Б. А. ГОЛИНСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ
 ОТ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В в е д е н и е

Рассмотрим многочлены

$$\Phi_n(z) = x_n z^n + \dots; x_n \equiv x_n(\varphi) > 0, n = 0, 1, 2, \dots,$$

ортонормированные на единичной окружности $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (сокращенно о.н.м.) относительно 2π -периодической неотрицательной суммируемой функции $\varphi(\theta)$, то есть удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(e^{i\theta}) \overline{\Phi_m(e^{i\theta})} \varphi(\theta) d\theta = \delta_{nm}, n=0, 1, 2, \dots.$$

Функцию $\varphi(\theta)$ называют весом.

Как ведут себя многочлены $\Phi_n(z)$ при $n \rightarrow \infty$?

На этот вопрос впервые ответил Г. Серё (см. [1], гл. XII): если

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \varphi(t) dt > -\infty,$$

то равномерно для $|z| \geq R > 1$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^{-n} \Phi_n(\zeta) = [\overline{D}(\zeta^{-1}; \varphi)]^{-1}; \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(z) = 0 (|z| \leq r < 1), \quad (0.1)$$

где функция Г. Серё

$$D(z, \varphi) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \ln \varphi(t) dt \right\}, z = re^{i\theta}.$$

Известно, что

$$D^{-1}(0, \varphi) \equiv x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Граничные значения функции Г. Серё

$$D(e^{i\theta}; \varphi) = \lim_{r \rightarrow 1-0} D(re^{i\theta}, \varphi) = \sqrt{\overline{\varphi(\theta)}} \exp \left\{ \frac{i}{2} \tilde{f}(\theta) \right\},$$

$$\tilde{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} dt, f(t) = \ln \varphi(t)$$

существуют для почти всех $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Важное значение в теории о.н.м. имеет задача тауберова типа: возможность замены порядка предельного перехода

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [\Phi_n(e^{i\theta}) e^{-in\theta}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow 1+0} [\Phi_n(\zeta) \zeta^{-n}] = \lim_{R \rightarrow 1+0} \lim_{n \rightarrow \infty} \{\Phi_n(\zeta) \zeta^{-n}\} = \\ &= \lim_{R \rightarrow 1+0} [\overline{D}(\zeta^{-1}, \varphi) = \overline{D}(e^{i\theta}; \varphi)]^{-1}, \quad \zeta = R e^{i\theta}, \end{aligned}$$

то есть получения асимптотического представления (а.п.) для о.н.м.:

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta} \overline{D}(e^{i\theta}, \varphi)^{-1} + o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (0.2)$$

равномерно на всей единичной окружности $K_{1\pm}$: $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ или на части ее $K_{(\alpha, \beta)}$: $z = e^{i\theta}$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $[\alpha, \beta] \subset (-\pi, \pi)$.

Более тонкая задача состоит в получении асимптотической формулы (а.ф.)

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta} \overline{D}(e^{i\theta}, \varphi)^{-1} + \rho_{n,0}(\theta) \quad (0.3)$$

с оценкой (сверху) для $\rho_{n,0}(\theta)$ в зависимости от структурных свойств веса.

Первую задачу (а.п. (0.2)) решил впервые Г. Сегё (в 1921 г.), совершив предельный переход при $R \rightarrow 1+0$ в формуле (0.1), но для существования граничных значений функции Г. Сегё потребовалось (при этом методе), чтобы положительный вес был дважды дифференцируем.

В 1931 г. Г. Сегё, опираясь на идеи С. Н. Бернштейна (см. [2]), усовершенствовал свой метод (см. [1], стр. 311) и получил а.ф. (0.3) с $\rho_{n,0}(\theta) \leq B (\ln n)^{-\varepsilon}$ при условии, что вес положителен и удовлетворяет условию Дини—Липшица:

$$|\varphi(\theta + \delta) - \varphi(\theta)| \leq B_0 \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^{-1-\varepsilon}, \quad B, B_0, \varepsilon > 0; \quad \theta, \theta + \delta \in [-\pi, \pi].$$

Такое резкое снижение ограничений на вес оказалось возможным потому, что Г. Сегё производил все вычисления на единичной окружности.

В дальнейшем а.ф. (0.3) для $K_{(\alpha, \beta)}$ при условии, что вес положителен на отрезке $[\alpha, \beta]$ и на нем удовлетворяет условию Дини—Липшица, была доказана Я. Л. Геронимусом (см. [3], стр. 91), а при других и более общих условиях на вес для $K_{2\pi}$ и $K_{(\alpha, \beta)}$ — автором (см. [4]). Для о.н.м. на достаточно гладком замкнутом контуре а.ф. при весьма общих условиях была получена П. К. Суетиным (см. [5], [6]).

Х. Хёруп впервые (см. [7]) получил а.п. для производных от о.н.м. в точке $z = e^{i\theta_0}$:

$$\Phi_n(z_0) = n z_0^{n-1} \overline{D}(z_0; \varphi)^{-1} + o(n) \quad (0.4)$$

при условиях:

(а) $0 < m_0 \leq \varphi(\theta) \leq M$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, (б) $\varphi(\theta) \in V(-\pi, \pi)$ (функция $\varphi(\theta)$ с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$), (в) существует $f(\theta_0) = \overline{\ln \varphi(\theta_0)}$.

Доказательство (0.4) в [7] связано с обобщением известного неравенства Г. Сегё (см. [1], стр. 314) и с применением тригонометрических сумм Г. Фройда — Т. Ганеллиуса [8], односторонне приближающих функцию $\varphi(\theta)$ из $V(-\pi, \pi)$. Заметим, что при тех же условиях на вес а.п. (0.2) в точке $e^{i\theta}$ было ранее получено Г. Фройдом (см. [9]).

На первый взгляд может показаться, что а.п. (0.4) можно получить, продифференцировав обе части формулы (0.1). (Это сделать можно для $|\zeta| \geq R > 1$, так как в этой области имеет место равномерная сходимость левой ее части к правой) с последующим предельным переходом на единичную окружность $|\zeta| = 1$. Однако при таком методе появляется производная от функции Г. Сегё, которая, будучи регулярной в области $|\zeta| \geq R > 1$, может вообще не существовать при $|\zeta| = 1$ и для ее существования потребовались бы дополнительные ограничения на вес.

В настоящей работе получена а.ф.

$$\Phi_n'(z) = pz^{n-1} \overline{|D(z; \varphi)|}^{-1} + p \varphi_{n,1}(\theta), \quad z = e^{i\theta} \quad (0.5)$$

для $K_{2\pi}$ и $K_{(\alpha, \beta)}$ с применением усовершенствованного метода Г. Сегё.

Это связано с весьма громоздкими вычислениями (даже если в случае первой производной) и с применением теорем конструктивной теории функций вещественной переменной, но зато этот метод позволяет получить а.ф. (0.5) при тех же условиях на вес, при которых получена а.ф. для самих о.н.м. (см. [4]).

В этом смысле здесь проявляется аналогия между результатами Х. Хёрупа и Г. Фройда.

Введем некоторые обозначения.

Класс 2π -периодических непрерывных на всей числовой оси функций обозначим через $C_{2\pi}$.

Если $|G| = \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |G(\theta)|$, то

$$\Omega(\delta, G) = \max_{|h| < \delta} \|G(\theta + h) - G(\theta)\|, \quad G(\theta) \in C_{2\pi}$$

Если $g(\theta)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta] \subset (-\pi, \pi)$: $g(\theta) \in C(\alpha, \beta)$, то

$$\|g\|_{[\alpha, \beta]} = \max_{\alpha \leq \theta \leq \beta} |g(\theta)|, \quad \omega(\delta, g) = \max_{|h| < \delta} \|g(\theta + h) - g(\theta)\|_{[\alpha', \beta']},$$

$$\delta_0 = \min(\alpha' - \alpha, \beta - \beta'). \quad (0.6)$$

Если $F(\theta) \in L_p(-\pi, \pi)$ для всякого p ($1 \leq p < \infty$), то

$$\|F\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \Omega_p(\delta, F) = \sup_{|h| < \delta} \|F(\theta + h) - F(\theta)\|_p. \quad (0.7)$$

Известна формула Кристоффеля—Дарбу (см. [1], стр. 300):

$$K_n(z, \zeta; \varphi) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Phi_\nu(z) \overline{\Phi_\nu(\zeta)} = \frac{\Phi_n^*(z) \overline{\Phi_n^*(\zeta)} - \Phi_n(z) \overline{\Phi_n(\zeta)}}{1 - z \overline{\zeta}}, \quad (0.8)$$

где

$$\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

В § 1 настоящей работы применяется следующая теорема (А) (см. [10]). Для тригонометрических сумм $T_n(\theta)$ порядка $\leq n$ таких, что

$$\|G - T_n\| \leq B_1 \varepsilon_n^{(1)}, \quad G(\theta) \in C_{2\pi} \quad (0.9)$$

имеем

$$\|T_n^{(m)}\| \leq B_2 \left\{ \varepsilon_n^{(1)} + \Omega^{(m)}\left(\frac{1}{n}, G\right) \right\} n^m, \quad (0.10)$$

m — целое число, $\Omega^{(m)}(\delta, G)$ — m -ый модуль непрерывности в пространстве $C_{2\pi}$, $\Omega^{(1)}(\delta, G) \equiv \Omega(\delta, G)$.

