

К. Н. ХАЧАТРЯН

ПОСТРОЕНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МИНИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА, УБЫВАЮЩИХ В УГЛЕ С ЗАДАННОЙ СКОРОСТЬЮ

В настоящей работе нас интересует вопрос о построении нетривиальных целых функций $\omega_\alpha(z)$, имеющих по возможности медленный рост на плоскости и убывающих в угле $\Delta_\alpha = \left\{ z \in C; | \arg z | \leq \frac{\alpha}{2} \right\}$, $\alpha \in (0, 2\pi)$ с заданной скоростью

$$|\omega_\alpha(z)| < \exp \{-p(|z|)\}, \quad z \in \Delta_\alpha, \quad (1)$$

где $p(t)$ — положительная неубывающая функция на полуоси $[0, \infty)$. Из теоремы единственности Карлемана [1] следует, что для существования такой функции $\omega_\alpha(z)$ на рост функции $p(t)$ необходимо наложить следующее ограничение:

$$\int_1^\infty t^{-\alpha/2-1} p(t) dt < \infty. \quad (2)$$

В работе Н. У. Аракеляна [2] были построены целые функции порядка $\rho_\alpha = \max \{\pi/\alpha, \pi/(2\pi - \alpha)\}$ и нормального типа, удовлетворяющие в угле Δ_α неравенствам

$$\exp \{-c|z|^{\pi/\alpha}\} < |\omega_\alpha(z)| < \exp \{-\operatorname{Re} z^{\pi/\alpha} - p(|z|)\}, \quad |z| > 1^*, \quad (3)$$

где вместо монотонности функция $p(t)$ подчинена условию

$$t^{-\alpha/2} p(t) \downarrow 0, \quad \text{при } t \uparrow +\infty.$$

При этом было показано, что указанный порядок или тип нельзя улучшить.

Однако оказывается, что если правую часть неравенства (3) заменить неравенством (1), то тогда возможно понижение как порядка, так и типа искомой целой функции. Справедлива следующая основная в настоящей работе

Теорема А. Пусть $\alpha \in (0, 2\pi)$, $p(r)$ — положительная и неубывающая функция на полуоси $[1, \infty)$, подчиненная условию (2), и

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log p(r)}{\log r}.$$

* Буквами $c, c', c'', c_1, c_2, \dots$ всюду в этой статье обозначены положительные константы.

Тогда существует целая функция $\omega_\alpha(z)$ порядка $\max\{\pi/(2\pi-\alpha), \rho\}$ (и нормального типа в случае $\rho < \pi/(2\pi-\alpha)$), удовлетворяющая в угле Δ_α неравенствам

$$\exp \left\{ -c|z|^{\pi/\alpha} \int_{|z|}^{\infty} t^{-\pi/\alpha-1} p(t) dt \right\} < |\omega_\alpha(z)| < \exp(-p(|z|)), \quad |z| \geq 1. \quad (4)$$

Указанный порядок (и тип в случае $\rho < \frac{\pi}{2\pi-\alpha}$) нельзя понизить.

Заметим, что в силу (2) при $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ ρ всегда меньше величины $\pi/(2\pi-\alpha)$, так что построенная целая функция будет иметь порядок $\pi/(2\pi-\alpha)$ и нормальный тип.

В настоящей работе целая функция $\omega_\alpha(z)$ строится предложенной Н. У. Аракедяном следующей (новой) схемой: сначала строится голоморфная в некоторой области $D \supset \Delta_\alpha$ функция $f(z)$, возрастающая там примерно как $e^{p(z)}$. Затем эта функция аппроксимируется на Δ_α мероморфной функцией $F(z)$ с оценкой ее роста. Требуемая целая функция $\omega_\alpha(z)$ получается умножением мероморфной функции $\frac{1}{F(z)}$, которая убывает в угле Δ_α примерно как $e^{-p(z)}$ на некоторую нетривиальную целую функцию $B(z)$, множество нулей которой содержит множество полюсов функции $\frac{1}{F(z)}$ и которая ограничена в Δ_α (разумеется, функция $B(z)$ (как и $F(z)$) должна иметь по возможности медленный рост в плоскости).

Ниже, в пунктах 1°–4°, приводится доказательство теоремы А в согласии с указанной схемой.

1. Построение возрастающей голоморфной функции $f(z)$

Пусть $\varphi(r) \in C^{(1)}[1, \infty)$ — положительная неубывающая функция на $[1, \infty)$, удовлетворяющая условию (2) и неравенству $r^{-\pi/2} \varphi(r) < \min\{\pi-\alpha/2, \alpha/2\}$.

Положим $\varphi(r) = r^{\pi/\alpha} \varphi(1)$ при $0 < r < 1$ и обозначим

$$D(\varphi) = \{z = re^{i\theta} \in C; |\theta| < \alpha/2 + r^{-\pi/\alpha} \varphi(r)\}.$$

Покажем, что для указанной в теореме А функции p существует голоморфная в области $D(\varphi)$ и непрерывная на замыкании $\bar{D}(\varphi)$ (кроме, быть может, точек $z = 0$, $z = e^{\pm i(\alpha/2 + \varphi(1))}$) функция $f(z)$ такая, что

$$\exp(p(|z|)) < |f(z)| < \exp \left\{ c|z|^{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{|z|}^{\infty} t^{-\pi/\alpha-1} p(t) dt \right\},$$

для $z \in \bar{D}(\varphi)$, $|z| > 1$. (5)

С этой целью докажем предварительно следующую лемму об оценке интеграла Пуассона.

Лемма 1. Пусть $q(r)$ — определенная на $(-\infty, \infty)$ неотрицательная четная функция, не убывающая на полуоси $[0, \infty)$ и удовлетворяющая условию

$$\int_1^{\infty} t^{-2} q(t) dt < \infty.$$

Тогда функция

$$u(z) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(t)}{x^2 + (t-y)^2} dt, \quad z = x + iy, \quad x > 0$$

— интеграл Пуассона функции q для правой полуплоскости — удовлетворяет оценкам

$$\frac{1}{4} q(r) < u(z) < 3r \int_r^{\infty} \frac{q(t)}{t^2} dt, \quad r = |z| > 1, \quad \operatorname{Re} z \geq 0. \quad (6)$$

Доказательство. Для произвольной точки $z = x + iy$, $x > 0$ имеем

$$u(z) = \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q(t-|y|) + q(t+|y|)}{t^2 + x^2} dt < \frac{2}{\pi} x \int_0^{\infty} \frac{q(t+|y|)}{t^2 + x^2} dt.$$

Если теперь $|y| \leq x$ (и следовательно $|y| \leq \frac{r}{\sqrt{2}} \leq x \leq r$), то

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} x \int_0^{\infty} \frac{q(t+|y|)}{t^2 + x^2} dt &= \frac{2}{\pi} x \left(\int_0^x + \int_x^{\infty} \right) < \frac{1}{2} q(x+|y|) + \\ &+ \frac{2}{\pi} r \int_{r/\sqrt{2}}^{\infty} \frac{q(2t)}{t^2} dt < \frac{1}{2} q(2r) + 2r \int_{r/\sqrt{2}}^{\infty} \frac{q(t)}{t^2} dt < 3r \int_r^{\infty} \frac{q(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Если же $0 < x < |y|$ (и следовательно $x \leq \frac{r}{\sqrt{2}} \leq |y| \leq r$), то

