ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 1, 1976 Математика

А. Н. АЙРАПЕТЯН

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ПОДКЛАССОВ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть D означает круг $|z|<1$ и Γ — окружность $|z|=1$. Обозначим через Ω сферу Римана, а через $\rho(z_1, z_2)$ — неэвклидово расстояние между точками $z_1, z_2 \in D$. Положим $D(\zeta) = \{z;\ |z-\rho\zeta| < 1-\rho\}$, где $\zeta \in \Gamma$, а ρ — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $1/2 < \rho < 1$. Обозначим через $l(\zeta, \varphi)$ сегмент круга $D(\zeta)$, оканчивающийся в точке $\zeta \in \Gamma$ и образующий угол $\varphi \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ с диаметром круга D в точке ζ. Подобласть круга D, ограниченная двумя хордами $l(\zeta, \varphi_1)$ и $l(\zeta, \varphi_2)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right)$ и границей круга $D(\zeta)$, обозначим через $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. В случае, если $f(z)$ имеет предел, когда $z \to e^{i\theta}$, $z \in l(\zeta, \varphi)$, то его будем обозначать через $f(\theta, \varphi)$. *Отрезок* $l(\zeta, \varphi)$ назовем отрезком Жюлиа для функции $f(z)$, если для любых $\varphi_1, \varphi_2 \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right)$ функция $f(z)$ принимает в $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ бесконечно часто каждое значение $W \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений. Последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$ называют P-последовательностью для мероморфной в D функции $f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ функция $f(z)$ принимает в объединении неэвклидовых кругов $\{z;\ \rho(z, z_{n_k}) < \varepsilon\}$ бесконечно часто каждое значение $W \in \Omega$, кроме быть может, двух значений (см. [1]). *Сегмент* $l(\zeta, \varphi)$ назовем P-сегментом для $f(z)$, если $l(\zeta, \varphi)$ содержит хотя бы одну P-последовательность функции $f(z)$.

Пусть M есть произвольное борелевское множество на Γ. Положим $\sigma = \bigcup\limits_{\zeta \in M} D(\zeta)$.

Следуя К. Темко, введем понятие выпуклой емкости множества Для этого рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, обладающую двумя свойствами:

1) $\lambda_n \to 0$,

2) $\{\lambda_n\}$ выпукла, т. е. $\lambda_n - 2\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} \geqslant 0$.

Известно [2], что в этом случае ряд $Q(x) = \lambda_0 + \sum \lambda_n \cos nx$ сходится всюду, кроме, быть может, точки $x=0$ и является неотрицательной суммируемой функцией. Следовательно, функция

$$Q(r, x) = \lambda_0 + \sum \lambda_n r^n \cos nx$$

как пуассоновская сумма от $Q(x)$ удовлетворяет условию $Q(r, x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r < 1$. Измеримое по Борелю множество $E \subset \Gamma$ имеет положительную выпуклую емкость относительно последовательности $\{\lambda_n\}$, если существует такое распределение μ массы на E, для которой функция

$$V(x, r) = \int_0^{2\pi} Q(r, x - t)\, d\mu(t)$$

остается равномерно ограниченной по x при $r \to 1$. В случае отсутствия такой меры μ, считаем выпуклую емкость относительно $\{\lambda_n\}$ равной нулю.

В дальнейшем условимся говорить, что непрерывная и монотонная на (0,1) функция $H(t) \geqslant 0$ принадлежит C_H, если

$$H(0) = \infty,\ tH(t) \downarrow 0 \text{ при } t \to 0,\ \int_0 \frac{dt}{tH(t)} < +\infty,\ \int_0 H(t)\, dt < +\infty.$$

