ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI. № 2, 1976 Математика

В. И. ГАВРИЛОВ, В. С. ЗАХАРЯН

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ПОДКЛАССОВ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

1°. Пусть D обозначает круг $|z|<1$ и Γ—окружность $|z|=1$. Для произвольной точки $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ обозначим через Γ_θ окружность $\left|z-\frac{1}{2}e^{i\theta}\right|=\frac{1}{2}$, через D_θ — круг $\left|z-\frac{1}{2}e^{i\theta}\right|<\frac{1}{2}$, а для произвольного φ, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, обозначим через $h(\zeta,\varphi)$ прямолинейный отрезок, соединяющий точки $\zeta=e^{i\theta}$ и $(1-e^{-i\varphi}\cos\varphi)\cdot e^{i\theta}$. Другими словами, $h(\zeta,\varphi)$ является хордой круга D_θ, оканчивающейся в точке $\zeta=e^{i\theta}$ и образующей с радиусом в этой точке направленный угол раствора φ, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$; длина хорды $h(\zeta,\varphi)$ равна $\cos\varphi$. Подобласть круга D, заключенная между двумя хордами $h(\zeta,\varphi_1)$, $h(\zeta,\varphi_2)$ и окружностью Γ_θ, обозначим через $\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2)$.

В дальнейшем условимся говорить, что непрерывная на $(0,+\infty)$ функция $H(t)\geqslant 0$ принадлежит классу C_H, если $\lim\limits_{t\to+0}H(t)=+\infty$, $H(t)$ не возрастает на $(0,+\infty)$,

$$\lim_{t\to+0}tH(t)=0,\quad\text{и}\quad\int_0^{\infty}\frac{dt}{tH(t)}<+\infty.$$

Положим

$$\lambda_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)},\ n=1,2,\cdots.\tag{1}$$

Пусть E — произвольное борелевское множество на Γ. Символом $\mathrm{cap}_H E$ мы будем обозначать выпуклую емкость множества E относительно последовательности $\{\lambda_n\}$ в смысле К. В. Темко (см. определение в [1], стр. 364). В случаях

$$H(t)=\frac{1}{t^{1-\alpha}}\ \text{и}\ H(t)=\frac{1}{t}$$

мы получаем обычные α-емкость, $0<\alpha<1$, $\mathrm{cap}_\alpha E$ и логарифмическую емкость $\mathrm{cap}_0 E$ множества E.

Рассмотрим мероморфую в D функцию $f(z)$, принимающую значения на сфере Римана Ω. Сферическую производную функции $f(z)$ обозначим через $\rho(f(z))$,

$$\rho(f(z)) = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}.$$

Если $f(z)$ стремится к определенному пределу, когда $z \to \zeta = e^{i\theta}$, оставаясь на хорде $h(\zeta, \varphi)$, то этот предел обозначим через $f(\zeta, \varphi)$. Если существует $\lim f(z)$, когда $z \to \zeta = e^{i\theta}$, $z \in \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, и предел не зависит от выбора угла $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$, то этот предел обозначим через $f(\zeta)$.

Рассмотрим (конечный или бесконечный) интеграл

$$\Lambda_f(\zeta, \varphi) = \int\limits_{h(\zeta, \varphi)} \rho(f(z))\,|dz|. \tag{2}$$

Очевидно, если для каких-то ζ и φ значение $\Lambda_f(\zeta, \varphi) < +\infty$, то существует определенный предел $f(\zeta, \varphi)$.

2°. Будем говорить, что мероморфная в D функция $f(z)$ принадлежит классу T_H, если $H \in C_H$ и

$$\iint\limits_{|z|<1} (1-|z|)\,H(1-|z|)[\rho(f(z))]^2\,dxdy < +\infty,\ z = x+iy. \tag{3}$$

Это определение по форме несколько отличается от обычного определения класса T_H (см., например, [2]), согласно которому $f \in T_H$, если

$$T_H(f) = \int\limits_0^1 A(t)\,H(1-t)\,dt < +\infty \text{ при } \int\limits_0^1 H(1-t)\,dt < +\infty$$

и

$$T_1(f) = \lim_{t \to 1-0} A(t) < +\infty \text{ при } \int\limits_0^1 H(1-t)\,dt = +\infty,$$

где

$$A(t) = \iint\limits_{|z|<t} [\rho(f(z))]^2\,dxdy.$$

При этом от функции $H \in C_H$ требовалось дополнительно, чтобы

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{xH(x)} \int\limits_0^x H(t)\,dt = c,\ c \neq 0,\ \infty.$$