В § 2 применяется локальный аналог теоремы (А):

Теорема (А') (см. [11]). Для тригонометрических сумм $t_n(\theta)$ порядка $\leq n$ таких, что

$$\|g - t_n\|_{(\alpha, \beta)} \leq B_3 \varepsilon_n^{(2)}, \quad g(\theta) \in C(\alpha, \beta), \quad (0.9')$$

имеем

$$\|t_n^{(m)}\|_{(\alpha', \beta')} \leq B_4(\alpha, \alpha', \beta', \beta) \left\{ \varepsilon_n^{(2)} + \omega^{(m)}\left(\frac{1}{n}, g\right) \right\} n^m, \quad (0.10')$$

где $\omega^{(m)}(\delta, g)$ — m -ый модуль непрерывности в пространстве $C(\alpha, \beta)$.

Здесь $B, B_0, B_1, \dots, \alpha$ в дальнейшем $C_0, C_1, \dots$ — различные положительные постоянные. В § 3 постоянные C_k ($k=1, 2, \dots$) отличны от постоянных, обозначенных теми же буквами в § 2.

§ 1. Асимптотические формулы для производных от о.в.м. на всем отрезке $[-\pi, \pi]$

Лемма 1.1. Рассмотрим вес $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ и тригонометрические суммы $T_\nu(\theta)$ порядка $\leq \nu$, удовлетворяющие условию

$$\left| \frac{1}{\varphi(\theta)} - T_\nu(\theta) \right| \leq B_5 E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right), \quad n = k\nu + \nu_0. \quad (1.1)$$

Здесь k, n, ν, ν_0 — целые числа, причем $n \geq \nu$, $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(\theta) \in C_{2\pi}$ с помощью тригонометрических сумм порядка $\leq n$. Введем новый вес $\psi(\theta) \equiv T_\nu^{-1}(\theta)$, тогда начиная с некоторого $n \geq n_0$, имеем

$$0 < \frac{x(\varphi)}{x_n(\psi)} - 1 \leq B_6 E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right), \quad (1.2)$$

$$0 < \frac{x(\varphi)}{x_n(\varphi)} - 1 \leq B_7 E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right), \quad (1.3)$$

$$\left| \frac{x_n(\varphi)}{x_n(\psi)} - 1 \right| \leq B_8 E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right). \quad (1.4)$$

Доказательство. По теореме Г. Сегё (см. [12], стр. 73–76)

$$\frac{x(\varphi)}{x_n(\psi)} = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln \frac{1}{\varphi(t)} - \ln T_n(t) \right] dt \right\}. \quad (1.5)$$

Для достаточно больших $n \geq n_0$ имеем согласно (1.1)

$$T_n(t) > 0, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Обозначим

$$\delta_n \equiv \left| \ln \frac{1}{\varphi} - \ln T_n \right|.$$

Если $0 < m_0 < \varphi(\theta) \leq M$, то для $n > n_0$ можно считать, что

$$\frac{1}{2M} \leq T_n(\theta) \leq \frac{2}{m_0}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (1.6)$$

$$\min_{-\pi < \theta < \pi} T_n(\theta) > \frac{1}{2M}, \quad \min_{-\pi < \theta < \pi} \frac{1}{\varphi(\theta)} = \frac{1}{M}.$$

По неравенству для логарифмов и (1.1) имеем

$$\delta_n \leq \frac{B_5}{2M} E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right).$$

Но

$$1 - B_9 \delta_n \leq \exp(-\delta_n) \leq \frac{x(\varphi)}{x_n(\psi)} \leq \exp(\delta_n) \leq 1 + B_{10} \delta_n.$$

Последовательность $\left\{ \frac{x(\varphi)}{x_n(\psi)} \right\}_n$ и поэтому она стремится к пределу и при $n \geq n_0$

$$\frac{x(\varphi)}{x_n(\psi)} > 1.$$

Этим доказано (1.2).

Для доказательства (1.3) воспроизведем рассуждения Г. Сегё (см. [12], стр. 75).

Имеем (см. [12], стр. 55):

$$x_n^{-2}(\varphi) = \min_{\{a_1, \dots, a_n\}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n|^2 \varphi(t) dt, \quad z = e^{it}.$$

Положим

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = \frac{1}{x_n(\varphi)} \Psi_n(z),$$

где $\{\Psi_n(z)\}_0^\infty$ — о. н. м., соответствующие весу $\psi(\theta)$.

В силу выбора $\psi(\theta)$ имеет место тождество Г. Сегё (см. [1], стр. 297)

$$|\Psi_n(e^{i\theta})|^2 = T_n(\theta) \quad (n \geq \nu). \quad (1.7)$$

Значит

$$x_n^{-2}(\varphi) \leq x_n^{-2}(\psi) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_n(e^{it})|^2 \varphi(t) dt = x_n^{-2}(\psi) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(t) |\varphi(t)| dt.$$

На основании (1.1) можно считать, что

$$\varphi(t) T_n(t) \leq 1 + 2MB_3 E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right), \quad \nu > n_0$$

Повтому

$$\frac{x(\varphi)}{x_n(\psi)} \leq \frac{x(\varphi)}{x_n(\psi)} \left\{ 1 + MB_3 E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) \right\}. \quad (1.8)$$

Объединяя (1.2) и (1.8), получим (1.3) для $n \geq n_0$.

Для доказательства (1.4) исходим из тождества

$$\frac{x_n(\varphi)}{x_n(\psi)} - 1 = \frac{x_n(\varphi)}{x(\varphi)} \left\{ \frac{x(\varphi)}{x_n(\psi)} - 1 \right\} + \left\{ \frac{x_n(\varphi)}{x(\varphi)} - 1 \right\} \quad (1.9)$$

и неравенства (1.3).

Лемма 1.2. Если вес $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ и

$$\ln n E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) = o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (1.10)$$

то

$$|\Phi_n(e^{i\theta})| \leq B_{11}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (1.11)$$

Доказательство. Воспроизведем рассуждения Г. Сегё (см. [12], стр. 73–76) и применим лемму 1.1.

Лемма 1.3. Пусть $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$, $\psi(\theta) \equiv T_\nu^{-1}(\theta)$. Тогда

$$|D^{-1}(e^{i\theta}; \varphi) - D^{-1}(e^{i\theta}; \psi)| \leq B_{12} J(\theta; \nu; f) + B_{13} \ln \frac{1}{\eta} E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) + B_{14} n \eta, \quad (1.12)$$

где

$$J(\theta; \nu; f) = \left| \int_0^\eta [f(\theta+t) - f(\theta-t)] \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \right|, \quad f(t) = \ln \varphi(t), \quad n\eta = o(1). \quad (1.13)$$

Доказательство. Имеем очевидное неравенство

$$|D^{-1}(e^{i\theta}; \varphi) - D^{-1}(e^{i\theta}; \psi)| \leq \|D^{-1}(e^{i\theta}; \varphi)\| - \|D^{-1}(e^{i\theta}; \psi)\| + \\ + |D^{-1}(e^{i\theta}; \varphi)|^{1/2} |D^{-1}(e^{i\theta}; \psi)| |\arg D^{-1}(e^{i\theta}; \varphi) - \arg D^{-1}(e^{i\theta}; \psi)|. \quad (1.14)$$

В силу определения граничного значения функции Г. Сегё и выбора веса $\psi(\theta)$ следует, что

$$|D^{-1}(e^{i\theta}, \varphi)| - |D^{-1}(e^{i\theta}, \psi)| = \left| \sqrt{T, (\theta)} - \frac{1}{\sqrt{\varphi(\theta)}} \right| \leq B_{13} |T, (\theta) - \frac{1}{\varphi(\theta)}| \leq B_{13} E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right), \quad (1.15)$$

$$\arg D^{-1}(e^{i\theta}, \psi) - \arg D^{-1}(e^{i\theta}, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln T, (t) - \ln \frac{1}{\varphi(t)} \right| \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} dt. \quad (1.16)$$

Отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ разложим на два отрезка:

$$e: |\theta - t| \leq \eta \quad \text{и} \quad e': \eta < |\theta - t| \leq \pi.$$

Теперь интеграл справа в (1.16) представим в виде суммы двух интегралов $J_e(\theta)$ и $J_{e'}(\theta)$, взятых по соответствующим отрезкам.