Обозначим $\lambda_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{H(1/k)}}$, а выпуклую емкость множества $E \subset \Gamma$ относительно этой последовательности—через $\mathrm{cap}_H\, E$. Для функции $f(z)$, мероморфной в D, через $\delta(r, \theta)$ обозначают выражение

$$\delta(r, \theta) \equiv \frac{|f'(re^{i\theta})|}{1 + |f(re^{i\theta})|^2}.$$

Теорема 1. *Пусть M — произвольное борелевское множество на Γ. Если непрерывная в D функция $U(re^{i\theta}) \geqslant 0$ удовлетворяет условию*

$$\iint_D [U(re^{i\theta})]^2 (1-r) H(1-r)\, r dr d\theta < +\infty, \tag{1}$$

то существует такое подмножество $E \subset M$ $\mathrm{cap}_H E = 0$, что в каждой точке $\zeta \in M \setminus E$

$$\int_{l(\zeta, \varphi)} U(re^{i\theta})\, |dz| < +\infty \quad (z = re^{i\theta} \in l(\zeta, \varphi))$$

для почти всех значений $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

В нижеследующем доказательстве используются схемы из [3] и [4].

Пусть $e^{i\alpha} \in M$ и $z = re^{i\theta} \in D$. Положим

$$h(r, \theta) = \begin{cases} U(re^{i\theta}), & z \in \sigma \\ 0 \quad , & z \in D \setminus \sigma. \end{cases}$$

Обозначим через $\psi \equiv \psi(r, \theta) = \pi - \arg(re^{i\theta} - 1)$, где $0 < r < 1$, $|\theta| < \pi$. Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{r(\cos \theta - r)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$B(\omega, r, \theta) = h(r, \omega + \theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \tag{3}$$

Функция $B(\omega, r, \theta)$ измерима для любого фиксированного ω, как функция от r и θ, $0 < r < 1$, $|\theta| < \pi$. Из (2) следует, что $B(\omega, r, \theta) > 0$ в $S = \{re^{i\theta};\ \cos \theta > r)$ и $B(\omega, r, \theta) \leqslant 0$ в $D \setminus S$. Обозначим через

$$J_1(\omega) = \iint\limits_{(S)} B(\omega, r, \theta)\, dr d\theta,$$

$$J_2(\omega) = -\iint\limits_{(D-S)} B(\omega, r, \theta)\, dr d\theta.$$

По определению $J_1(\omega) \geqslant 0$, $J_2(\omega) \geqslant 0$ для $e^{i\omega} \in M$. Введем функцию $J(\omega) \equiv J_1(\omega) - J_2(\omega)$.

Пусть C_r — окружность $|z| = r$, $0 < r < 1$, тогда

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{r(r - \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \leqslant \frac{r}{1 + r} < r \quad \text{для} \quad re^{i\theta} \in C_r \setminus S.$$

Оценим сверху интеграл $J_2(\omega)$, используя неравенство Коши—Буняковского и условие (1). Имеем

$$J_2(\omega) = -\int_0^1 dr \int\limits_{C_r \setminus S} B(\omega, r, \theta)\, d\theta \leqslant \int_0^1 dr \int\limits_{C_r \setminus S} r h(r, \theta + \omega)\, d\theta =$$

$$= \iint\limits_{(D-S)} h(r, \theta + \omega)\, r dr d\theta \leqslant \iint\limits_{D} h(r, \theta + \omega)\, r dr d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \iint\limits_{D} h^2(r, \theta + \omega)(1 - r) H(1 - r)\, r dr d\theta \right\}^{1/2},$$

$$\left\{ \iint\limits_{D} \frac{r dr d\theta}{(1 - r) H(1 - r)} \right\}^{1/2} \leqslant \left\{ \iint\limits_{\sigma} [U(re^{i\theta})]^2 (1 - r) H(1 - r)\, r dr d\theta \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \sqrt{2\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{dr}{(1 - r) H(1 - r)} \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Положим для $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$

$$L(\omega, \varphi)=\int\limits_{l(\omega, \varphi)} U(re^{i\varphi})\,|dz| \quad (z=re^{i\theta}\in l(\omega, \varphi)),$$

$$\chi(\omega)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L(\omega, \varphi)\cos\varphi d\varphi.$$

В статье [3] при условии $U(re^{i\theta})=\delta(r, \theta)$ доказано, что

1) $\chi(\omega)$ измеримо по Борелю,

2) $J(\omega)>(2\rho-1)\,\chi(\omega)$.