Для доказательства эквивалентности этих определений, поменяем порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 H(1-t)\,dt \iint\limits_{|z|<t} [\rho(f(re^{i\theta}))]^2\,rdrd\theta =$$

$$= \iint\limits_{|z|<1} [\rho(f(re^{i\theta}))]^2 \, rdr\, d\theta \int\limits_r^1 H(1-t)\, dt$$

и заметим, что

$$\int\limits_r^1 H(1-t)\, dt = \int\limits_0^{1-r} H(t)\, dt \sim c\,(1-r)\, H(1-r), \quad r \to 1-0.$$

Голоморфную в D функцию $f(z)$ отнесем к классу T_H^*, если $H \in C_H$ и

$$\iint\limits_{|z|<1} (1-|z|)\, H(1-|z|)\, |f'(z)|^2\, dxdy < +\infty. \tag{4}$$

Согласно определению, при каждой фиксированной $H \in C_H$ имеем $T_H^* \subset T_H$.

3°. А. Бёрлингу [3] и Л. Карлесону [4], стр. 69, принадлежит утверждение, что для любой функции $f(z)$, принадлежащей классу T_H,

$$H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}, \; 0 \leqslant \alpha < 1,$$

точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых $f(z)$ не имеет предела $f(\zeta)$, образуют множество E, $\mathrm{cap}_\alpha E = 0$, $0 \leqslant \alpha < 1$. (Случай $\alpha = 0$ принадлежит Бёрлингу; случай $0 < \alpha < 1$ — Карлесону). В статье [5] получено усиление этого факта: для любой функции $f(z)$, принадлежащей классу T_H,

$$H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}, \; 0 \leqslant \alpha < 1,$$

точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых $\Lambda_f(\theta, \varphi) = +\infty$ хотя бы для одного φ, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, образуют множество E, $\mathrm{cap}_\alpha E = 0$, $0 \leqslant \alpha < 1$. (Случай $\alpha = 0$ ранее рассмотрен М. Цудзи [6]). В статье [2] доказано, что для любой функции $f(z) \in T_H$ точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых $f(z)$ не имеет предела $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta})$, образуют множество E, $\mathrm{cap}_H E = 0$. Весьма правдоподобной гипотезой остается утверждение, что в точках $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, $\mathrm{cap}_H E = 0$, функция $f(z) \in T_H$ имеет определенный угловой предел $f(\zeta)$. В настоящей статье нам удается доказать следующие факты.

Теорема 1. *Пусть мероморфная в D функция $f(z)$ принадлежит классу T_H. Тогда в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, кроме, быть может, некоторого множества $E \subset \Gamma$, $\mathrm{cap}_H E = 0$, интегралы $\Lambda_f(\zeta, \varphi)$, определяемые (2), конечны для почти всех φ, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, и для этих значений φ существуют определенные пределы $f(\zeta, \varphi)$, равные между собой.*

Теорема 2. *Пусть голоморфная в D функция $f(z)$ принадлежит классу T^*_H. Тогда на Γ можно указать такое множество E,* $\mathrm{cap}_H E=0$, *что в каждой точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma\setminus E$ существует конечный предел $f(\zeta)$ и интегралы*

$$\lambda_f(\zeta,\varphi)=\int\limits_{h(\zeta,\varphi)}|f'(z)|\,|dz| \tag{5}$$

конечны для всех φ, $-\pi/2<\varphi<\pi/2$.

4°. В доказательствах теорем 1 и 2 мы будем придерживаться схемы, использованной в [5]. Вычислительные части доказательств мы выделим в виде лемм.

Основная лемма. *Пусть действительная функция $u(z)\geqslant 0$ определена и непрерывна в D и удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_{|z|<1}(1-|z|)\,H(1-|z|)[u(z)]^2\,dxdy<+\infty, \tag{6}$$

где $H\in C_H$, и пусть

$$l(\zeta,\varphi)=\int\limits_{h(\zeta,\varphi)}u(z)\,|dz| \tag{7}$$

и

$$L(\zeta)=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}l(\zeta,\varphi)\cos\varphi\,d\varphi. \tag{8}$$

Тогда точки $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$, в которых $L(\zeta)=+\infty$, образуют множество E, $\mathrm{cap}_H E=0$.