Так как

$$\int_e \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt = 0,$$

то $J_e(\theta)$ можно представить также в виде суммы двух интегралов:

$$J_e(\theta) = J_{1, e}(\theta) + J_{2, e}(\theta), \quad (1.17)$$

где

$$J_{1, e}(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_e [\ln T, (t) - \ln T, (\theta)] \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} dt,$$

$$J_{2, e}(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_e \left[\ln \frac{1}{\varphi(t)} - \ln \frac{1}{\varphi(\theta)} \right] \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} dt.$$

Но

$$|\ln T, (t) - \ln T, (\theta)| \leq \frac{1}{2M} |T, (\theta) - T, (t)|.$$

По неравенству С. Н. Бернштейна

$$|T, (t) - T, (\theta)| \leq |\theta - t| \|T'\| \leq \frac{2}{m_0} \nu |\theta - t|. \quad (1.18)$$

Поэтому

$$|J_{2, e}(\theta)| \leq \int_e \left| \ln T, (t) - \ln T, (\theta) \right| \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} dt \leq B_{17} n \eta \quad (1.19)$$

и

$$|J_{1, e}(\theta)| \leq \left| \int_e [f(\theta) - f(t)] \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} dt \right|. \quad (1.20)$$

Так как из (1.6) следует, что $T, (\theta), \frac{1}{\varphi(\theta)} > \frac{1}{2M}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, то применяя неравенство для логарифмов, получим следующую оценку для $|J_e(\theta)|$:

$$|J_{\varphi}(\theta)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| T_{\nu}(t) - \frac{1}{\varphi(t)} \right| \left| \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} \right| dt \leq \\ \leq B_{18} E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right) \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} \right| dt \leq B_{18} \ln \frac{1}{\eta} E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right). \quad (1.21)$$

Объединяя (1.14) — (1.18), получим (1.12). Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Имеет место следующее неравенство при $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$:*

$$\frac{1}{n} \left| \frac{d}{d\theta} \Phi_n(e^{i\theta}) - \frac{z_n(\varphi)}{z_n(\psi)} \frac{d}{d\theta} \Psi_n(e^{i\theta}) \right| \leq B_{19} \ln n E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right). \quad (1.22)$$

Доказательство. Применим легко проверяемое тождество Сегё—Кораяса:

$$\Phi_n(e^{i\theta}) - \frac{z_n(\varphi)}{z_n(\psi)} \Psi_n(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [T_{\nu}^{-1}(t) - \varphi(t)] \Phi_n(e^{it}) K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}, \psi) dt, \quad (1.23)$$

где $\psi(\theta)$ и $\{\Psi_n(e^{i\theta})\}_0^{\infty}$ имеют прежние значения.

После дифференцирования (1.23) получим

$$\frac{d}{d\theta} \Phi_n(e^{i\theta}) - \frac{z_n(\varphi)}{z_n(\psi)} \frac{d}{d\theta} \Psi_n(e^{i\theta}) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [T_{\nu}^{-1}(t) - \varphi(t)] \Phi_n(e^{it}) \frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}, \psi) dt. \quad (1.24)$$

В силу (1.6) и (1.1) имеем

$$|T_{\nu}^{-1}(t) - \varphi(t)| = \left| \frac{\varphi(t)}{T_{\nu}(t)} \left(\frac{1}{\varphi(t)} - T_{\nu}(t) \right) \right| \leq 2M^2 B_{18} E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right) = B_{20} E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right).$$

Так как по (1.6): $\frac{m_n}{2} \leq \psi(\theta)$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) и

$$|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}, \psi)| \leq K_{n-1}^{1/2}(e^{i\theta}, e^{i\theta}; \psi) K_{n-1}^{1/2}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi),$$

то по известной теореме (см. [3], стр. 54—55)

$$|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}, \psi)| \leq B_{21} n, \quad -\pi \leq \theta, t \leq \pi. \quad (1.25)$$

Представим интеграл в правой части (1.24) в виде суммы двух интегралов: i_1 — по отрезку e : $|\theta - t| \leq n^{-1}$ и i_2 — по отрезку e' : $n^{-1} \leq |\theta - t| \leq \pi$.

Воспользуемся известным неравенством О. Сасса*

$$\|P_n^{(m)}(z)\| \leq n^m \|P_n(z)\|, \quad z = e^{i\theta}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.26)$$

$P_n(z)$ — многочлен n -ой степени. Если учесть, что

* Легко получаемого из неравенства С. Н. Берштейна (см. [3], стр. 222).

$$P'_n(z) = \frac{1}{iz} \frac{d}{d\theta} P_n(e^{i\theta}),$$

то с учетом (1.25) получим

$$\left| \frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta'}, \psi) \right| \leq B_{22} n. \quad (1.27)$$

Последнее неравенство, леммы 1.1 и 1.2, неравенства для $\varphi(\theta)$ и $T_v^{-1}(\theta)$ позволяют получить следующую оценку:

$$|i_1| \leq B_{23} n E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right). \quad (1.28)$$

Рассмотрим интеграл по отрезку e' . Теперь для получения оценки правой части (1.24) продифференцируем обе части формулы Кристоффеля-Дарбу для $K_n(z, \xi; \psi)$ (см. 0.8):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta'}; \psi) &= \frac{ie^{i\theta} [\Psi_n^*(z) \overline{\Psi_n^*(e^{i\theta'})} - \Psi_n^*(z) \overline{\Psi_n^*(e^{i\theta'})}] +}{1 - e^{i(\theta-\theta')}} + \\ &+ \frac{ie^{i(\theta-\theta')} K_n(e^{i\theta}, e^{i\theta'}, \psi)}{1 - e^{i(\theta-\theta')}}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Применим неравенство О. Сасса (см. (1.26) для $|\Psi_n^*(z)|$). Получим

$$\left| \frac{d}{d\theta} K_n(e^{i\theta}, e^{i\theta'}, \psi) \right| \leq 2 \max_{-\pi < \theta < \pi} |\Psi_n(e^{i\theta})| \frac{n |\Psi_n(e^{i\theta'})|}{|e^{i\theta} - e^{i\theta'}|} + \frac{|K_n(e^{i\theta}, e^{i\theta'}, \psi)|}{|e^{i\theta} - e^{i\theta'}|}.$$

Так как

$$|\Psi_n(e^{i\theta})|^2 = T_v(\theta) \leq \frac{2}{m_0}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad n \geq n_0,$$

то с учетом (1.25) будем иметь

$$\left| \frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{i\theta'}; \psi) \right| \leq \frac{8}{m_0^2} \frac{n}{|e^{i\theta} - e^{i\theta'}|} + \frac{B_{22}(n+1)}{|e^{i\theta} - e^{i\theta'}|} \leq \frac{B_{23} n}{|e^{i\theta} - e^{i\theta'}|}.$$

Так как

$$\int_{0 < n^{-1} < |\theta-\theta'| < \pi} \frac{dt}{|e^{it} - e^{i\theta}|} \leq B_{24} \ln n,$$

то для оценки интеграла i_3 имеем

$$|i_3| \leq B_{25} n \ln n E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right). \quad (1.30)$$

Объединяя (1.28) и (1.30), получим (1.22). Лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. Справедлива следующая оценка при $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$:

$$\frac{1}{n} \left| \frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}; \psi) \right| \leq B_{26} \Omega^{1/2} \left(\frac{1}{n}, \varphi_0 \right), \quad n \geq n_0. \quad (1.31)$$

Доказательство. Так как

$$D(e^{i\theta}; \psi) = T_v^{-1/2}(\theta) \exp \left\{ \frac{i}{2} \overline{\ln \psi(\theta)} \right\},$$

то

$$\frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}; \psi) = -D(e^{i\theta}; \psi) \left\{ \frac{1}{2} \frac{T'_v(\theta)}{T_v(\theta)} + i \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\theta} \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} \ln T_v^{-1}(t) dt \right\}. \quad (1.32)$$

Исходя из того, что

$$\frac{d}{d\theta} \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} = -\frac{d}{dt} \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2}$$

и интегрируя по частям, получим

$$\frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}; \psi) = -\frac{1}{2} D(e^{i\theta}; \psi) \left\{ \frac{T'_v(\theta)}{T_v(\theta)} + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dt} [\ln T_v(t)] \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} dt \right\}. \quad (1.33)$$

Изменим отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ отрезком $[\theta - \tau_n, 2\pi + \theta - \tau_n]$, а его представим в виде суммы двух: $[\theta - \tau_n, \theta + \tau_n]$ и $[\theta + \tau_n, 2\pi + \theta - \tau_n]$. В соответствии с этим интеграл в правой части (1.33) представится в виде суммы двух интегралов

$$J = J_{[\theta - \tau_n, \theta + \tau_n]} + J_{[\theta + \tau_n, 2\pi + \theta - \tau_n]},$$

а

$$J_{[\theta - \tau_n, \theta + \tau_n]} = J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \int_{\theta - \tau_n}^{\theta + \tau_n} \frac{T'_v(t) - T'_v(\theta)}{T_v(t)} \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} dt, \quad J_2 = \int_{\theta - \tau_n}^{\theta + \tau_n} \frac{T'_v(\theta)}{T_v(\theta)} \frac{T_v(\theta) - T_v(t)}{T_v(t)} \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} dt. \quad (1.34)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\int_{\theta - \tau_n}^{\theta + \tau_n} \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} dt = 0.$$

Применяя теорему (А) и условия (1.6), будем иметь

$$|J_1|, |J_2| \leq B_{27} n^2 \varepsilon_n \tau_n, \quad \varepsilon_n = E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right) + 2\Omega \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi} \right) \leq B_{28} \Omega \left(\frac{1}{n}, \varphi \right).$$

Пусть $\tau_n = n^{-1} \varepsilon_n^{-1/2}$. Тогда

$$|J| \leq B_{29} n \varepsilon_n^{1/2}. \quad (1.35)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 J_{[\theta + \tau_n, 2\pi + \theta - \tau_n]} &= \int_{\theta + \tau_n}^{2\pi + \theta - \tau_n} \frac{d}{dt} [\ln T_v(t)] \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt = \\
 &= \ln T_v(t) \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} \Big|_{\theta + \tau_n}^{2\pi + \theta - \tau_n} + \frac{1}{2} \int_{\theta + \tau_n}^{2\pi + \theta - \tau_n} \ln T_v(t) \left[\sin \frac{t - \theta}{2} \right]^{-2} dt. \quad (1.36)
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части (1.36) обозначим через $A_1(\theta)$, второе — через $A_2(\theta)$. Применяем снова теорему (А).