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} x \int_0^{\infty} \frac{q(t+|y|)}{t^2 + x^2} dt &= \frac{2}{\pi} x \left(\int_0^{|y|} + \int_{|y|}^{\infty} \right) < q(2|y|) + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{\pi} r \int_{r/\sqrt{2}}^{\infty} \frac{q(2t)}{t^2} dt < q(2r) + r \int_{r/\sqrt{2}}^{\infty} \frac{q(t)}{t^2} dt < 3r \int_r^{\infty} \frac{q(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Оценим теперь функцию $u(z)$ снизу. Имеем

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q(t-|y|) + q(t+|y|)}{t^2 + x^2} dt \geq \frac{x}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{q(t+|y|)}{t^2 + x^2} dt \geq \\ &\geq \frac{1}{4} q(x+|y|) > \frac{1}{4} q(r). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь функцию $\zeta(t)$ ($\zeta(0) = 0$, $\zeta(\infty) = \infty$), конформно отображающую полученную из $D(\varphi)$ преобразованием $t = z^{1/\alpha}$ область

$$\Omega = \left\{ t = re^{i\theta} \in C; |\theta| < \frac{\pi}{2} + \frac{\tilde{\varphi}(r)}{r} \right\}, \quad \text{где } \tilde{\varphi}(r) = \frac{\pi}{\alpha} \varphi(r^{1/\alpha}),$$

на правую полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Так как функция $\tilde{\varphi}(r)$ обладает свойствами

$$\tilde{\varphi}(r) \uparrow \text{ при } r \uparrow \infty, \quad \int_1^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}(t)}{t^2} dt < \infty, \quad \int_1^{\infty} \left| d \frac{\tilde{\varphi}(t)}{t} \right| < \infty,$$

то согласно теоремам искажения Альфорса и Варшавского [3] (гл. 2, теоремы 5 и 6) получаем оценки

$$|z| < c_1 |\zeta(z)| \leq c_2 |z|, \quad \text{для } z \in \Omega, |z| \geq 1. \quad (7)$$

Для доказательства нашего утверждения введем функцию

$$p^*(r) = \int_r^{er} \frac{dt_3}{t_3} \int_{t_3}^{e t_3} \frac{dt_2}{t_2} \int_{t_2}^{e t_2} \frac{p(t_1)}{t_1} dt_1$$

и положим в лемме 1 $q(t) = p^*(|t|^{1/\alpha})$.

Пусть теперь $f_1(z)$ — голоморфная в правой полуплоскости функция такая, что $\operatorname{Re} f_1(z) = u(z)$. Искомую функцию $f(z)$ определим формулой

$$f(z) = \exp \{4f_1(c_1 \zeta(z^{1/\alpha}))\}, \quad \text{для } z \in D(\varphi).$$

Непрерывность функции $f(z)$ на замыкании $D(\varphi)$ следует из непрерывности производных соответственно первого и второго порядков функций $\varphi(t)$ и $q(t)$, а оценки (5) следуют из (6) и (7) и очевидного неравенства $p(r) \leq p^*(r) \leq p(e^3 r)$.

2. Равномерное приближение мероморфными функциями

В настоящем пункте в согласии с приведенной вначале схемой нам необходимо осуществить равномерную аппроксимацию на Δ_α мероморфными функциями функции $f(z)$, построенной в пункте 1°, с оценкой

роста аппроксимирующих функций. Отметим, что аппроксимируемая функция $f(z)$ голоморфна не только в Δ_α , но и в несколько более широкой области $D(\varphi)$. Задача такого типа о приближении мероморфными функциями в случае, когда $D(\varphi)$ имеет вид $\Delta_{\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, была исследована в работе Л. А. Тер-Исраеляна [4]. Применяя метод построения работы [4] в несколько модифицированном виде, сформулируем одну общую теорему в этом направлении.

Теорема В. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области

$$D_\beta = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}; |\theta| < \alpha/2 + \beta(r), r > 0\}$$

и непрерывна на $\bar{D}_\beta$, где $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\beta(r)$ — положительная дифференцируемая функция на полуоси $[0, \infty)$, удовлетворяющая там условиям

$$|\beta'(r)| < c', \quad \sup \{\beta(r); r \in [0, \infty)\} < \min \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} c', \pi - \frac{\alpha}{2} \right\}. \quad (8)$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ и некоторого натурального числа q существует мероморфная функция $F(z)$, удовлетворяющая условию

$$|F(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \text{для } z \in D_{q-1, \beta}, |z| \geq 1,$$

неванлинновская характеристика $T(r; F)$ которой оценивается неравенством

$$\begin{aligned} T(r; F) \leq c'' \left\{ \int_1^r \int_1^t \frac{\log M_L(2s; f)}{st} \cdot \frac{ds dt}{\beta(s)} + \int_1^r \frac{\log M_L(2t; f)}{t} dt + \right. \\ \left. + \log M(2r; f) + \int_1^r \int_1^t \frac{\log s}{st} \cdot \frac{ds dt}{\beta(s)} + \int_1^r \int_1^t \frac{|\log \beta(s)|}{\beta(s)} \cdot \frac{ds dt}{st} + \right. \\ \left. + \int_1^r \frac{|\log \beta(t)|}{t} dt + |\log \beta(r)| + \log^2 r \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

где $M_L(r; f) = \max \{|f(z)|; z \in \partial D_\beta, |z| \leq r\}$, $M(r; f) = \max \{|f(z)|; z \in D_\beta, |z| \leq r\}$.

Доказательство разобьем на три части. В первой докажем лемму о граничной кривой L области D_β , во второй дадим построение функции $F(z)$, в третьей — оценку $T(r; F)$.

1) Заметим, что в силу (8) существует положительное число δ такое, что для всех $r \in [0, \infty)$

$$\beta(r) \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} c' - \delta.$$

Следовательно

$$\beta(r) + \operatorname{arctg} c' < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} c' = \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad \beta(r) + \gamma \leq \frac{\pi}{2} - \delta. \quad (10)$$

Теперь построим на L последовательности точек $\{\zeta_k\}$ и $\{\zeta'_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) следующим образом. Пусть $\zeta_0 \neq 0$ — произвольная точка на кривой $\left\{ z = re^{i\theta}, \theta = \frac{\pi}{2} + \beta(r), r > 0 \right\}$. Далее, если уже построена точка ζ_k , определим ζ_{k+1} из условий

$$|\zeta_{k+1}| > |\zeta_k|, \quad |\zeta_{k+1} - \zeta_k| = \frac{1}{eq} |\zeta_k| \beta(|\zeta_k|), \quad (11)$$

где q — целое число такое, что

$$q \geq \max \left\{ \frac{5 \sin \gamma}{\sin \delta}, \pi + \sqrt{\frac{2}{\delta}} \right\}.$$

Комплексно сопряженные с ζ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) точки обозначим через ζ'_k , а круги с радиусом $\rho_k = \frac{1}{q} |\zeta_k| \beta(|\zeta_k|)$ и с центрами λ_k и ζ'_k — соответственно через V_k и V'_k . Очевидно, что точки ζ_k, ζ'_k простираются на L до бесконечности, когда $k \rightarrow \infty$.

Лемма 2. *Граница области $D_{q-1, \beta}$ не пересекается с совокупностью кругов $\bar{V}_k, \bar{V}'_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Существуют ограниченные целочисленные функции $k_1(h), 0 < k_1(h) \leq K, j = 1, 2$, где*

$$K = \max \left\{ \left\lceil \frac{eq}{c' \sin \delta \sin \gamma} \right\rceil + 1; \left\lceil \frac{eq}{(q-2) \cos \gamma} \right\rceil + 2 \right\}^*, \text{ такие,}$$

что для каждого целого $h \geq K$:

а) круги $V_{h-k_1(h)}$ и $V_{h-k_2(h)}$ лежат соответственно в областях $|z| > |\zeta_{h+1}|$ и $|z| < |\zeta_h|$:

б) точки $\zeta_{h+1+k_1(h)}$ и $\zeta_{h+1-k_2(h)}$ находятся соответственно вне кругов V_{h+1} и V_h ;

в) для всех натуральных k из промежутка $(h - k_2(h), h + k_1(h) + 1)$

$$\beta(|\zeta_k|) \geq c_3 \beta(|\zeta_h|),$$

где постоянная c_3 не зависит от h .

