p < +\infty)$ the following inequality holds

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(z_j)|^p (1 - |z_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\delta) \|f\|_{H^p}^p, \quad r = 1, 2, \cdots.$$

An analogous theorem for Bergman space A^p is also given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, Изд. ИЛ, М., 1963.
2. *L. Carleson*. An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 80, 1958, 921—930.
3. *H. Shapiro, A. Shields*. On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
4. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H^2, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974,
5. *P. Duren*. Theory H^p spaces, Ac. Press, New York, London, 1970.
6. *А. Зигмунд*. Тригонометрические ряды, т. II, Изд. „Мир", 1965.