После простых вычислений получим

$$\begin{aligned}
 |A_1(\theta)| &= \left| \operatorname{ctg} \frac{\tau_n}{2} [\ln T_v(\theta + \tau_n) - \ln T_v(\theta - \tau_n)] \right| \leq \\
 &\leq 2M \operatorname{ctg} \frac{\tau_n}{2} |T_v(\theta + \tau_n) - T_v(\theta - \tau_n)| \leq \frac{4M}{\pi} |T'_v| \leq B_{30} \varepsilon_n n. \quad (1.37)
 \end{aligned}$$

Для второго слагаемого имеем

$$|A_2(\theta)| \leq B_{31} \int_{\tau_n/2}^{\tau_n/2} \sin^{-2} t dt \leq B_{32} n \varepsilon_n^{1/2} + B_{33}. \quad (1.38)$$

Так как

$$\frac{m_0}{2} \leq |D(e^{i\theta}, \psi)|^2 = \psi(\theta) \leq 2M, \quad (1.39)$$

то по теореме (А)

$$\|T_v T_v^{-1}\| \leq 2MB_{34} \varepsilon_n n. \quad (1.40)$$

Объединяя (1.33) — (1.40), будем иметь

$$\frac{1}{n} \left| \frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}, \psi) \right| \leq B_{34} \varepsilon_n^{1/2} + \frac{1}{n} B_{35}. \quad (1.41)$$

Но $\varepsilon_n \leq B_{36} \Omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)$, $\frac{1}{n} \leq B_{37} \Omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)$, поэтому (1.41) приводит к (1.31). Заметим, что $\tau_n \leq B_{38} \Omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)$ и поэтому при достаточно большом n ($\geq n_0$) τ_n достаточно мало и во всяком случае $< \pi$.

Лемма 1.6. При $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ имеем

$$\frac{1}{n} \left| \frac{d}{d\theta} \Psi_n(e^{i\theta}) \right| \leq B_{39} \Omega^{1/2}\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) B_{40}, \quad n \geq n_0. \quad (1.42)$$

Доказательство. Известны (см. [7]) тождества

$$\Psi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta} [\overline{D(e^{i\theta}, \psi)}]^{-1}, \quad \overline{D(e^{i\theta}, \psi)}^{-1} = D(e^{i\theta}, \psi) T_v(\theta). \quad (1.43)$$

Потому

$$\frac{d}{d\theta} \Psi_n(e^{i\theta}) = ine^{in\theta} \overline{D'(e^{i\theta}, \psi)}^{-1} + e^{in\theta} \frac{d}{d\theta} \overline{D(e^{i\theta}, \psi)}^{-1}. \quad (1.44)$$

Применяя вторые из тождеств (1.43), получим:

$$\frac{d}{d\theta} |D(e^{i\theta}, \psi)|^{-1} = \frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}, \psi) T_1(\theta) + D(e^{i\theta}, \psi) T_2'(\theta). \quad (1.45)$$

С помощью теоремы (А) и оценок (1.6) будем иметь

$$\left| \frac{d}{d\theta} |D(e^{i\theta}, \psi)|^{-1} \right| \leq \frac{2}{m_0} \left| \frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}, \psi) \right| + B_{41} n \varepsilon_n. \quad (1.46)$$

Переходя в (1.44) к модулям в обеих частях равенства, применяя оценки (1.46) и (1.39) и лемму 1.5, получим (1.42)

Теорема 1.1. Пусть $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ и

$$\ln n E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right) = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.47)$$

Тогда имеет место а. ф. (0.5) с

$$|\rho_{n,1}(\theta)| \leq B_0 \left| J(\theta; \gamma; f) + \ln n E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right) + n\gamma + \Omega^{1/2} \left(\frac{1}{n}, \varphi \right) \right|, \\ n\gamma = o(1). \quad (1.48)$$

Доказательство. Применяя тождество (1.44), запишем новое тождество:

$$\frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} \Phi_n(e^{i\theta}) - ie^{i\theta} \overline{\{D(e^{i\theta}; \varphi)\}^{-1}} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{d}{d\theta} \Phi_n(e^{i\theta}) - \frac{\chi_n(\varphi)}{\chi_n(\psi)} \frac{d}{d\theta} \Psi_n(e^{i\theta}) \right\} + \\ + \frac{1}{n} \left\{ \frac{\chi_n(\varphi)}{\chi_n(\psi)} - 1 \right\} \frac{d}{d\theta} \Psi_n(e^{i\theta}) + \frac{1}{n} e^{i\theta} \frac{d}{d\theta} \overline{\{D(e^{i\theta}; \psi)\}^{-1}} + \\ + ie^{i\theta} \overline{[\{D(e^{i\theta}; \psi)\}^{-1} - \{D(e^{i\theta}; \varphi)\}^{-1}]}. \quad (1.49)$$

Возьмем модули обеих частей (1.49) и применим к каждому слагаемому соответственно леммы 1.4, 1.1 и 1.6, 1.5, 1.3. После этого получим

$$\left| \frac{1}{n} \Phi_n(z) - z^{n-1} \overline{\{D(z; \varphi)\}^{-1}} \right| \leq B_{41} |\rho_{n,1}(\theta)|,$$

где $|\rho_{n,1}(\theta)|$ оценивается по (1.48). Теорема 1.1 доказана.

Следствие 1.1. Если вес $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ и выполняются условия:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \ln n E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right) = 0. \quad (1.47')$$

Равномерно относительно $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J(\theta; \gamma; f) = 0, \quad (1.50)$$

($J(\theta; \gamma; f)$ имеет значение (1.13)), то равномерно относительно $\theta \in [-\pi, \pi]$ имеет место а. п. (0.4) (это те же условия, при которых имеет место а. п. (0.2) (см. [4])).

Следствие 1.2. Если вес $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ и

$$\frac{\Omega(t, \varphi)}{t} \in L_1(0, \pi), \quad (1.51)$$

то для $\theta \in [-\pi, \pi]$ имеет место а.ф. (0.5) с

$$|p_{n,1}(\theta)| \leq B_{42} \left\{ \int_0^{1/n} \frac{\Omega(t, \varphi)}{t} dt + \ln n \Omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) + \Omega^{1/2}\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) \right\} \quad (1.52)$$

и

$$|p_{n,1}(\theta)| = o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Действительно, положим в (1.48) $\eta = n^{-2}$ и учтем, что

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\delta} = \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{dt}{t}, \quad \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\delta} \Omega(\delta, \varphi) \leq \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{\Omega(t, \varphi)}{t} dt = o(1) \quad (\delta \rightarrow 0).$$

Заметим также, что по теореме Джексона

$$E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) \leq B_{44} \Omega\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right).$$

При $\varphi(\theta) \geq \frac{m_0}{2}$ имеем

$$\Omega\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right) \leq B_{45} \Omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right).$$

§ 2. Асимптотические формулы для производных от о.в.м. на отрезке $[x, \beta]$

Теорема 2.1. Если

$$\varphi(\theta) \leq M \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi), \quad \frac{1}{\varphi(\theta)} \in L_2(-\pi, \pi), \quad (2.1)$$

на отрезке $[x, \beta] \subset (-\pi, \pi)$:

$$0 < \varphi(\theta) \in C(x, \beta), \quad \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) \ln n = o(1) \quad (2.2)$$

и равномерно относительно $\theta \in [x, \beta]$:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J(\theta, \eta; f) = 0, \quad n\eta = o(0),$$

то для $\theta \in [x_1, \beta_1] \subset (x, \beta)$ имеет место а.ф. (0.5) и

$$|p_{n,1}(\theta)| \leq C_0 \left| J(\theta, \eta; f) + \ln n \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) + \omega^{1/2}\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) + \right. \\ \left. + \Omega_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right) + n\eta \right|, \quad (2.3)$$

$J(\theta, \eta; f)$ имеет значение (1.13).