Доказательство. Пусть окружность ∂V_k пересекается с границей области $D_{q-1, \beta}$. Исходя из геометрического смысла неравенств (10) (первое из которых означает, что острый угол, составленный касательной кривой L с ближней стороной угла Δ_0 , не больше

* Квадратные скобки здесь и в доказательстве этой леммы означают взятие целой части находящейся в них величины.

γ), легко заметить, что на находящейся в угле $\left\{ z; \frac{\alpha}{2} \leq \arg z \leq \frac{\alpha}{2} + \beta(|\zeta_k|) \right\}$ половине ∂V_k будет находиться по крайней мере одна точка пересечения (а). Обозначим через ζ' находящуюся на L точку $|a| e^{i \arg a}$. Подсчитывая наибольшее возможное значение аргумента (в интервале $(0, 2\pi)$) комплексного числа $\zeta' - \zeta_k$, заключаем, на основании теоремы Лагранжа, о существовании точки ζ'' на кривой L ($|\zeta'| < |\zeta''| < |\zeta_k|$), для которой

$$\beta'' + \arctg c' > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\beta' + \beta) - \frac{\beta}{2(q - \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta' - \beta)},$$

где $\beta = \beta(|\zeta_k|)$, $\beta' = \beta(|\zeta'|)$ и $\beta'' = \beta(|\zeta''|)$. Но $\beta' > q \left(\beta - \arcsin \frac{1}{q} \beta \right)$,

а тогда $\beta \left\{ 2(q - \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta' - \beta) \right\}^{-1} < \delta$, так что

$$\gamma > \beta'' + \arctg c' > \frac{\pi}{2} - \beta' - \delta,$$

что противоречит условию (10).

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть длина отрезка касательной T в точке ζ_{h+1} к окружности $\{z; |z| = |\zeta_{h+1}|\}$, заключенная между ζ_{h+1} и лучом $\{z; \arg z = \alpha/2\}$, равна $\sin 2\gamma$. Рассмотрим лежащую в области $\{z; |z| > |\zeta_{h+1}|\}$ прямую l , проходящую на расстоянии $\cos \gamma \cos(\gamma - \beta)$ от точки ζ_{h+1} ($\beta = \beta(|\zeta_{h+1}|)$) и перпендикулярную к лучу $\{z; \arg z = \alpha/2\}$. Пусть d — расстояние точки ζ пересечения кривой $\left\{ z = r e^{i\theta}; \theta = \frac{\alpha}{2} + \beta(r) \right\}$ с прямой l от касательной T . Очевидно, что

$$d: \rho_c > \cos(\gamma + \beta) \cos(\gamma - \beta): \frac{\beta(|\zeta|)}{q \sin \beta(|\zeta|)} \{ \cos(\gamma + \beta) + 2 \cos(\gamma - \beta) \} \sin \gamma,$$

откуда в силу $q > \frac{5 \sin \gamma}{\sin \delta}$ получаем, что $d > \rho_c$. С другой стороны

находим, что $\rho_c > \frac{1}{q} \cos(\gamma + \beta) \sin \gamma$, так что, пройдя кривую L по точкам ζ_k , самое большее через

$$\left[\frac{\cos(\gamma - \beta) \cos \gamma}{(eq)^{-1} \cos(\gamma + \beta) \sin \gamma \cos \gamma} \right] + 1 \leq \left[\frac{eq}{(1 + c') \sin \delta \sin \gamma} \right] + 1$$

шагов переходим точку ζ , а за прямой l расстояние точки ζ_k от окружности $\{z; |z| = |\zeta_{h+1}|\}$ больше ρ_c . За точку $\zeta_{h+k, (h)}$ берем первую из точек ξ_k , которые попадают в другую (по сравнению с ζ_h) сторону l .

Таким образом, $V_{h+k_1(h)}$ находится в области $\{z; |z| > |\zeta_{h+1}|\}$ (первая часть утверждения а)) и $k_1(h) \leq K$. Заметим еще, что расстояние точки ζ от касательной T , равное самое меньшее $\cos(\gamma + \beta) \cos(\gamma - \beta)$, в силу $q \geq \frac{5 \sin \gamma}{\sin \delta}$ больше ρ_{h+1} . Это доказывает, что точка $\zeta_{h+k_1(h)}$ (а значит и точка $\zeta_{h+k_1(h)+1}$) находится вне круга V_{h+1} (первая часть утверждения б)), но и одновременно с этим, что круг V_{h-K} лежит в области $\{z; |z| < |\zeta_h|\}$.

Рассмотрим теперь лежащую в угле $W = \left\{ z; \frac{\alpha}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \gamma - \delta \right\}$ непрерывную дугу $\tilde{l}$, которая в угле $\left\{ z; \frac{\alpha}{2} \leq \arg z \leq \beta \right\}$, ($\beta = \beta(|\zeta_h|)$) совпадает с перпендикулярной к лучу $\{z; \arg z = \alpha/2\}$ прямой, проходящей через точку $z = (|\zeta_h| - \rho_h) e^{i\beta}$, а в угле $\left\{ z; \beta \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \gamma - \delta \right\}$ определяется уравнением $r = |\zeta_h| \left(1 - \frac{1}{q} \theta \right)$, ($r = re^{i\theta}$).

$\tilde{l}$ делит W на две части, из которых содержащую ζ_h будем считать правой. Пройдем точки ζ_k по направлению убывания индексов, начиная с точки ζ_h . Пусть $\zeta_{h-\tilde{k}_2(h)+1}$ — последняя из точек ζ_k , принадлежащих V_h . Легко видеть, что из этой точки до ζ_h можно идти самое большее через

$$\left\lceil \frac{1}{q} |\zeta_h| \beta; \frac{1}{eq} |\zeta_h| \left(\beta - \arcsin \frac{1}{q} \beta \right) \cos \gamma \right\rceil \leq \left\lceil \frac{eq}{(q-1) \cos \gamma} \right\rceil$$

шагов, то есть $\tilde{k}_2(h) \leq K-1$. Если $V_{h-\tilde{k}_2(h)-1} \subset \{z; |z| < |\zeta_h|\}$, то положим $k_2(h) = \tilde{k}_2(h) + 1$. Если это не имеет места (что возможно только при $\tilde{k}_2(h) < K-1$), то берем первую из следующих точек, считая ее за $\zeta_{h-k_2(h)}$, для которой это условие выполняется, то есть $V_{h-k_2(h)} \subset \{z; |z| < |\zeta_h|\}$. Очевидно, точка $\zeta_{h-k_2(h)+1}$ будет находиться правее кривой $\tilde{l}$, так как в противном случае мы имели бы, что $V_{h-k_2(h)+1} \subset \{z; |z| < |\zeta_h|\}$. Наконец, так как

$$V_{h-K} \subset \{z; |z| < |\zeta_h|\}, \text{ а } \tilde{k}_2(h) < K-1, \text{ то } k_2(h) \leq K.$$

Таким образом, определены функции $k_j(h)$, $j = 1, 2$, и доказаны утверждения а) и б). Докажем теперь утверждение в).