Доказательство. Допустим напротив, что $\mathrm{cap}_H E>0$. Тогда, согласно определению ([1], стр. 364), на множестве $E_t=\{t\in[0,2\pi],\ e^{it}\in E\}$ существует такое распределение $d\mu_H(t)$ единичной массы, что потенциал

$$V_H(r,\theta)=\int\limits_0^{2\pi}Q(r,\theta-t)\,d\mu_H(t) \tag{9}$$

ограничен: $V_H(r,\theta)\leqslant V_H<+\infty$ в $|z|<1$, где

$$Q(r,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n r^n\cos nx$$

и последовательность $\{\lambda_n\}$ определяется формулами в (1). Рассмотрим также функцию

$$U_H(r,\theta)=\int_0^{2\pi}\ln\frac{1}{|e^{it}-re^{i\theta}|}\,d\mu_H(t),$$

гармоническую и ограниченную, $|U_H(r,\theta)|\leqslant U_H<+\infty$ в $|z|<1$.

Нам понадобятся следующие два свойства распределения $d\mu_H(t)$ и функции $U_H(r,\theta)$.

Лемма 1. ([1], стр. 368). *Если*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt\,d\mu_H(t),\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin nt\,d\mu_H(t),\quad n=1,2,\cdots, \tag{10}$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\,\lambda_n<+\infty. \tag{11}$$

Лемма 2. *Для функции* $U_H(r,\theta)$ *имеем*

$$\iint\limits_{|z|<1}\frac{1}{(1-r)\,H(1-r)}\left[\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}\right]^2 rdrd\theta\leqslant K_H<+\infty. \tag{12}$$

5°. Доказательство леммы 2. Имеем

$$\ln\frac{1}{|e^{i\theta}-re^{it}|}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\theta-t)}{n}r^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}(\cos n\theta\cdot\cos nt+\sin n\theta\cdot\sin nt).$$

Используя обозначения (10) и теорему Парсеваля, получим

$$\iint\limits_{|z|<1}\frac{1}{(1-r)\,H(1-r)}\left[\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}\right]^2 rdrd\theta=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\int_0^1\frac{r^{2n-1}}{(1-r)\,H(1-r)}\,dr=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\left[\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{r^{2n-1}}{(1-r)\,H(1-r)}\,dr+\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\frac{r^{2n-1}\,dr}{(1-r)\,H(1-r)}\right]. \tag{13}$$

Оценим каждый из интегралов в квадратных скобках в (13).

Используя свойства функции $H(t)$ и (1), имеем

$$c_1\lambda_n \leqslant \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{tH(t)} = \int\limits_n^{\infty} \frac{dt}{tH\left(\frac{1}{t}\right)} \leqslant c_2\cdot\lambda_n,\quad n=1, 2, \cdots, \tag{14}$$

где $0 < c_1 < c_2 < +\infty$. Кроме того

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r^{2n-1}}{(1-r)\,H(1-r)}\,dr = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{(1-t)^{2n-1}}{tH(t)}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\frac{1}{n}H\left(\frac{1}{n}\right)} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} (1-t)^{2n-1}\,dt \leqslant \frac{c_3}{H\left(\frac{1}{n}\right)},\quad n=1, 2, \cdots. \tag{15}$$

Имеем также

$$\int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} \frac{r^{2n-1}\,dr}{(1-r)\,H(1-r)} \leqslant \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} \frac{dr}{(1-r)\,H(1-r)} = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{tH(t)} \leqslant c_2\lambda_n. \tag{16}$$

Из неравенства (14) следует, что

$$\lambda_n \geqslant \frac{1}{c_2}\int\limits_0^{1/n} \frac{dt}{tH(t)} \geqslant \frac{1}{c_2}\,\frac{1}{\frac{1}{n}H\left(\frac{1}{n}\right)}\int\limits_0^{1/n} dt = \frac{1}{c_2H\left(\frac{1}{n}\right)}. \tag{17}$$

Объединяя (17) и (15), получим

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r^{2n-1}}{(1-r)\,H(1-r)}\,dr \leqslant c_3\cdot c_2\cdot\lambda_n,\quad n=1, 2, \cdots. \tag{18}$$

Подставляя (18) и (16) в неравенство (13), получим

$$\iint\limits_{|z|<1} \frac{1}{(1-r)\,H(1-r)}\left[\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}\right]^2 r\,dr\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)(c_2\lambda_n + c_3\,c_2\lambda_n). \tag{19}$$

В силу леммы 1, правая часть в (19) конечна, и доказательство леммы 2 завершено.