Для доказательства теоремы 2.1 нам потребуется несколько лемм, которые (за исключением первой из них) являются локальными аналогами соответствующих лемм предыдущего параграфа.

Лемма 2.1. При условиях (2.1) имеем

$$\left| \frac{z_n(\varphi)}{z_n(\psi)} - 1 \right| \leq C_1 \Omega_2 \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi} \right). \quad (2.4)$$

Известно (см. [3], стр. 89—90), что если $F(\theta) \in L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, то

$$\|U_n(F) - F\|_p \leq C_2 \Omega_p \left(\frac{1}{n}, F \right). \quad (2.5)$$

Так как

$$U_n \left(\theta, \frac{1}{\varphi} \right), \frac{1}{\varphi(\theta)} \geq \frac{1}{M} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi), \quad (2.6)$$

то

$$\delta_{2,n} \leq M \left\| \frac{1}{\varphi} - U_n \left(\frac{1}{\varphi} \right) \right\|_2 \leq C_3 \Omega_2 \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi} \right). \quad (2.7)$$

По (1.5) получим

$$\left| \frac{z(\varphi)}{z_n(\psi)} - 1 \right| \leq C_4 \Omega_2 \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi} \right). \quad (2.8)$$

При условии (2.1) имеем (см. [3], стр. 199)

$$\frac{z(\varphi)}{z_n(\varphi)} - 1 \leq C_5 \Omega_2 \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi} \right). \quad (2.9)$$

Применяя тождество (1.8), оценки (2.8) и (2.9), получим (2.4). Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2 (см. [13]). При условиях $\frac{1}{\varphi(\theta)} \in L_1(-\pi, \pi)$ и (2.2)

имеем

$$|\Phi_n(e^{i\theta})| \leq C_3, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \theta \in [\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta). \quad (2.10)$$

При доказательстве остальных лемм мы будем обращаться к доказательству соответствующих лемм предыдущего параграфа.

Лемма 2.3. При условии $\varphi(\theta) \leq M$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$), $\frac{1}{\varphi(\theta)} \in L_1(-\pi, \pi)$ и

$$0 < \varphi(\theta) \in C(\alpha, \beta), \quad \omega \left(\frac{1}{n}, \varphi \right) \ln n^{-1} = o(1) \quad (2.11)$$

имеем для $\theta \in [\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$ следующее неравенство:

$$|D^{-1}(e^{i\theta}; \varphi) - D^{-1}(e^{i\theta}; \psi)| \leq C_6 \ln \eta^{-1} \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) + \\ + C_7 \Omega_1\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right) + C_8 n\eta, \quad n\eta = o(1). \quad (2.12)$$

Доказательство. Известно (см. [3], стр. 90), что если $\frac{1}{\varphi(t)} \in L_1(-\pi, \pi)$, $0 < \varphi(\theta) \in C(\alpha, \beta)$, то для $\theta \in [\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$

$$\left|U_v\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right) - \frac{1}{\varphi(\theta)}\right| \leq C_9 \omega\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right) \leq C_{10} \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right). \quad (2.13)$$

Повтому

$$\left||D^{-1}(e^{i\theta}; \varphi)| - |D^{-1}(e^{i\theta}; \psi)|\right| = \left|\sqrt{U_v\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right)} - \sqrt{\frac{1}{\varphi(\theta)}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{M}} \left|U_v\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right) - \frac{1}{\varphi(\theta)}\right| \leq C_{11} \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right). \quad (2.14)$$

Перейдем к оценке разности (1.16). Оценка интеграла $J_\varepsilon(\theta)$ при $\alpha' \leq \theta \leq \beta'$ производится аналогично тому, как при доказательстве леммы 1.3, только с применением локального аналога неравенства С. Н. Бернштейна — неравенства И. И. Привалова (см. [14], стр. 896—898):

$$\left\|U_v\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right\|_{(\alpha', \beta')} \leq C_{12}(\alpha, \alpha', \beta', \beta) \vee \left\|U_v\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right\|_{(\alpha, \beta)}. \quad (2.15)$$

Будем считать, что при заданном $\theta \in [\alpha', \beta']$ t меняется так, что $|\theta - t| \leq \varepsilon \eta \leq \delta_0$, $\delta_0 = \min(\alpha' - \alpha, \beta - \beta')$. Теперь можно написать:

$$\left|U_v\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right) - U_v\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)\right| = \left|\int_t^\theta U_v\left(\tau, \frac{1}{\varphi}\right) d\tau\right| \leq \\ \leq |\theta - t| \left\|U_v\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right\|_{(\alpha' + \delta_0, \beta' - \delta_0)}. \quad (2.16)$$

В [15] доказано, что если $g(\theta) \in L_1(-\pi, \pi)$, $0 < g(\theta) \in C(\alpha, \beta)$, то $0 < C_{14}(\alpha, \alpha', \beta', \beta) \leq U_v(\theta, g) \leq C_{13}(\alpha, \alpha', \beta', \beta)$, $\alpha' \leq \theta \leq \beta'$, $\nu \geq n_0$. (2.17)

Повтому (2.15) — (2.17) приводят к оценке

$$\left|U_v\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right) - U_v\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)\right| \leq \nu |\theta - t| C_{15}(\alpha, \alpha', \beta', \beta) \quad (2.18)$$

и

$$|J_\varepsilon(\theta)| \leq C_{16} n\eta.$$

Отрезок e' разложим на два, каждый из которых определяется неравенствами: $0 < \eta^{-1} \leq |\theta - t| \leq \delta_0$ и $\delta_0 < |\theta - t| \leq \pi$. Так как по свойству сумм Джексона из условия: $\frac{1}{\varphi(t)} \geq \frac{1}{M}$ следует, что и $U_n\left(t, \frac{1}{\varphi}\right) \geq \frac{1}{M}$, то по неравенству для логарифмов получим

$$|J_{e'}(\theta)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\eta^{-1} < |\theta - t| \leq \delta_0} \left| U_n\left(t, \frac{1}{\varphi}\right) - \frac{1}{\varphi(t)} \right| \left| \operatorname{ctg} \frac{t - \theta}{2} \right| dt + \frac{M}{2\pi} \int_{\delta_0 < |\theta - t| \leq \pi} \left| U_n\left(t, \frac{1}{\varphi}\right) - \frac{1}{\varphi(t)} \right| \left| \operatorname{ctg} \frac{t - \theta}{2} \right| dt. \quad (2.19)$$

Воспользуемся неравенством

$$\int_{0 < \eta^{-1} < |\theta - t| \leq \delta_0} \left| \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} \right| dt \leq C_{17} \ln \eta^{-10} \quad (2.20)$$

и оценкой (2.5). Теперь (2.19) запишется так:

$$|J_{e'}(\theta)| \leq C_{18} \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) \ln \eta^{-1} + C_{19}(\delta_0) \int_{-\pi}^{\pi} \left| U_n\left(t, \frac{1}{\varphi}\right) - \frac{1}{\varphi(t)} \right| dt \leq \leq C_{20} \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) \ln \eta^{-1} + C_{21} \Omega_1\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right). \quad (2.21)$$

Так как

$$|D^{-1}(e^{i\theta}; \psi)| = U_n^{-1/2}\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right), \quad |D^{-1}(e^{i\theta}; \varphi)| = \frac{1}{\sqrt{\varphi(\theta)}},$$

а $\varphi(\theta) \geq m_1 > 0$, $\theta \in [\alpha', \beta']$, то применяя (2.17), получим

$$U_n\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right) \leq M_1, \quad \theta \in [\alpha', \beta']. \quad (2.21')$$

Применяя неравенства (1.14), оценки (2.18) и (2.14), получим лемму 2.3.