Очевидно, что во всех случаях точки ζ_k ; $h - k_2(h) < k \leq h$ находятся правее кривой $\tilde{l}$, где они имеют самое меньшее аргумент

$$\arctg \frac{|\zeta| \sin \beta - q^{-1} |\zeta| \beta \cos \beta \operatorname{tg} \gamma}{(|\zeta| - q^{-1} |\zeta| \beta) \cos \beta} > \arctg (\sin \beta - q^{-1} \beta \operatorname{tg} \gamma),$$

которое в силу условия $q \geq \frac{5 \sin \gamma}{\sin \delta} > 5 \operatorname{tg} \gamma$ больше величины $\operatorname{arctg} (2/\pi - 1/5) \beta > \frac{1}{3} \beta$.

Аналогично, для точек ζ_k : $h < k < h + k_1(h)$ получаем

$$\begin{aligned} \beta(|\zeta_k|) &\geq \operatorname{arctg} \frac{\sin \gamma \cos(\gamma + \beta')}{\sin 2\gamma \cos \beta' \operatorname{ctg} \beta' + \cos \gamma \cos(\gamma - \beta)} > \\ &> \frac{\sin \delta \sin \gamma}{3} \beta', \end{aligned}$$

где $\beta' = \beta(|\zeta_{k+1}|)$. Учитывая еще простое соотношение (16), приводимое ниже, можем написать

$$\beta(|\zeta_{k+1}|) > c_2 \beta(|\zeta_h|), \quad (h - k_2(h) < k \leq h + k_1(h));$$

заканчивая доказательство леммы.

2) Припишем кривой L направление, при движении по которому область D_3 остается слева. Обозначим через L_k дугу кривой L между точками ζ_k и ζ'_k , через l_k — разность $L_{k+1} \setminus L_k$, через s_k и s'_k — соответственно верхнюю и нижнюю половины l_k . Наконец, через Γ_k обозначим пробегаемую против часовой стрелки дугу окружности $\{z; |z| = |\zeta_k|\}$ между точками ζ'_k и ζ_k .

Вводим функцию

$$Q(\zeta, z) = \begin{cases} Q_k(\zeta, z), & \text{при } \zeta \in s_k \setminus \zeta_{k+1}; \quad k = 1, 2, \dots \\ Q'_k(\zeta, z), & \text{при } \zeta \in s'_k \setminus \zeta'_{k+1}; \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где

$$Q_k(\zeta, z) = - \sum_{j=0}^{n_k} \frac{(\zeta - \zeta_k)^j}{(z - \zeta_k)^{j+1}}, \quad Q'_k(\zeta, z) = - \sum_{j=0}^{n_k} \frac{(\zeta - \zeta'_k)^j}{(z - \zeta'_k)^{j+1}}$$

$\{n_k\}$ — подлежащая определению последовательность натуральных чисел). Очевидно, что

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - Q(\zeta, z) \right| < \frac{1}{\rho_{\zeta_k}} \cdot \frac{1}{e^{n_k}}, \quad (12)$$

когда $\zeta \in s_k \setminus \zeta_{k+1}$, $z \in V_k$ или $\zeta \in s'_k \setminus \zeta'_{k+1}$, $z \in V'_k$.

Пусть ρ_0 — положительное число такое, что ρ_0 -окрестность L_0 лежит целиком вне области $D_{q-1/2} \setminus \{z; |z| \leq 1\}$, и пусть $R_1(z)$ — рациональная функция, для которой вне этой окрестности

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R_1(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Введем последовательность функций

$$F_n(z) = R_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{n+1} \setminus L_0} f(\zeta) Q(\zeta, z) d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad n = 0, 1, \dots$$

и покажем, что при подходящем выборе $\{n_k\}$ она будет равномерно сходиться в любом круге $\{z; |z| < R\}$. В самом деле, выбирая n таким, чтобы имело место $|\zeta_n| - \rho_{\zeta_n} > R$, для любого натурального $m > n$ будем иметь

$$|F_m(z) - F_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=n+1}^m \int_{l_k} |f(\zeta)| \cdot \left| Q(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| \cdot |d\zeta|. \quad (13)$$

Заметим, что на l_k

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right) |\zeta_k| \beta(|\zeta_k|) < |\zeta| \beta(|\zeta|) < \left(1 + \frac{1}{q}\right) |\zeta_k| \beta(|\zeta_k|). \quad (14)$$

Тогда, с учетом (12), из (13) получим

$$|F_m(z) - F_n(z)| < c_4 \sum_{k=n+1}^m \int_{|\zeta_k|}^{|\zeta_{k+1}|} \frac{M_L(r)}{r \beta(r)} \cdot \frac{dr}{e^{n_k}}, \quad (15)$$

где $M_L(r) = M_L(r; f)$ и $c_4 = \frac{(c' + 1)(q + 1)}{\pi}$. Выберем числа n_k такими, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{M_L(r)}{e^{n_k}} \leq \frac{\beta(r)}{r} \quad \text{при} \quad |\zeta_k| \leq r < |\zeta_{k+1}|,$$

а следовательно и неравенство

$$c_4 \int_{|\zeta_0|}^{\infty} \frac{M_L(r)}{r \beta(r)} \cdot \frac{dr}{e^{n_k}} \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

предполагая, что $|\zeta_0|$ достаточно большой. За такое n_k можно взять целую часть выражения

$$\log M_L(|\zeta_{k+1}|) + \log |\zeta_{k+1}| + \log \frac{2}{\beta(|\zeta_k|)} + 1,$$

следовательно, в силу (11)

$$n_k < \log M_L(2|\zeta_k|) + \log |\zeta_k| + \log \frac{4e}{\beta(|\zeta_k|)}.$$

Построенная этими n_k последовательность $\{F_n(z)\}$ будет, таким образом, равномерно сходиться в любом конечном круге плоскости.

Предел ее $f(z)$ будет, очевидно, мероморфной функцией, имеющей с $R_1(z)$ общие, а в точках ζ_k, ζ'_k — n_k -кратные полюсы. Она аппроксимирует $f(z)$ на $D_{q^{-1}} \setminus \{z; |z| \leq 1\}$ с точностью ε . Действительно, по лемме 2 точка $z \in D_{q^{-1}}, |z| > 1$, находится вне всех кругов V_k, V'_k . Поэтому, выбирая n таким, чтобы имело место: $|z| < |\zeta_n|$ и $|F(z) - F_n(z)| < \varepsilon/3$, и используя равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{n+1} \cup \Gamma_{n+1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

можем написать

$$\begin{aligned} |F(z) - f(z)| &\leq |F(z) - F_n(z)| + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R_1(z) \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{n+1} \setminus L_n} f(\zeta) \left(Q(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

3) Оценим теперь

$$N(r, F) = \int_0^r \frac{n(t, F)}{t} dt \text{ и } m(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})| d\theta.$$

Пусть N_1 — число полюсов $R_1(z)$, и $r > |\zeta_0|$. Тогда

$$\begin{aligned} n(r, F) = N_1 + 2 \sum_{|\zeta_k| < r} n_k &< N_1 + 2 \sum_{|\zeta_k| < r} \left\{ \log M_L(2|\zeta_k|) + \log |\zeta_k| + \right. \\ &\left. + \log \frac{4e}{\beta(|\zeta_k|)} \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы устранить $|\zeta_k|$, заметим, как это легко следует из (11) и (14), что

$$|\zeta_{k+1}| - |\zeta_k| > |\zeta_k| \beta(|\zeta_k|) \cdot \frac{\sin \delta}{eq},$$

и

$$\frac{1}{2} \beta(|\zeta_k|) < \beta(|\zeta|) < 2\beta(|\zeta_k|), \text{ при } |\zeta_k| \leq |\zeta| \leq |\zeta_{k+1}|. \quad (16)$$