Единственное свойство функции $\delta(r, \theta)$, которое используется при доказательстве—это ее непрерывность, а так как в нашем случае $U(re^{i\theta})$ непрерывна, то условия 1) и 2) выполнены. Докажем, что множество $E=\{e^{i\omega}\in M;\ \chi(\omega)=\infty\}$ имеет емкость $\mathrm{cap}_H E=0$. Допустим напротив, что $\mathrm{cap}_H E>0$. По определению множество E должно содержать замкнутое подмножество F такое, что $\mathrm{cap}_H F>0$. Тогда на F существует такое распределение единичной массы, что потенциал

$$V_H(r, \theta)=\int\limits_F Q(r, \theta-\omega)\,d\mu_H(\omega) \text{ ограничен.} \tag{4}$$

В формуле (4) функция $Q(r, \theta-\omega)$ определяется формулой, где

$$\lambda_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$U_H(r, \theta)=\int\limits_0^{2\pi}\log\frac{1}{|re^{i\theta}-e^{i\omega}|}\,d\mu_H(\omega). \tag{5}$$

Интеграл (5) существует и представляет функцию, гармоническую и ограниченную: $|U_H(r, \theta)|\leqslant U_H<+\infty$. В статье [5] доказана следующая

Лемма 2.

$$\iint\limits_D\frac{1}{(1-r)\,H(1-r)}\left[\frac{\partial U_H}{\partial r}(r, \theta)\right]^2 r\,dr\,d\theta\leqslant K_H<+\infty.$$

Заметим, что

$$r\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}=-\int_F\frac{\partial}{\partial\theta}\arg(re^{i\theta}-e^{i\omega})\,d\mu_H(\omega).$$

Обозначим

$$R(\omega,r,\theta)\equiv B(\omega,r,\theta-\omega)=$$

$$=h(r,Q)\frac{\partial}{\partial\theta}\arg(re^{i\theta}-e^{i\omega})=\frac{rh(r,\theta)\{\cos(\theta-\omega)-r\}}{1-2z\cos(\theta-\omega)+r^2},$$

где $z=re^{i\theta}$, $e^{i\omega}\in F$. Легко видеть, что

$$h(r,\theta)\,r\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}=\int_F R(\omega,r,\theta)\,d\mu_H(\omega).$$

Рассмотрим интеграл

$$J=\iint_D drd\theta\int_F R(\omega,r,\theta)\,d\mu_H(\omega)=\iint_D h(r,\theta)\,r\frac{\partial U_H}{\partial r}(r,\theta)\,drd\theta. \tag{6}$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского к интегралу (6), получим

$$J^2\leqslant\iint_D[h(r,\theta)]^2(1-r)H(1-r)\,drd\theta, \tag{7}$$

$$\iint_D\frac{1}{(1-r)H(1-r)}\left[\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}\right]^2 drd\theta<+\infty.$$

Применяя теорему Фубини к отрицательной и положительной частям функции $R(\omega,r,\theta)$ можем написать

$$J=\int_F d\mu_H(\omega)\iint_D R(\omega,r,\theta)\,drd\theta.$$

Но

$$J(\omega)=\iint_D h(r,\theta+\omega)\frac{\partial}{\partial\theta}\{-\arg(re^{i\theta}-1)\}\,drd\theta=$$

$$=\iint_D h(r,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\{-\arg(re^{i\theta}-e^{i\omega})\}\,drd\theta=\iint_D R(\omega,r,\theta)\,drd\theta.$$

Отсюда, с учетом (6), будем иметь

$$J=\int_F J(\omega)\,d\mu_H(\omega),$$

откуда следует, что $J=+\infty$, так как по предположению для всех $e^{i\omega}\in F$ $J(\omega)=+\infty$. А это противоречит неравенству (7). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $F(z)$ непрерывна в D и имеет непрерывные частные производные первого порядка в D. Если*

$$\iint_{\sigma} (1-r)\, H(1-r)\, |\mathrm{grad}\, F|^2\, r dr d\theta < +\infty,$$

то

1° *на M существует такое множество E* $\mathrm{cap}_H\, E = 0$, *что в каждой точке $\zeta \in M \setminus E$*

$$\int_{l(\zeta,\, \varphi)} |\mathrm{grad}\, F|\, |dz| < +\infty \text{ для почти всех } \varphi \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right). \quad (8)$$