Лемма 2.4. При условиях $\frac{1}{\varphi(\theta)} \in L_2(-\pi, \pi)$, $\varphi(\theta) \leq M$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$), $0 < \varphi(\theta) \in C(\alpha, \beta)$ имеет место следующее неравенство:

$$\frac{1}{n} \left| \frac{d}{d\theta} \Phi_n(e^{i\theta}) - \frac{x_n(\varphi)}{x_n(\psi)} \frac{d}{d\theta} \Psi_n(e^{i\theta}) \right| \leq C_{22} \ln n \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) + C_{23} \Omega_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right),$$

$$\alpha_1 \leq \theta \leq \beta_1, \quad [\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha', \beta').$$

Доказательство. Воспроизведем рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых была доказана лемма 1.4. В силу (1.7) и (2.17) имеем для $\theta \in [\alpha', \beta']$

$$\psi(\theta) \equiv U^{-1}\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right) \geq C_{24}, \nu \geq n_0. \quad (2.22)$$

Применим локальный аналог неравенства (1.25) (см. [3], стр. 55):

$$|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)| \leq C_{25} n, \alpha' \leq t, \theta \leq \beta' \quad (2.23)$$

и локальный аналог неравенства О. Сасса (см. (1.26)), который легко получить с помощью локального аналога неравенства С. Н. Бернштейна (см. (2.15)). Получим

$$\left| \frac{d}{dt} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi) \right| \leq C_{26}(\alpha', \alpha_1, \beta_1, \beta') n^2, \alpha_1 \leq \theta, t \leq \beta_1. \quad (2.24)$$

Разложим интеграл в правой части (1.24) на три: $j_1(\theta)$, $j_2(\theta)$, $j_3(\theta)$, соответственно по отрезкам, каждый из которых определяется неравенствами

$$\theta - t \leq n^{-1}, \quad 0 < n^{-1} \leq |\theta - t| \leq \delta_1, \quad \delta_1 \leq |\theta - t| \leq \pi; \quad \delta_1 = \min(\alpha_1 - \alpha', \beta' - \beta_1), \\ \theta \in [\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha', \beta').$$

Для оценки первого интеграла применяем (2.10), (2.24) и (2.13). Получим

$$|j_1(\theta)| \leq C_{27} n \cdot \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right). \quad (2.25)$$

Для оценки второго интеграла применяем неравенство (1.29), только вместо $\max |\Psi_n(e^{i\theta})|$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, будет стоять $\max |\Psi_n(e^{i\theta})|$, $\alpha' \leq \theta \leq \beta'$, и так как

$$|\Psi_n(e^{i\theta})|^2 = U\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right), \quad (2.26)$$

то

$$\max_{\alpha' < \theta < \beta'} |\Psi_n(e^{i\theta})| \leq \sqrt{C_{13}(\alpha, \alpha', \beta', \beta)}. \quad (2.27)$$

Оценки (2.27), (2.23) (2.13) и (2.20) приводят к оценке

$$|j_2(\theta)| \leq C_{28} n \ln n \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right). \quad (2.28)$$

Для оценки интеграла $j_3(\theta)$ запишем его в таком виде:

$$j_3(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_1 < |\theta - t| < \pi} \left[U\left(t, \frac{1}{\varphi}\right) - \frac{1}{\varphi(t)} \right] \sqrt{\varphi(t)} \Phi_n(e^{it}) \times \\ \times \frac{\frac{d}{dt} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)}{\sqrt{U\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}} \sqrt{\frac{\varphi(t)}{U\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}} dt. \quad (2.29)$$

При $\alpha_1 \leq \theta \leq \beta_1$, $\delta_1 \leq |\theta - t| \leq \pi$ получим, с учетом (2.26) и (1.29):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\varphi(t)}{U_\varphi\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}} &\leq M, \left| \frac{\frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)}{\sqrt{U_\varphi\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}} \right| \leq \max_{\alpha_1 < \theta < \beta_1} |\Phi_n(e^{i\theta})| \times \\ &\times \frac{n |\Psi_n(e^{it})|}{|e^{i\theta} - e^{it}| \sqrt{U_\varphi\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}} + 2 \max_{\alpha_1 < \theta < \beta_1} |\Psi_n(e^{i\theta})| \frac{|\Psi_n(e^{it})|}{\sqrt{U_\varphi\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}} \times \\ &\times \frac{1}{|e^{it} - e^{i\theta}|^2} \leq C_{29}(\delta_1) n. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Теперь применяем оценки (2.30) и (2.5). Имеем

$$\begin{aligned} |J_3(\theta)| &\leq C_{30} n \left| U_\varphi\left(\frac{1}{\varphi}\right) - \frac{1}{\varphi} \right|_2 \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_n(e^{it})|^2 \varphi(t) dt \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq C_{31} n \Omega_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Объединяя (2.25), (2.28) и (2.31), получим лемму 2.4.

Лемма 2.5. При условии леммы 2.4 имеем для $\theta \in [\alpha', \beta']$

$$\frac{1}{n} \left| \frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}; \psi) \right| \leq C_{32} \omega^{1/2}\left(\frac{1}{n}, \varphi\right), \quad n > n_0. \quad (2.32)$$

Доказательство. Рассмотрим (1.33), где вместо $T_n(\theta)$ нужно взять $U_\varphi\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right)$. Оценки для $J_1(\theta)$ и $J_2(\theta)$ аналогичны прежним, только теперь считаем $\theta \in [\alpha', \beta']$ и полагаем $\varepsilon_n = 2\omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)$. Вместо теоремы (А) применяем теорему (А'), а вместо неравенства С. Н. Бернштейна — неравенство И. И. Привалова. Изменится несколько способ получения оценки $A_2(\theta)$. Представим $A_2(\theta)$ в виде

$$A_2(\theta) = A_2^{(1)}(\theta) + A_2^{(2)}(\theta),$$

где

$$A_2^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2} \int_{-\tau_n}^{\delta_0} \left[\ln U_\varphi\left(\theta+t, \frac{1}{\varphi}\right) - \ln U_\varphi\left(\theta-t, \frac{1}{\varphi}\right) \right] \sin^{-2} \frac{t}{2} dt,$$

$$A_2^{(2)}(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\delta_0}^{\pi} \left[\ln U_\varphi\left(\theta+t, \frac{1}{\varphi}\right) - \ln U_\varphi\left(\theta-t, \frac{1}{\varphi}\right) \right] \sin^{-2} \frac{t}{2} dt.$$

Так как $\theta \in [\alpha', \beta']$, то в пределах изменения t в $A_2^{(1)}(\theta)$: $\tau_n \leq t \leq \delta_0$, $\theta \pm t \in (\alpha, \beta)$ (при достаточно большом n). Действительно

$$\tau_n = \frac{1}{n \sqrt{\varepsilon_n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n \omega^{1/2} \left(\frac{1}{n}, \varphi \right)} \leq C_{33} \omega^{1/2} \left(\frac{1}{n}, \varphi \right) \\ \left(\frac{1}{n} \leq \sqrt{2} C_{33} \omega \left(\frac{1}{n}, \varphi \right) \right),$$

значит $\tau_n < \delta_0$ ($n > n_0$). Учитывая (2.17), получим

$$|A_2^{(1)}(\theta)| \leq C_{34} \int_{\tau_n}^{\delta_0} \sin^{-2} \frac{t}{2} dt \leq C_{35} \int_{\tau_n}^{\delta_0} t^{-2} dt \leq C_{36} n \sqrt{\varepsilon_n} + C_{37},$$

(2.28)

$$|A_2^{(2)}(\theta)| \leq \sin^{-2} \frac{\delta_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln U, \left(t, \frac{1}{\varphi} \right) \right| dt.$$

Но

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln U, \left(t, \frac{1}{\varphi} \right) \right| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln U, \left(t, \frac{1}{\varphi} \right) - \ln U, \left(\theta_0, \frac{1}{\varphi} \right) \right| dt + \\ + 2\pi \left| \ln U, \left(\theta_0, \frac{1}{\varphi} \right) \right|,$$

$$\left| \ln U, \left(t, \frac{1}{\varphi} \right) - \ln U, \left(\theta_0, \frac{1}{\varphi} \right) \right| \leq M \left| U, \left(t, \frac{1}{\varphi} \right) - U, \left(\theta_0, \frac{1}{\varphi} \right) \right|.$$

Значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln U, \left(t, \frac{1}{\varphi} \right) \right| dt \leq M \int_{-\pi}^{\pi} \left| U, \left(t, \frac{1}{\varphi} \right) \right| dt + 2\pi M \left| U, \left(\theta_0, \frac{1}{\varphi} \right) \right| + \\ + 2\pi \left| \ln U, \left(\theta_0, \frac{1}{\varphi} \right) \right|. \quad (2.33)$$

Выбираем $\theta_0 \in [\alpha, \beta]$. По (2.17) два последних слагаемых ограничены и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| U, \left(t, \frac{1}{\varphi} \right) \right| dt \leq \left\| U, \left(\frac{1}{\varphi} \right) \right\|_1 \leq \left\| \frac{1}{\varphi} \right\|_1 \leq \left\| \frac{1}{\varphi} \right\|_2 \leq C_{38}.$$

Таким образом

$$|A_2(\theta)| \leq C_{38} n \sqrt{\varepsilon_n} + C_{39}, \quad \alpha' \leq \theta \leq \beta'.$$

Заканчиваем доказательство так же, как лемму 1.5.

Лемма 2.6. Имеем (при условиях леммы 2.4):

$$\frac{1}{n} \left| \frac{d}{d\theta} \Psi_n(e^{i\theta}) \right| \leq C_{40} \omega^{1/2} \left(\frac{1}{n}, \varphi \right) + C_{41}, \quad \alpha' \leq \theta \leq \beta', \quad n > n_0.$$

Доказательство. Воспроизводим рассуждения, связанные с доказательством леммы 1.6. Только теперь вместо тригонометрических сумм $T_n(\theta)$ рассматриваем тригонометрические суммы $U_n\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right)$.

Вместо теоремы (A) — теорему (A'), вместо оценки (1.6) — оценку (2.17), где $C_{14} \equiv M$, а вместо леммы 1.5 — лемму 2.5.