Далее, если $\psi(t)$ — неубывающая, то

$$\begin{aligned} \sum_{|\zeta_k| < r} \psi(|\zeta_k|) &= \sum_{|\zeta_{k+1}| < r} \frac{\psi(|\zeta_k|)}{|\zeta_{k+1}| - |\zeta_k|} \int_{|\zeta_k|}^{|\zeta_{k+1}|} dt + \psi(r) < \\ &< \frac{eq}{\sin \delta} \sum_{|\zeta_{k+1}| < r} \frac{1}{|\zeta_k| \beta(|\zeta_k|)} \int_{|\zeta_k|}^{|\zeta_{k+1}|} \psi(t) dt + \psi(r) < \end{aligned}$$

$$< \frac{e(q+1)}{\sin \delta} \int_1^r \frac{\psi(t) dt}{t^\beta(t)} + \psi(r).$$

Пользуясь этими замечаниями, можем написать

$$n(r, F) < c_3 \left\{ \int_1^r \frac{\log M_L(2t)}{t} \cdot \frac{dt}{\beta(t)} + \log M_L(2r) + \log r + \right. \\ \left. + \int_1^r \frac{\log t}{t \beta(t)} dt + \int_1^r \frac{|\log \beta(t)|}{t \beta(t)} dt + |\log \beta(r)| \right\},$$

из которого получается оценка для $N(r, F)$:

$$N(r, F) \leq c_3 \left\{ \int_1^r \int_1^t \frac{\log M_L(2s)}{st} \frac{ds dt}{\beta(s)} + \int_1^r \frac{\log M_L(2t)}{t} dt + \right. \\ \left. + \int_1^r \int_1^t \frac{\log s}{st} \frac{ds dt}{\beta(s)} + \int_1^r \int_1^t \frac{|\log \beta(s)|}{\beta(s)} \frac{ds dt}{st} + \int_1^r \frac{|\log \beta(t)|}{t} dt + \log^2 r \right\} \quad (17)$$

Оценим теперь $m(r, F)$.

Пусть h — целое число, для которого $|\zeta_h| \leq r < |\zeta_{h+1}|$. Если $r \geq |\zeta_k|$, то по лемме $2re^{i\theta} \notin V_{h+k_1(h)} \cup V'_{h+k_1(h)}$, а также $re^{i\theta} \notin V_{h-k_2(h)} \cup V'_{h-k_2(h)}$. Тогда $|F(re^{i\theta}) - F_{h+k_1(h)}(re^{i\theta})| < 1$ и, следовательно

$$\log^+ |F(re^{i\theta})| \leq \log^+ |F_{h+k_1(h)}(re^{i\theta})| + \log 2.$$

С другой стороны, как позволяет заметить равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{h-k_2+1} \cup \Gamma_{h-k_2+1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - re^{i\theta}} d\zeta = 0,$$

имеет место $|F_{h-k_2(h)}(re^{i\theta})| < 1$, так что

$$\log^+ |F(re^{i\theta})| \leq \log^+ |F_{h+k_1(h)}(re^{i\theta}) - F_{h-k_2(h)}(re^{i\theta})| + 2 \log 2.$$

Далее

$$|F_{h+k_1(h)}(re^{i\theta}) - F_{h-k_2(h)}(re^{i\theta})| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{h+k_1+1} \setminus L_{h-k_2+1}} f(\zeta) Q(\zeta, re^{i\theta}) d\zeta \right| + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{h-k_2+1}} |f(\zeta)| \cdot \left| \frac{1}{\zeta - re^{i\theta}} \right| \cdot |d\zeta| + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{h+k_1+1}} |f(\zeta)| \cdot \left| \frac{1}{\zeta - re^{i\theta}} \right| \cdot |d\zeta|. \quad (18)$$

Для оценки последних двух интегралов вспомним, что по лемме $2\zeta_{h-k_2(h)+1} \notin V_h$ и $\zeta_{h+k_1(h)+1} \notin V_{h+1}$. Следовательно

$$\frac{|\zeta_h|}{|\zeta_h| - |\zeta_{h-k_2+1}|} \leq \frac{|\zeta_h|}{q^{-1} |\zeta_h| \beta(|\zeta_h|)} < \frac{2q}{\beta(r)} \text{ и } \frac{|\zeta_{h+1}|}{|\zeta_{h+k_1+1}| - |\zeta_{h-1}|} \leq \\ \leq \frac{q}{\beta(|\zeta_{h+1}|)} < \frac{4q}{\beta(r)},$$

вследствие которых

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{h-k_2+1}} |f(\zeta)| \left| \frac{1}{\zeta - re^{i\theta}} \right| |d\zeta| < M(r) \frac{2q}{\beta(r)} \quad (19)$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{h+k_1+1}} |f(\zeta)| \left| \frac{1}{\zeta - re^{i\theta}} \right| |d\zeta| < M(2r) \frac{4q+1}{\beta(r)}, \quad (20)$$

где $M(r) = M(r; f)$.

Оценим теперь первый интеграл в (18). Имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{h+k_1+1} \setminus L_{h-k_2+1}} f(\zeta) Q(\zeta, re^{i\theta}) d\zeta \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=h-k_2+1}^{h+k_1} \int_{I_k} |f(\zeta)| \cdot |Q(\zeta, re^{i\theta})| \cdot |d\zeta|.$$

Пользуясь неравенством

$$\sum_{j=0}^n \frac{a^j}{b^{j+1}} \leq \frac{n+1}{b} \left(1 + \frac{a^n}{b^n} \right),$$

получим оценку для $|Q(\zeta, re^{i\theta})|$ при $\zeta \in I_k$; $h-k_2(h)+1 \leq k \leq h+k_1(h)$:

$$|Q(\zeta, re^{i\theta})| \leq \frac{n_k+1}{\delta(re^{i\theta})} \left(1 + \frac{\left\{ \frac{1}{eq} |\zeta_k| \beta(|\zeta_k|) \right\}^{n_k}}{\{\delta(re^{i\theta})\}^{n_k}} \right) < \\ < \frac{n_k+1}{\delta(re^{i\theta})} \left(1 + \frac{\{r\beta(r)\}^{n_k}}{\{\delta(re^{i\theta})\}^{n_k}} \right),$$

где $\delta(re^{i\theta}) = \min \{|re^{i\theta} - \zeta_k|, |re^{i\theta} - \zeta'_k|$; $h-k_2(h) \leq k \leq h+k_1(h)\}$.

Следовательно, для рассматриваемых k

$$\int_{I_k} |f(\zeta)| \cdot |Q(\zeta, re^{i\theta})| \cdot |d\zeta| < 2(c'+1) M_L(2r) \frac{n_k+1}{\delta(re^{i\theta})} < \\ \times \left(1 + \left\{ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} \right\}^{n_k} \right) (|\zeta_{k+1}| - |\zeta_k|).$$

Продолжая заметим, что для тех же k , как непосредственно следует из утверждения „в“ леммы 2, все n_k ограничены сверху величиной

$$n(r) = \log M_L(2r) + \log r + \log \frac{1}{\beta(r)} + c_6,$$

что вместе с предыдущим приведет к следующей оценке:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{h+k_1+1} \setminus L_{h-k_1+1}} f(\zeta) Q(\zeta, re^{i\theta}) d\zeta \right| < (c' + 1) M_L(2r) n(r) \times \\ \times \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} \left(1 + \left| \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} \right|^{n(r)} \right).$$

Отсюда

$$\log^+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{h+k_1+1} \setminus L_{h-k_1+1}} f(\zeta) Q(\zeta, re^{i\theta}) d\zeta \right| < 2 \log^+ M_L(2r) + \\ + \log \log r + (n(r) + 1) \log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} + \log \log \frac{1}{\beta(r)} + c_7,$$

что с ранее полученными неравенствами (19), (20) дает окончательную оценку для $\log^+ |F(re^{i\theta})|$:

$$\log^+ |F(re^{i\theta})| < 2 \log^+ M_L(2r) + 2 \log^+ M(2r) + (n(r) + \\ + 1) \log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} + \log \log r + 2 \log \frac{1}{\beta(r)} + \log \log \frac{1}{\beta(r)} + c_8.$$

Обращаясь к $m(r, F)$, отметим, что интеграл $\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} d\theta$ оценивается независимо от r [5]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} d\theta \leq 2 \log 2K + \frac{1}{2},$$

следовательно, для $m(r, F)$ получится оценка

$$m(r, F) \leq c_9 \left(\log^+ M(2r) + \log \frac{1}{\beta(r)} + \log \log r \right),$$

приводящая вместе с (17) к оценке (9) для $T(r; F)$. Теорема доказана.