2° *существуют конечные пределы $F(\omega, \varphi)$ для всех φ, для которых интеграл* (8) *конечен и эти пределы равны.*

Доказательство. Положив в теореме 1 $U(re^{i\theta}) = |\mathrm{grad}\, F|$ и заметив, что $|\mathrm{grad}\, F|$ удовлетворяет всем условиям этой теоремы, мы получим справедливость утверждения 1° теоремы 2. Конечность величины $L(\omega, \varphi)$ означает, в частности, существование определенного конечного предела $F(\omega, \varphi)$. В силу теоремы 1, на множестве M существует такое подмножество E_1, $\mathrm{cap}_H\, E_1 = 0$, что для любого $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$ $L(\omega, \varphi)$ является суммируемой функцией аргумента $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому значения $L(\omega, \varphi)$ конечны для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим точки $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$, в которых $F(\omega, \varphi_1) \neq F(\omega, \varphi_2)$, хотя бы для двух значений

$$\varphi_1 \neq \varphi_2,\ \varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Такая точка называется точкой неопределенности для $F(z)$. Согласно теореме Багемила [6] множество точек неопределенности для произвольной функции не более, чем счетно. Поскольку счетное множество точек на Γ имеет нулевую H-емкость для любого $H \in C_H$, то теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если мероморфная в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию*

$$\iint_{\sigma} (1-r)\, H(1-r)\, [\delta(r, \theta)]^2\, r dr d\theta < +\infty,$$

то существует такое подмножество $E \subset M$, $\mathrm{cap}_H\, E = 0$, *что в каждой точке $\zeta \in M \setminus E$*

1° $$\int_{l(\zeta,\, \varphi)} \delta(r, \theta)\, |dz| < +\infty,\ z = re^{i\theta} \in l(\zeta, \varphi)$$

для почти всех $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$;

2° *существуют пределы* $f(\omega, \varphi_1)$, $f(\omega, \varphi_2)$ *и* $f(\omega, \varphi_1)=f(\omega, \varphi_2)$ *для всех* $e^{i\omega}\in M\setminus E$ *и* $\varphi_1, \varphi_2\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3° *для любых* $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *и* $\zeta\in M\setminus E$, *для которых* $L(\omega, \varphi)=\infty$, *сегменты* $l(\zeta, \varphi)\equiv l(\omega, \varphi)$ *являются сегментами Жюлиа функции* $f(z)$.

Доказательство. Полагая в теореме 1 $U(re^{i\theta})=\delta(r, \theta)$, получаем справедливость утверждения 1°. Утверждение 2° доказывается точно так же, как и во второй теореме. Пусть $L(\omega, \varphi_0)=\infty$ для каких-то $e^{i\omega}\in M$ и $\varphi_0\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Выберем значения $\varphi_1, \varphi_2\in$ $\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ таким образом, чтобы

$$L(\omega, \varphi_i)<+\infty,\ i=1, 2,\quad -\frac{\pi}{2}<\varphi_1<\varphi_0<\varphi_2<\frac{\pi}{2}$$

и рассмотрим область $\Delta(\omega, \varphi_1, \varphi_2)$. Согласно лемме 5 из статьи Цудзи [7], если $f(z)$ не принимает в $\Delta(\omega, \varphi_1, \varphi_2)$ три различных значения и $L(\omega, \varphi_i)<+\infty$, $i=1, 2$, то $L(\omega, \varphi)<+\infty$ для всех φ, $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$. Поэтому $f(z)$ должна принимать в $\Delta(\omega, \varphi_1, \varphi_2)$ бесконечно часто каждое значение из сферы Римана, кроме, быть может, двух значений. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Точно так, как в статье [8] можно доказать, что отрезки $l(\omega, \varphi_0)$, для которых $L(\omega, \varphi_0)=+\infty$, являются P-сегментами для функции $f(z)$.