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим тождество (1.49). Возьмем модули обеих его частей и применим к каждому слагаемому, соответственно, леммы 2.4, 2.1 и 2.6, 2.5, 2.3. После чего получим неравенство (2.3), то есть теорему 2.1.

Следствие 2.1. Если выполняются условия

$$1) \varphi(\theta) \leq M \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi), \quad \frac{1}{\varphi(\theta)} \in L_2(-\pi, \pi),$$

2) на отрезке $[\alpha, \beta]$

$$0 < \varphi(\theta) \in C(\alpha, \beta), \quad \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) \ln n = o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

3) равномерно относительно $\theta \in [\alpha, \beta]$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J(\theta; \eta; f) = 0,$$

то равномерно относительно $\theta \in [\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$ имеет место а.п. (0.4).

Следствие 2.2. При выполнении условий

$$1) \varphi(\theta) \leq M \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi), \quad \frac{1}{\varphi(\theta)} \in L_2(-\pi, \pi),$$

2) на отрезке $[\alpha, \beta]$

$$0 < \varphi(\theta) \in C(\alpha, \beta), \quad \frac{\omega(t, \varphi)}{t} \in L_1(0, \delta_0),$$

имеем а.ф. (0.5) и

$$\begin{aligned} |\rho_{n,1}(\theta)| \leq C_0 \left| \int_0^{1/n} \frac{\omega(t, \varphi)}{t} dt + \ln n \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) \right| + \\ + \omega^{1/2}\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right) \Big|, \\ \theta \in [\alpha_1, \beta_1]. \end{aligned}$$

§ 3. О возможности асимптотического представления производных любого порядка от ортогональных многочленов

В связи с задачами, рассмотренными в §§ 1—2, возникает вопрос: можно ли считать, что в условиях каждой из теорем 1.1, 2.1 имеет место а.п.

$$\Phi_n^{(m)}(z) = n^m z^{n-m} \overline{D(z, \varphi)}^{-1} + o(n^m), \quad z = e^{i\theta} \quad (3.1)$$

для произвольного $m > 1$?

Этот вопрос, как нам кажется, представляет интерес еще и потому, что при условиях каждой из указанных теорем имеет место а.п. (3.1) с $m = 0$ ([4]).

Применяя метод, изложенный в настоящей работе, докажем справедливость а.п. (3.1) при $\theta \in [-\pi, \pi]$ для случая $m = 2$ при условии что вес $0 < \varphi(\theta) \in C_{2k}$ и $\frac{\omega(t, \varphi)}{t} \in L_1(0, \pi)$.

Случай $m = 2$ типичен и для общего случая.

Установим справедливость лемм 3.1, 3.2, 3.3, аналогичных соответственно леммам 1.4, 1.5, 1.6.

Лемма 3.1. При условиях леммы 4.1 имеем

$$\frac{1}{n^2} \left| \frac{d^2 \Phi_n(e^{i\theta})}{d\theta^2} - \frac{\chi_n(\varphi)}{\chi_n(\psi)} \frac{d^2 \Psi_n(e^{i\theta})}{d\theta^2} \right| \leq C_1 \ln n E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right). \quad (3.2)$$

Доказательство. Имеем тождество

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_n(e^{i\theta})}{d\theta^2} - \frac{\chi_n(\varphi)}{\chi_n(\psi)} \frac{d^2 \Psi_n(e^{i\theta})}{d\theta^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[T_n^{-1}(t) - \varphi(t) \right] \Phi_n(e^{it}) \times \\ &\times \frac{d^2}{d\theta^2} K_{n-1}(e^{i\theta} e^{it}; \psi) dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Воспроизведя рассуждения, с помощью которых получена оценка для $|i_1|$ в лемме 1.4, получим

$$|i_1| \leq C_2 n^2 E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right). \quad (3.4)$$

Для оценки $|i_2|$ продифференцируем обе части тождества (1.29), после чего, применив неравенство С. Н. Бернштейна, получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^2}{d\theta^2} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi) \right| &\leq \frac{C_3 n^2}{|e^{i\theta} - e^{it}|} + \frac{C_4 n}{|e^{i\theta} - e^{it}|^2} + \\ &+ \frac{1}{|e^{i\theta} - e^{it}|} \left| \frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi) \right| + \frac{K_n(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)}{|e^{i\theta} - e^{it}|^2} + \\ &+ \left| \frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi) \right|. \end{aligned}$$

Но (см. стр. 63 и 64)

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi) \right| &\leq C_5 |e^{i\theta} - e^{it}|^{-1}, \quad |K_n(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)| \leq \\ &\leq C_6 n, \quad \theta, t \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

И так как

$$\int_{\frac{1}{n} < |\theta - t| < \pi} \frac{dt}{|e^{i\theta} - e^{it}|} \leq C_6 \ln n, \quad |e^{i\theta} - e^{it}|^{-1} \leq C_7 n \left(\frac{1}{n} \leq |\theta - t| \leq \pi \right),$$

то

$$|i_2| \leq C_8 n^2 \ln n E_n \left(\frac{1}{\varphi} \right). \quad (3.5)$$

Объединяя (3.5) и (3.4), получим (3.2).

Лемма 3.2. При условиях леммы 1.5 справедлива оценка

$$\frac{1}{n^2} \left| \frac{d^2}{d\theta^2} D(e^{i\theta}, \psi) \right| \leq C_9 \Omega^{1/2} \left(\frac{1}{n}, \varphi \right), \quad n \geq n_0. \quad (3.6)$$

Доказательство: Применяя (1.33) и интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} D(e^{i\theta}, \psi) = & -\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}, \psi) \left\{ \frac{T'_v(\theta)}{T_v(\theta)} + \right. \\ & \left. + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dt} [\ln T_v(t)] \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt \right\} - \\ & - \frac{1}{2} D(e^{i\theta}, \psi) \left\{ \frac{T'_v(\theta) T_v(\theta) - T_v'^2(\theta)}{T_v^2(\theta)} + \right. \\ & \left. + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2}{dt^2} [\ln T_v(t)] \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt \right\}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Оценка модуля выражения внутри первой фигурной скобки в правой части (3.7) известна и получена при доказательстве леммы 1.5, и поэтому модуль всего первого слагаемого $\leq C_{10} n^2 \Omega \left(\frac{1}{n}, \varphi \right)$. На

основании теоремы (A) и того, что $T_v(\theta) \geq \frac{1}{2m_0}$, имеем

$$\left| \frac{T'_v(\theta) T_v(\theta) - T_v'^2(\theta)}{T_v^2(\theta)} \right| < C_{11} n^2 \Omega \left(\frac{1}{n}, \varphi \right).$$

Перейдем к оценке модуля интеграла

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2}{dt^2} [\ln T_v(t)] \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{T'_v(t) T_v(t) - T_v'^2(t)}{T_v^2(t)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt.$$

Заменим отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ на сумму двух отрезков $[\theta - \tau_n, \theta + \tau_n]$ и $[\theta + \tau_n, 2\pi + \theta - \tau_n]$. Тогда интеграл представится в виде суммы двух интегралов

$$I = I_{|\theta - \tau_n, \theta + \tau_n|} + I_{|\theta + \tau_n, 2\pi + \theta - \tau_n|},$$

а

$$I_{|\theta - \tau_n, \theta + \tau_n|} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{\theta - \tau_n}^{\theta + \tau_n} \frac{T_v'(t) - T_v'(\theta)}{T_v(t)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt,$$

$$I_2 = \int_{\theta - \tau_n}^{\theta + \tau_n} \frac{T_v'(\theta)}{T_v(\theta)} \left[\frac{T_v(\theta) - T_v(t)}{T_v(t)} \right] \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt,$$

$$I_3 = \int_{\theta - \tau_n}^{\theta + \tau_n} \frac{T_v'^2(\theta) - T_v'^2(t)}{T_v'^2(t)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt,$$

$$I_4 = \int_{\theta - \tau_n}^{\theta + \tau_n} T_v'^2(t) \left[\frac{T_v^2(t) - T_v^2(\theta)}{T_v^2(\theta) T_v^2(t)} \right] \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt,$$

τ_n имеет то же значение, что и на стр. 65.

Применяя теорему (А), будем иметь

$$|I_1|, |I_2|, |I_3|, |I_4| \leq C_{12} n^3 \varepsilon_n \tau_n = C_{12} n^2 \varepsilon_n^{1/2}.$$

Таким образом

$$|I_{|\theta - \tau_n, \theta + \tau_n|}| \leq C_{12} n^2 \varepsilon_n^{1/2}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим

$$I_{|\theta + \tau_n, 2\pi + \theta - \tau_n|} = \int_{\theta + \tau_n}^{2\pi + \theta - \tau_n} \frac{d\tau(t)}{dt} \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt = \tau(t) \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} \Big|_{\theta + \tau_n}^{2\pi + \theta - \tau_n} + \frac{1}{2} \int_{\theta + \tau_n}^{2\pi + \theta - \tau_n} \tau(t) \left[\sin \frac{t - \theta}{2} \right]^{-2} dt, \quad \tau(t) = T_v(t) T_v^{-1}(t). \quad (3.9)$$

Обозначим первое слагаемое в (3.9) через $B_1(\theta)$, второе — через $B_2(\theta)$.