К тому, как выглядит (9) в зависимости от $M_L(r; f)$, $M(r; f)$ и $\beta(r)$ при применении его к построенной нами в пункте 1° функции $f(z)$, мы вернемся в пункте 4°, а сейчас приступим к решению последней задачи нашей схемы — к построению функции $B(z)$.

3. Построение вспомогательной целой функции $B(z)$

Пусть z_k ($k = 1, 2, \dots$) — точки из $S\Delta_\alpha$. Введем обозначение:

$$\vartheta_k = \left(\pi - \frac{\alpha}{2} \right) - |\pi - \arg z_k|; \quad k = 1, 2, \dots$$

Предполагая, что ϑ_k ; $k = 1, 2, \dots$ подчинены условиям

$$\vartheta_k > \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{\log^2 |z_k|},$$

построим и оценим целую функцию $B(z)$ порядка

$$\max \left\{ \frac{\pi}{2\pi - \alpha}, \rho(n) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r} \right\}$$

($n(r)$ — счетная функция точек z_k) с условиями

$$B(z_k) = 0 \quad (\text{с учетом кратности}), \quad (21)$$

$$|B(z)| \leq 1, \quad \text{для } z \in \Delta_\alpha. \quad (22)$$

Вводя обозначения

$$D_R = \Delta_\alpha \cup \{z \in C; |z| < R\}, \quad \Gamma_R = \partial D_R,$$

$$\delta_\zeta = (p + 1) \frac{\log^3 |\zeta|}{|\zeta|^{\pi/(2\pi - \alpha)}}, \quad \zeta \neq 0, \quad \text{и } \psi(t) = (-t)^{\pi/(2\pi - \alpha)},$$

где p — произвольное число, большее $\rho(n)$, определим в области D_R функцию $g_\zeta(z)$ следующим равенством:

$$g_\zeta(z) = (z - \zeta) \frac{\zeta e^{-\delta_\zeta \psi(\zeta)}}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{\delta_\zeta \psi(t)}}{t(t - \zeta)(t - z)} dt \quad (R > |\zeta|), \quad (23)$$

где кривой Γ_R приписано направление, при движении по которому область D_R остается с правой стороны. По теореме Коши в определении $g_\zeta(z)$ кривую Γ_R можно заменить кривой $\Gamma_{R'}$ ($R' > R$), то есть функция $g_\zeta(z)$ может быть аналитически продолжена на всю плоскость $\{z; |z| < \infty\}$ и, таким образом, определяет целую функцию. Под $g_\zeta(z)$ будем понимать эту целую функцию. Ясно, что $g_\zeta(\zeta) = 0$.

Лемма 3. В области $\Omega_\zeta = \Delta_\alpha \cup \left\{ z; |z| < \frac{|\zeta|}{\log^4 |\zeta|} \right\}$ при $|\operatorname{Im}(\zeta - t)| \geq 1$; $t \in \partial \Delta_\alpha$, справедлива оценка

$$|g_\zeta(z) - 1| \leq c_{10} |\zeta| \exp \{-\delta_\zeta \operatorname{Re} \psi(\zeta)\}. \quad (24)$$

Доказательство. Оценим интеграл $\int_r^\infty \frac{dx}{x|x-w|}$ для значений

$|w| > r > 0 \left(w = u + iv = \frac{1}{a - ib} \right)$. Имеем

$$\int_r^\infty \frac{dx}{x|x-w|} = \frac{1}{|w|} \int_{-a}^{\frac{1}{r} - a} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{1}{|w|} \times$$

$$\times \log \frac{\left\{ \left(\frac{1}{r} - a \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{r} - a \right)^2 + b^2} \right\} (\sqrt{a^2 + b^2} + a)}{b^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \frac{dx}{x|x-w|} &\leq \frac{1}{|w|} \log \frac{4 \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{\left(\frac{1}{r} - a \right)^2 + b^2}}{b^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{|w|} \log \frac{8}{r} \frac{|w|^3}{v^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что из этого неравенства следует равномерная ограниченность интеграла для всех $r \geq 1$ и $|w| \geq 1$ в области $|w|, |v| \geq e^{-|w|}$.

Обозначим $r = \frac{2|z|}{\log^4 |z|}$. Если $z \in \Omega$, то

$$g(z) = 1 + (z - \zeta) \frac{\zeta e^{-\delta_\zeta \psi(\zeta)}}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\delta_\zeta \psi(t)}}{t(t-\zeta)(t-z)} dt.$$

Используя разложение

$$\frac{z - \zeta}{(t - \zeta)(t - z)} = \frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - \zeta}$$

и обозначения

$$\Gamma'_r = \Gamma_r \cap \{z; |z| = r\} \text{ и } \Gamma_r^* = \Gamma_r \cap \{z; |z| > r\},$$

можем написать

$$\begin{aligned} |g(z) - 1| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\zeta}{e^{\delta_\zeta \psi(\zeta)}} \right| \left(\int_{\Gamma'_r} \frac{e^{\operatorname{Re} \delta_\zeta \psi(t)}}{|t||t-z|} |dt| + \int_{\Gamma_r^*} \frac{e^{\operatorname{Re} \delta_\zeta \psi(t)}}{|t||t-\zeta|} |dt| + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_r^*} \frac{|dt|}{|t||t-z|} + \int_{\Gamma_r^*} \frac{|dt|}{|t||t-\zeta|} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Когда $z \in \left\{ z; |z| < \frac{|\zeta|}{\log^4 |\zeta|} \right\}$, первые два интеграла правой части неравенства (26) оцениваются величиной

$$2\pi \frac{\log^4 |\zeta|}{|\zeta|} \exp \left\{ \frac{2\pi(2\pi - \alpha) \cdot (p+1)}{(\log |\zeta|)^{2\alpha/(2\pi - \alpha)}} \cdot \log |\zeta| \right\},$$

которая равномерно ограничена для значений $|\zeta| > 2$. И так как третий интеграл меньше $\frac{4 \log^4 |\zeta|}{|\zeta|}$, а четвертый — $\frac{2}{|\zeta|} \log 4 |\zeta|^3$ (согласно (25)),

то (24) доказана в рассматриваемом случае.