6°. Продолжим доказательство основной леммы. Обозначим через I интеграл

$$I=\iint\limits_{|z|<1} u(re^{i\theta})\,\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}\,r\,dr\,d\theta. \tag{20}$$

Используя интегральное неравенство Коши—Буняковского, неравенства (6) и (12), получим

$$I^2\leqslant \iint\limits_{|z|<1}(1-r)\,H(1-r)[u(re^{i\theta})]^2\,r\,dr\,d\theta\times$$

$$\times\iint\limits_{|z|<1}\frac{1}{(1-r)\,H(1-r)}\left|\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}\right|^2 r\,dr\,d\theta<+\infty. \tag{21}$$

Как и в ([5]), рассмотрим функцию $p(r,\theta,t)$,

$$p(r,\theta,t)=r\,\frac{\cos(\theta-t)-r}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}$$

и перепишем интеграл (20) в виде

$$I=\iint\limits_{|z|<1} u(re^{i\theta})\,dr\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}p(r,\theta,t)\,d\mu_H(t) \tag{22}$$

(ср. [5], формула (15)).

Докажем, что существует (не обязательно конечный) интеграл Лебега от функции $q(r,\theta,t)=u(re^{i\theta})\cdot p(r,\theta,t)$ в области $T=D\times\times[0,2\pi]$. Для этого достаточно показать, что функция $q(r,\theta,t)$ суммируема на подмножестве T^- множества T, на котором $q(r,\theta,t)\leqslant 0$. При фиксированном $t\in[0,2\pi]$ функция $p(r,\theta,t)$ отрицательна в точках $z=re^{i\theta}\in D\diagdown D_t$ и только в них и удовлетворяет неравенству $|p(r,\theta,t)|\leqslant r$ в $D\diagdown D_t$. Рассмотрим повторный интеграл

$$J=\int\limits_0^{2\pi}d\mu_H(t)\iint\limits_{D\diagdown D_t}|p(r,\theta,t)|\,u(re^{i\theta})\,dr\,d\theta.$$

Используя оценку для $|p(r,\theta,t)|$ в $D\diagdown D_t$ и неравенство Коши—Буняковского, получим

$$J\leqslant\int\limits_0^{2\pi}d\mu_H(t)\iint\limits_{D\diagdown D_t}u(re^{i\theta})\,r\,dr\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\iint\limits_{|z|<1}u(re^{i\theta})\,r\,dr\,d\theta\leqslant\left[\iint\limits_{|z|<1}\frac{r\,dr\,d\theta}{(1-r)\,H(1-r)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\iint\limits_{|z|<1}(1-r)\,H(1-r)[u(re^{i\theta})]^2\,r\,dr\,d\theta\right\}^{1/2}\leqslant K_H^1<+\infty.$$

Учитывая теорему Фубини, заключаем, что интеграл (20) и равный ему интеграл (22) можно переписать в виде

$$J=\int_0^{2\pi} d\psi_H(t)\iint_D u(re^{i\theta})\,p(r,\theta,t)\,drd\theta.$$

Дальнейшее доказательство основной леммы полностью совпадает с доказательством, приведенном в [5], стр. 7—8.

Замечание. Анализируя доказательство основной леммы, можно заключить, что ее утверждение остается справедливым, если считать функцию $u(z)\geqslant 0$ измеримой по Борелю в D.

7°. Прежде чем перейти к доказательству теорем 1 и 2, отметим такое следствие основной леммы.

Теорема 3. *Пусть комплексная функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в D и удовлетворяет условию*

$$\iint_{|z|<1}(1-|z|)\,H(1-|z|)\,|\mathrm{grad}\,f(z)|^2\,dxdy<+\infty,$$

где $H\in C_H$. Тогда на Γ существует такое множество E, $\mathrm{cap}_H\,E=0$, что в каждой точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma\setminus E$ для почти всех $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ интегралы

$$m_f(\zeta,\varphi)=\int_{h(\zeta,\varphi)}|\mathrm{grad}\,f(z)|\,|dz|$$

конечны и существуют конечные и равные между собой пределы $f(\zeta,\varphi)$.