Применяя теорему (А), получим

$$\begin{aligned} |B_1(\theta)| &= \left| [\tau(\theta + \tau_n) - \tau(\theta - \tau_n)] \operatorname{ctg} \frac{\tau_n}{2} \right| \leq C_{14} \|\tau'\| = C_{14} \left\| \frac{T_v' T_v - T_v'^2}{T_v^2} \right\| \leq \\ &\leq C_{15} n^2 \varepsilon_n, \quad |B_2(\theta)| \leq C_{16} \|\tau\| \int_{\theta + \tau_n}^{2\pi + \theta - \tau_n} \sin^{-2} t dt \leq C_{17} n^2 \varepsilon_n^{1/2} + C_{18} n. \end{aligned}$$

Таким образом

$$|I_{[\theta+\tau, n, 2\pi+\theta-\tau, n]}| \leq C_{19} n^2 e_n^{1/2} + C_{20} n. \quad (3.10)$$

Объединяя (3.8) и (3.10), получим (3.6).

Лемма 4.3. При условиях леммы 1.6 имеем

$$\frac{1}{n^2} \left| \frac{d^2}{d\theta^2} \Psi_n(e^{i\theta}) \right| \leq C_{21} \Omega^{1/2} \left(\frac{1}{n}, \varphi \right) + C_{22}, \quad n \geq n_0. \quad (3.11)$$

Доказательство. Продифференцируем второе тождество (1.43). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} \overline{D(e^{i\theta}, \psi)}^{-1} &= \frac{d^2}{d\theta^2} D(e^{i\theta}, \psi) T_*(\theta) + 2 \frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}, \psi) T'_*(\theta) + \\ &+ D(e^{i\theta}, \psi) T''_*(\theta). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Продифференцируем первое тождество (1.43). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} \Psi_n(e^{i\theta}) &\equiv -n^2 e^{in\theta} \overline{D(e^{i\theta}, \psi)}^{-1} + 2 in e^{in\theta} \frac{d}{d\theta} \{D(e^{i\theta}, \psi)\}^{-1} + \\ &+ \frac{d^2}{d\theta^2} \overline{D(e^{i\theta}, \psi)}^{-1} e^{in\theta}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Оценим модуль правой части (3.13), применяя (3.12), лемму 3.2, тождество (1.43), лемму 1.5 и теорему (A). Получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^2 \Psi_n(e^{i\theta})}{d\theta^2} \right| &\leq C_{23} n^2 + C_{24} n^2 \Omega^{1/2} \left(\frac{1}{n}, \varphi \right) + C_{25} n^2 e_n + C_9 n^2 \times \\ &\times \Omega^{1/2} \left(\frac{1}{n}, \varphi \right) + C_{26} n^2 e_n \Omega^{1/2} \left(\frac{1}{n}, \varphi \right) + C_{27} n^2 e_n \leq n^2 \left\{ C_{20} \Omega^{1/2} \left(\frac{1}{n}, \varphi \right) + C_{21} \right\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.1. Если вес $0 < \varphi(\theta) \in C_{2k}$ и $\frac{\omega(t, \varphi)}{t} \in L_1(0, \pi)$, то имеет место а.п. (3.1) при $\theta \in [-\pi, \pi]$ для $m = 2$.

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \Phi_n(e^{i\theta}) &= iz \Phi'_n(z), \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \Phi_n(e^{i\theta}) &= -z^2 \Phi''_n(z) - z \Phi'_n(z). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Phi''_n(z) = -z^{-2} \frac{d^2}{d\theta^2} \Phi_n(e^{i\theta}) - z^{-1} \Phi'_n(z).$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} n^{-2} \Phi''_n(z) - z^{-2} \overline{D(z, \varphi)}^{-1} &= -z^{-2} \left\{ n^{-2} \frac{d^2}{d\theta^2} \Phi_n(e^{i\theta}) + \right. \\ &+ e^{in\theta} \overline{D(z, \varphi)}^{-1} - n^{-1} z^{-1} \Phi'_n(z) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Применяя тождество (1.49), напомним новое тождество

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \Phi_n(e^{i\theta}) + e^{in\theta} \overline{|D(e^{i\theta}, \varphi)|}^{-1} = \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} \Phi_n(e^{i\theta}) - \right. \\ & \left. - \frac{x_n(\varphi)}{x_n(\psi)} \frac{d^2}{d\theta^2} \Psi_n(e^{i\theta}) \right\} + \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{x_n(\varphi)}{x_n(\psi)} - 1 \right\} \left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} \Psi_n(e^{i\theta}) - \right. \\ & \left. - \frac{e^{in\theta}}{n} \left[\overline{|D(e^{i\theta}, \varphi)|}^{-1} - \overline{|D(e^{i\theta}, \psi)|}^{-1} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{e^{in\theta}}{n^2} \left[2in \frac{d}{d\theta} \overline{|D(e^{i\theta}, \psi)|}^{-1} + \frac{d^2}{d\theta^2} \overline{|D(e^{i\theta}, \varphi)|}^{-1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Применим к модулям слагаемых правой части, соответственно, леммы 3.1, 3.3 и 3.1, 1.3, 1.5, 3.2.

Вспользуемся тождеством (3.14), ко второму слагаемому которого применим теорему 1.1. Таким образом, убеждаемся в справедливости теоремы 3.1.

Харьковский авиационный
институт

Поступила 6.I.1975

Ք. Լ. ԳՈԼԻՆՍԿԻ. Ասիմպտոտիկ բանաձևեր օրթոգոնալ բազմաճիգամբների ածանցյալների համար (ամփոփում)

Աշխատանքում ստացված են պայմաններ, դրված կշռի վրա, որոնց դեպքում տեղի ունի ասիմպտոտիկ ներկայացում ամբողջ $[-\pi, \pi]$ հատվածում և նրա $[\alpha, \beta]$ մասում բազմանդամների ածանցյալների համար, որոնք օրթոնորմալ են միավոր շրջանագծի վրա արված կշռի նկատմամբ:

էականն այն է, որ այդ պայմանները համընկնում են այն պայմանների հետ, որոնց դեպքում գոյութուն ունի ասիմպտոտիկ ներկայացում օրթոգոնալ բազմանդամների համար [4].

Մեթոդը, որը կիրառված է աշխատանքում, պատկանում է Գ. Սեգեին, միայն այդ մեթոդը այստեղ ստացել է իր հետագա զարգացումը և խորացումը կոնստրուկտիվ ֆունկցիաների տեսության որոշ ընդհանուր թևերի կիրառման շնորհիվ:

B. L. GOLINSKIĪ. On the weight under which asymptotic presentation is valid (summary)

The present work obtains conditions imposed on the whole segment $[-\pi, \pi]$ and on its parts $[\alpha, \beta]$ for the derivatives of orthogonal polynomials on the unit circle.

It is of importance that these conditions are similar to those under which asymptotic presentation for the very orthogonal polynomials [4] exists.

The method used in the work begins with G. Sege, however, here it is developed further and deepened through application of some general theorems of the constructiv theory of functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. Сеѣ. Ортогональные многочлены, М., Физматгиз, 1962.
2. С. Н. Бернштейн. О многочленах, ортогональных в конечном интервале. Соб. соч., т. II, 1954, 7—106.

3. Я. А. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, М., Физматгиз, 1958.
4. Б. А. Голинский. Уточнение асимптотических формул Г. Сегё и С. Н. Бернштейна, Известия вузов, Математика, № 11 (78), 1968, 70—82.
5. П. К. Суетин. Некоторые вопросы теории ортогональных многочленов в комплексной области, Автореф. докт. дисс., Новосибирск, 1963.
6. П. К. Суетин. Основные свойства многочленов, ортогональных по контуру, УМН, XXI, вып. 2 (128), 1966, 41—88.
7. С. Ньбур. An asymptotic formula for the derivatives of orthogonal polynomials on the unit circle, Math. Scand., v, 20, 1967, 32—41.
8. G. Freud and T. Ganztus. Some [remarks on one-sided approximation, Math. Scand., 5, 1957, 276—284.
9. G. Freud. Eine Bemerkung zur asymptotischen Darstellung von Orthogonalpolynomen, Math. Scand., 5, 1957, 285—290.
10. С. Б. Стечкин. О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 1951, 212—242.
11. Б. А. Голинский. О быстроте сходимости последовательности ортогональных многочленов к предельной функции, Укр. матем. журн., 19, № 4, 1967, 11—28.
12. У. Гренандер, Г. Сегё. Теплицевы формы и их приложения, М., ИИЛ, 1961.
13. Я. А. Геронимус, Б. А. Голинский. Асимптотические формулы для ортогональных многочленов, Теория функций, функц. анализ и их прил., вып. I, 1965, 141—163.
14. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.