В случае $z \in \Delta_\alpha$ положим в (26) $r=1$. Тогда для значений $|z| > 2$ получим

$$|g(z) - 1| \leq \left| \frac{\zeta}{e^{\delta_\zeta \psi(\zeta)}} \right| \cdot \left(\frac{e^{\delta_\zeta}}{|z| - 1} + \frac{e^{\delta_\zeta}}{|\zeta| - 1} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{d|t|}{|t| |t - \zeta|} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{d|t|}{|t| |t - z|} \right),$$

из которого согласно (25) следует справедливость оценки (24) в той подобласти угла Δ_α , точки z которой находятся от сторон угла на расстоянии не ближе, чем $e^{-|z|}$. Для доказательства (24) в тех точках $z \in \Delta_\alpha$, которые находятся вне этой подобласти, часть Γ_r в (23) ($r=1$), отсекаемая окружностью радиуса $e^{-|z|}$ с центром в z , заменим дугой этой окружности, лежащей вне Δ_α (что допустимо согласно теореме Коши). Ясно, что это добавит к предыдущей оценке только такой член:

$$\left| \frac{\zeta e^{-\delta_\zeta \psi(\zeta)}}{2\pi i} \int_{\sigma_z} \frac{e^{\delta_\zeta \psi(t)}}{t(t-z)} dt \right|.$$

Простое вычисление показывает, что интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_z} \frac{e^{\delta_\zeta \psi(t)}}{t(t-z)} dt$ оценивается величиной

$$\frac{1}{|z|} \exp \left\{ \delta_\zeta \frac{\pi}{2\pi - \alpha} e^{-|z|} |z|^{\frac{\pi}{2\pi - \alpha}} \right\},$$

откуда вытекает (24) и в этом случае. Лемма доказана.

Условимся теперь писать δ_k и $g_k(z)$ вместо δ_{z_k} и $g_{z_k}(z)$.

Теорема С. При достаточно малом $\sigma > 0$ произведение $B(z) = \prod_{k=1}^\infty \psi_k(z)$ представляет целую функцию порядка $\max \left\{ \frac{\pi}{2\pi - \alpha}, \rho_{(n)} \right\}$ (и нормального типа в случае $\rho_{(n)} < \frac{\pi}{2\pi - \alpha}$), обладающую свойствами (21) и (22).

Доказательство. Покажем сначала равномерную сходимость произведения в любом конечном круге $|z| < R$ плоскости. Пусть $k_R > 0$ такое, что $\frac{|z_k|}{\log^4 |z_k|} > R$ для всех $k \geq k_R$. Тогда

$$|g_k(z) - 1| \leq c_{10} |z_k| \exp \left\{ -\delta_k \left(\sin \frac{\pi \theta_k}{2\pi - \alpha} \right) |z_k|^{\frac{\pi}{2\pi - \alpha}} \right\} \leq \frac{c_{11}}{|z_k|^\rho}, \quad (27)$$

что и доказывает наше утверждение, так как $p > p(\tau)$. Если теперь вместо круга $|z| < R$ рассматривать угол Δ_1 , то здесь оценки (27) имеют место для всех k , и сходимость произведения $\prod_1 \left(1 + \frac{c_{11}}{|z_k|^p}\right)$

доказывает ограниченность $B(z)$ в угле Δ_1 .

Остается только оценить рост $B(z)$, так как выполнение (21) очевидно. Ясно также, что для этого следует рассматривать только точки $z \in C\Delta$. Ограничиваясь здесь значениями $|z| > 1$ и считая $|\zeta| > 1$, можем написать

$$g_1(z) = 1 - \frac{\zeta}{e^{\zeta_1 \psi(\zeta)}} \cdot \frac{e^{\zeta_1 \psi(z)}}{z} + (z - \zeta) - \frac{\zeta e^{-\zeta_1 \psi(\zeta)}}{2\pi i} \int_1^{\infty} \frac{e^{\zeta_1 \psi(t)}}{t(t - \zeta)(t - z)} dt.$$

Ясно, что для последнего слагаемого опять справедлива оценка (24) (откуда, между прочим, следует, что $g_1(z)$ нормального типа порядка

$\frac{\pi}{2\pi - \alpha}$), следовательно, обозначая $\lambda = \pi/(2\pi - \alpha)$, можем написать

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} |g_k(z)| &\leq \prod_1^{N-1} |g_k(z)| \cdot \prod_N^{\infty} \left\{ 1 + \left| \frac{z_k}{e^{\zeta_k \psi(z_k)}} \left(c_{12} + \left| \frac{e^{\zeta_k \psi(z)}}{z} \right| \right) \right\} \leq \\ &\leq \prod_{k=1}^{N-1} |g_k(z)| \cdot \prod_N^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{|z_k|^p} \left(c_{12} + \frac{e^{\zeta_k r^{\lambda}}}{r} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где $r = |z|$, а N такое, что $|z_k| > 1$ для $k \geq N$.

Если $n(r)$ — число точек z_k круга $|z| < r$, то

$$\begin{aligned} \log \prod_N^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{|z_k|^p} \left(c_{12} + \frac{e^{\zeta_k r^{\lambda}}}{r} \right) \right\} &= \int_{|z| \geq N}^{\infty} \log \left\{ 1 + \frac{1}{t^p} \left(c_{12} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{r} \exp \left[(p+1) \left(\frac{r}{t} \right)^{\lambda} \log^3 t \right] \right\} dn(t) < O(r^{\lambda}) + \\ &+ \int_1^{\infty} \frac{n(t)}{t} \cdot \frac{p + \lambda(p+1) \left(\frac{r}{t} \right)^{\lambda} \log^3 t}{rt^p + \exp[\dots]} \exp[\dots] dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что при достаточно большом $r \log^3 t \exp[\dots] < rt^p$ для $t > 2r \log^{2/\lambda} r$ и $r^{\lambda} \log^3 t < 2t^{\lambda}$ для $t \geq r \log^{3/\lambda} r$. Это позволяет получить из (28) окончательную оценку $B(z)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \log |B(z)| &< O(r^{\lambda}) + (\lambda + 1)(p + 1) r^{\lambda} \times \\ &\times \left\{ \int_1^{2r \log^{2/\lambda} r} \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} \log^3 t dt + \int_{2r \log^{2/\lambda} r}^{r \log^{3/\lambda} r} \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Очевидно, что в случае $\lambda > \rho_{(n)}$ правая часть (29) равна $O(r^\lambda)$, а в случае $\lambda \leq \rho_{(n)}$ она есть величина порядка $\rho_{(n)}$. Теорема доказана.

4. Построение функции $\omega_a(z)$

Вернемся теперь к теореме А. Положим

$$\beta(r) = \begin{cases} 10 (\pi - a/2) \log^{-2} r, & \text{для } r \in [e^{10}, \infty) \\ 10^{-1} (\pi - a/2), & \text{для } r \in (0, e^{10}). \end{cases}$$

Неравенства (8) и (10) для $\beta(r)$ будут удовлетворены, если взять $c' = \lg \frac{\pi}{50}$, $\delta = \frac{7\pi}{50}$ (тогда $\gamma = \frac{13\pi}{50}$). За целое число q можно взять число 10, так как

$$\max \left\{ \frac{5 \sin 13\pi/50}{\sin 7\pi/50}, \pi + \sqrt{\frac{100}{7\pi}} \right\} < 10.$$

Функцию $f(z)$ пункта 1° будем считать построенной в области $D(\varphi) = D_\beta$ ($\varphi(r) = r^{a/2} \beta(r)$) для функции $\log(e^{p(r)} + 1)$ (вместо $p(r)$).