Действительно, согласно основной лемме, в которой $u(z)=|\mathrm{grad}\,f(z)|$, на Γ существует такое множество E_1, $\mathrm{cap}_H\,E_1=0$, что для каждой точки $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma\setminus E_1$ функция $m_f(\zeta,\varphi)$ является суммируемой функцией аргумента $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому значения $m_f(\zeta,\varphi)$ конечны для почти всех $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ и для этих значений φ существуют конечные пределы $f(\zeta,\varphi)$. Рассмотрим точку $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma\setminus E_1$, в которой $f(\zeta,\varphi_1)\neq f(\zeta,\varphi_2)$ хотя бы для двух значений $\varphi_1\neq\varphi_2$, $\varphi_1,\varphi_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Такая точка $\zeta=e^{i\theta}$ является точкой неопределенности для $f(z)$. Согласно теореме Багемила (см., например, [7], стр. 74), множество точек неопределенности для произвольной функции $f(z)$ не более чем счетно. Поскольку счетное множество M точек на Γ имеет $\mathrm{cap}_H\,M=0$ для любой $H\in C_H$, доказательство теоремы 3 заканчивается.

8°. Доказательство теоремы 1 проводится совершенно так же, как и доказательство теоремы 3 с заменой функции $u(z) = |\mathrm{grad}\, f(z)|$ на функцию $u(z) = \varphi(f(z))$.

Утверждение теоремы 1 можно дополнить информацией о поведении функции $f(z)$ около хорды $h(\zeta, \varphi)$, $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, по которой $\Lambda_f(\zeta, \varphi) = +\infty$.

Для произвольных точек $a, b \in D$ положим

$$\sigma(a, b) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad u = \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right|,$$

и обозначим через $D(a, \varepsilon) = \{z \in D, \sigma(z, a) < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$, называют P-последовательностью для мероморфной функции $f(z)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой последовательности $\{z_{n_\nu}\}$ функция $f(z)$ принимает в объединении $\bigcup\limits_{\nu} D(z_{n_\nu}; \varepsilon)$ бесконечно часто каждое значение на Ω, за исключением самое большее двух значений. Каждую жорданову кривую $L \subset D$, содержащую по крайней мере одну P-последовательность функции $f(z)$, назовем P-кривой для $f(z)$.

Совершенно те же рассуждения, что и в [8], стр. 954, ведут к заключению в теореме 1, что

любая хорда $h(\zeta, \varphi)$, $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, по которой $\Lambda_f(\zeta, \varphi) = +\infty$, является P-хордой функции $f(z)$.

9°. Доказательство теоремы 2. Если в условиях основной леммы положить $u(z) = |f'(z)|$, то можно заключить, что существует такое множество $E_1 \subset \Gamma$, $\mathrm{cap}_{ll} E_1 = 0$, что в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E_1$ интегралы $\lambda_f(\zeta, \varphi)$ конечны для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и для этих значений φ существуют конечные и равные между собой пределы $f(\zeta, \varphi)$.

Рассмотрим такие точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, для которых можно указать по крайней мере один угол $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ такой, что предельное множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2))$ функции $f(z)$ вдоль угла $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ совпадает с Ω. Увеличив, если необходимо, раствор угла $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, будем считать, что для значений φ_1 и φ_2 интегралы $\lambda_f(\zeta, \varphi_1)$ и $\lambda_f(\zeta, \varphi_2)$ конечны. Рассмотрим два множества

$$C_1(f, \zeta) = \bigcup_{z \in h(\zeta, \varphi_1)} \left\{ f(z); |z| \geqslant \frac{1}{2} \right\} \text{ и } C_2(f, \zeta) = \bigcup_{z \in h(\zeta, \varphi_2)} \{f(z); |z| \geqslant 1/2\},$$

и пусть $C(f, \zeta)$ обозначает замыкание множества $C_1(f, \zeta) \cup C_2(f, \zeta)$. Множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)) \setminus C(f, \zeta)$ содержит значение ∞. Так как это значение является исключительным значением для $f(z)$, то согласно теореме Иверсена—Гросса ([7], стр. 100), значение ∞ является асимптотическим значением функции $f(z)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$. Следовательно, точка $\zeta = e^{i\theta}$ является точкой неопределенности функции $f(z)$, и множество таких точек счетно. Присоединяя это множество к множеству E_1, получим множество E, $\mathrm{cap}_H E = 0$.

В каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ предельное множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2))$ по каждому углу $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ не совпадает с Ω, и по почти всем хордам $h(\zeta, \varphi)$ существуют конечные и равные между собой пределы $f(\zeta, \varphi)$. Согласно теореме Линделефа ([7], стр. 17), в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ существует конечный предел $f(\zeta) = f(\zeta, \varphi)$. Теперь факт, что интегралы $\lambda_f(\zeta, \varphi)$ конечны для всех значений $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ в точках $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ устанавливается совершенно так же, как в [5], стр. 11.

10°. В статье [5] была доказана некоторая теорема единственности для мероморфных функций $f(z)$ в зависимости от классификации значений $a \in \Omega$, принимаемых функцией $f(z)$. Развивая эту классификацию, введем следующие обозначения. Пусть $\Omega(a, \delta)$ обозначает открытый круг на Ω с центром в точке $a \in \Omega$ и радиуса $\delta > 0$. Обозначим через $D(a, \delta)$ конечную или счетную совокупность областей, лежащих в D и представляющих собой полный прообраз круга $\Omega(a, \delta)$ при отображении $w = f(z)$. Для $H \in C_H$ положим

$$A_H(a, \delta) = \iint\limits_{D(a, \delta)} (1-r)\, H(1-r)\, [\rho(f(re^{i\theta}))]^2\, r\,dr\,d\theta$$

и

$$n_H(a) = \limsup_{\delta \to 0} \frac{A_H(a, \delta)}{\pi\delta^2}.$$

Будем говорить, что значение $a \in \Omega$ является B_H-нормальным значением функции $f(z)$, если $n_H(a) < +\infty$. В случае

$$H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}},\ 0 < \alpha < 1,$$

получаем определение 1 из [5].

Теорема 4. *Если* $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$ *мероморфна в* D *и* $a \in \Omega$ *является* B_H*-нормальным значением функции* $f(z)$*, то точки* $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$*, в которых* $f(\zeta) = a$*, образуют множество* E, $\mathrm{cap}_H E = 0$.

Доказательство этой теоремы проводится совершенно так же, как доказательство ее в случае

$$H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}},\ 0 \leqslant \alpha < 1$$

(см. [5], стр. 13—15)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 24.XI.1974

Վ. Ի. ԳԱՎՐԻԼՈՎ, Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ. Սահմանափակ տեսքի մերոմորֆ ֆունկցիաների ենթադասի բացառիկ բազմությունների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում է միավոր շրջանում սահմանափակ տեսքի մերոմորֆ ֆունկցիաների ենթադաս, որը սահմանված է սֆերիկ ածանցյալի և դրական կիսաառանցքի վրա անընդհատ և ոչ-բացասական որոշ $H(t)$ ֆունկցիայի օգնությամբ։

Այդ $H(t)$ ֆունկցիայի միջոցով սահմանված որոշակի հաջորդականության նկատմամբ ուռուցիկ ունակության տերմիններով հնարավոր է լինում տալ նշված ենթադասի ֆունկցիաների բացառիկ բազմությունների բնութագրումը։

Վերջում բերվում է մերոմորֆ ֆունկցիաների մասին միակության թեորեմ, կախված ֆունկցիայի կողմից ընդունված արժեքների տարբերակումից։

V. I. GAVRILOV, V. S. ZACHARIAN. *On exclusive sets of subclasses of meromorphic functions of bounded type* (summary)

The article considers a subclass of meromorphic functions in the unite disc.

Characterisation of the exclusive sets of the functions belonging to the subclass is obtained in terms of convex capacity by a sequence.

At the and a uniqueness theorem for meromorphic functions is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961.
2. *В. С. Захарян.* О радиальных предельных значениях одного класса функций, мероморфных в круге, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, №34, 1963, 801—818.
3. *A. Beurling.* Ensembles exceptionnels, Acta math., 72, 1—2, 1940, 1—13.
4. *Л. Карлесон.* Избранные проблемы теории исключительных множеств, М., Изд. „Мир", 1971.
5. *В. И. Гаврилов.* О теоремах Бёрлинга, Карлесона и Цудзи относительно исключительных множеств, Матем. сб., 94 (136): № 5, I, 1974, 3—15.
6. *M. Tsuji.* Beurling's theorem on exceptional sets, Tôhoku math. J., 2, 1950, 113—125.
7. *К. Носиро.* Предельные множества, М., ИЛ, 1963.
8. *В. И. Гаврилов.* Об одной теореме Цудзи, Сибирск. матем. журнал, 14, № 5, 1973, 951—956.