Рассмотрим мероморфную функцию $\frac{1}{F(z)}$, где $F(z)$ — аппроксимирующая $f(z)$ с точностью до 1 функция пункта 2°. Она имеет ту же характеристику, что и $F(z)$ (с точностью до постоянного слагаемого), и в силу (5) удовлетворяет в области $D_{10^{-1}} \setminus \{z; |z| \leq 1\}$ неравенствам

$$\exp \left\{ -c_{13} |z|^{\pi/a} \int_{|z|}^{\infty} t^{-\pi/a-1} p(t) dt \right\} < \left| \frac{1}{F(z)} \right| < \exp \{ -p(|z|) \}. \quad (30)$$

Кроме того, полюсы ее z_k ; $k = 1, 2, \dots$, как следует из (30), лежат вне этой области, следовательно $\vartheta_k = (\pi - a/2) - |\pi - \arg z_k|$, начиная с некоторого номера, будут удовлетворять условиям

$$\vartheta_k > (\pi - a/2) \frac{1}{\log^2 |z_k|}.$$

Если среди z_k имеются m равных нулю ($z_k = 0$; $k = 1, 2, \dots, m$), в произведении $B(z)$ положим $g_k(z) = g_{m+1}(z) - g_{m+1}(0)$ для $k = 1, 2, \dots, m$. Этим произведением и вышеуказанной мероморфной функцией $\frac{1}{F(z)}$ и определяем искомую целую функцию:

$$\omega_a(z) = \frac{1}{F(z)} \cdot B(z).$$

Убедимся, что она удовлетворяет требованиям теоремы А. Действительно: (4) следует из (30) и (22). Далее, так как $|f(z)|$ прини-

мает на $L = \partial D$ значение $e^{4u(c_1; (z^{-\pi/\alpha}))} \leq e^{4p^*(c_1, \pi/|z|)} < e^{4p(c_1, |z|)}$, то есть $\log M_L(r; f) < 4p(c_1, |z|)$, а согласно (5)

$$\log M(r; f) < c|z|^{\pi/\alpha} \int_{|z|}^{\infty} t^{-\pi/\alpha-1} p(t) dt,$$

то для характеристики $T(r; F)$ имеем из (9)

$$T(r; F) \leq c_{15} \left\{ \int_1^r \int_1^t \frac{p(c_{15} s) \log^3 s}{st} ds dt + \int_1^r \frac{p(c_{15} t)}{t} dt + \right. \\ \left. + r^{\pi/\alpha} \int_r^{\infty} \frac{p(t)}{t^{\pi/\alpha+1}} dt + \log^3 r \right\}, \quad (31)$$

откуда видно, что она порядка $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log p(r)}{\log r}$ (можно было $\beta(r)$ подобрать таким, чтобы $T(r; F)$ было не только порядка, но и типа $\rho(r)$, но это для нас неважно). Имея эту оценку, можем говорить и об оценке $n(r)$ -счетной функции нулей $F(z)$:

$$n(r) \leq N(er, 0) \leq T(er; F) + \text{const}. \quad (32)$$

Так как $T(r; F)$ порядка ρ , то $\rho_{(n)} \leq \rho$, откуда следует, что $B(z)$ самое большее порядка $\max \{\pi/(2\pi - \alpha), \rho\}$.

Теперь можем написать и искомую оценку функции $\omega_\alpha(z)$. Имеем

$$T(r; \omega) \leq T(r; F) + \log |B(z)| + \text{const}, \quad (33)$$

откуда прежде всего видно, что $\omega_\alpha(z)$ имеет порядок не больше $\max \{\pi/(2\pi - \alpha), \rho\}$ (что он не может быть и меньше его, показывается ниже). Ясно, что в случае $\rho < \pi/(2\pi - \alpha)$, когда $B(z)$ нормального типа, $\omega_\alpha(z)$ также будет нормального типа порядка $\pi/(2\pi - \alpha)$ — наименьший рост при условии (4) (теорема Фрагмена—Линделёфа). Этот случай содержит в себе, как отмечали вначале, случай $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, иначе говоря для этих α полученный результат улучшить нельзя (в смысле порядка и типа).

Покажем теперь, что в общем случае порядок построенной функции минимальный.

В самом деле, если целая функция $\omega(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \dots \neq 0$ удовлетворяет в угле $\{z; |\arg z| \leq \alpha\}$ неравенству $|\omega(z)| \leq \exp(-p(|z|))$, где $p(r)$ — положительная функция порядка ρ , то ее порядок не может быть меньше $\max \{\pi/(2\pi - \alpha), \rho\}$. Это следует из теоремы Фрагмена—Линделёфа и следующей цепи неравенств

$$\log M(r; \omega) \geq T(r; \omega) \geq m(r, 0) + \log |c_\lambda| \geq \\ \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \log \left| \frac{1}{\omega(re^{i\theta})} \right| d\theta + \log |c_\lambda| \geq \frac{\alpha}{\pi} p(r) + \log |c_\lambda|.$$

Этим уже доказаны все утверждения теоремы А. Покажем еще на примере справедливость высказанного во введении утверждения о возможном понижении типа (когда $\varphi = \pi/\alpha$, $\alpha < \pi$) функции $\omega_\alpha(z)$ по сравнению с построенной в работе [2] функцией, происходящее вследствие замены правой части неравенства (3) неравенством (1).

Действительно, пусть

$$p(r) < \frac{r^{\pi/\alpha}}{\log^{\sigma+1} r} \quad (r \geq r_0 > 1),$$

где

$$\sigma > \max \left\{ \frac{4\pi}{\alpha}, \frac{6\pi}{\alpha} - 5 \right\}.$$

Тогда, пользуясь неравенством

$$\int_2^r \frac{t^{\sigma-1}}{\log^3 t} dt < \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{r^2}{\log^3 r},$$

справедливым для достаточно больших r , получим из (31)

$$T(r; F) \leq c_{16} \frac{r^{\pi/\alpha}}{\log^{\sigma-1} r}.$$

Согласно (32), такую же оценку имеем и для $n(r)$, в силу чего из (29) получим

$$\log |B(z)| < c_{17} \left(\frac{r^{\pi/\alpha}}{\log^{\sigma-\frac{4\pi}{\alpha}} r} + \frac{r^{\pi/\alpha}}{\log^{\sigma+5-\frac{6\pi}{\alpha}} r} \right).$$

Остальное следует из соотношения (33).

В заключение выражаю благодарность Н. У. Аракеляну за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 4.XI.1974

Կ. Ն. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Անկյան մեջ տրված արագությամբ նվազող միևնույն կարգի ամբողջ ֆունկցիաների կառուցումը (ամփոփում)

Հորվածում կառուցվում են $\alpha \in (0, 2\pi)$ բացվածքի անկյան մեջ տրված արագությամբ նվազող այնպիսի ամբողջ ֆունկցիաներ, որոնք ունեն այդ արագությամբ թույլատրվող նվազագույն կարգի ծույց է տրվում, որ $\alpha > \pi$ բացվածքի անկյունների դեպքում կառուցված ֆունկցիաները լավագույնն են նաև ըստ տիպի (ներմալ տիպ)։ Որոշ արագությամբների դեպքում տիպը լավագույնն է նաև մյուս դեպքերում ($\alpha < \pi$)։

K. N. KHACHATRIAN. The construction of entire functions of minimal order decreasing in the angle with given rate (summary)

Integral functions decreasing in the angle of opening $\alpha \in (0, 2\pi)$ with given rate and having minimal possible order are constructed. It is shown that in case when

$\alpha > \pi$ the constructed functions are minimal also in relation to the type (the normal type). For some rates the type is the best in the remaining ($\alpha < \pi$) cases also.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Мандельброт. Квазианалитические классы функций, ОНТИ, М.—Л., 1937.
2. Н. У. Аракелли. Построение целых функций конечного порядка, равномерно убывающих в угле, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1, № 3, 1966, 162—191.
3. С. Мандельброт. Теоремы замкнутости и теоремы композиции, ИЛ, М., 1962.
4. Л. А. Тер-Исраелли. Равномерные и касательные приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, № 1, 1971, 67—80.
5. У. К. Хейман. Мероморфные функции, Изд. „Мир“, 1966.