Замечание 2. Теорему 3 можно усилить, если предположить, что

$$\iint_{\sigma}(1-r)H(1-r)[\delta(r, \theta)]^4\, r dr d\theta<+\infty.$$

Действительно, конечность $\chi(\omega)$ означает, что для любого $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{l(\omega, \varphi)}[\delta(r, \theta)]^2\, r dr d\theta<+\infty.$$

Хорошо известно, что если функция $f(z)$ имеет конечный интеграл Дирихле, то ее асимптотическое значение в точке $e^{i\omega}=\zeta\in M$ совпадает с угловым предельным значением функции $f(z)$ в точке $\zeta=e^{i\omega}$. Следовательно, $f(z)$ имеет угловые предельные значения на множестве M всюду, кроме, быть может, некоторого подмножества

$$E_1\subset M,\ \operatorname{cap}_H E_1=0.$$

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в D. Если в теореме 3 вместо $\delta(r, \theta)$ положить $|f'(z)|$, то ее можно усилить. Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть голоморфная в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию*

$$\iint_{\varphi} (1-r)\, H(1-r)\, |f'(re^{i\theta})|^2\, r dr d\theta < +\infty.$$

Тогда существует такое подмножество $E \subset M$, $\mathrm{cap}_{H} E = 0$, что в каждой точке $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E$ существует конечный угловой предел $f(\zeta)$ и интегралы

$$L(\omega, \varphi) = \int_{l(\omega, \varphi)} |f'(z)|\, |dz| \quad (\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E)$$

конечны для всех $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство. Положим в теореме 1 $u(re^{i\theta}) = |f'(re^{i\theta})|$. Согласно теореме 1, существует такое множество $E_1 \subset M$, $\mathrm{cap}_{H} E_1 = 0$, что в каждой точке $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$ интегралы

$$L(\omega, \varphi) = \int_{l(\omega, \varphi)} |f'(z)|\, |dz|,$$

конечны для почти всех $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Для этих значений φ существуют конечные и равные между собой пределы $f(\omega, \varphi)$. Рассмотрим те точки $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$, для которых можно указать хотя бы один угол $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\omega}$, что предельное множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2))$ функции $f(z)$ вдоль угла $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ совпадает с Ω. Рассмотрим следующие множества:

$$C_1(f, \zeta) = \bigcup_{z} \{f(z);\ z \in l(\zeta, \varphi_1) \cap \sigma\},$$

$$C_2(f, \zeta) = \bigcup_{z} \{f(z);\ z \in l(\zeta, \varphi_2) \cap \sigma\}.$$

Замыкание множества $C_1(f, \zeta) \cup C_2(f, \zeta)$ обозначим через $C(f, \zeta)$. Тогда множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)) \setminus C(f, \zeta)$ содержит значение ∞. Так как функция $f(z)$ голоморфна, то это значение является исключительным значением для $f(z)$. Согласно теореме Иверсена—Гросса ([9], стр. 100) значение ∞ является асимптотическим значением функции $f(z)$ в точке $\zeta = e^{i\omega}$. Следовательно, точка $\zeta = e^{i\omega}$ является точкой неопределенности для функции $f(z)$, и множество таких точек счетно. Присоединяя это к множеству E_1, получим множество E, $\mathrm{cap}_H E = 0$. В каждой точке $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E$ предельное множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2))$ по каждому углу $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ не совпадает с Ω и по почти всем хордам $l(\omega, \varphi)$ существуют конечные и равные между собой пределы $f(\omega, \varphi)$. Согласно теореме Линделефа ([9], стр. 17) в каждой точке $\zeta = e^{i\varphi} \in M \setminus E$ существует конечный предел $f(\zeta) = f(\omega, \varphi)$. Опять используя лемму Цудзи ([7], лемма 5) получим, что $L(\omega, \varphi)$ конечны для всех значений $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

В заключение выражаю благодарность В. И. Гаврилову, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Армянский государственный
педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 15.VII. 1974

Ա. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների ենթադասերի բացառիկ բազմությունների մասին *(ամփոփում)*

Ուռուցիկ ունակության տերմիններով ապացուցվում է ընդհանուր թեորեմ միավոր շրջանում անընդհատ կամայական ֆունկցիայի համար, որը բավարարում է որոշ ինտեգրալ պայմանի։ Օգտագործելով այդ թեորեմը, ապացուցվում է երկու թեորեմ դիտարկվող ֆունկցիաների եզրային հատկությունների մասին։

A. N. AJRAPETIAN. *On exceptional sets of subclasses of meromorphic functions* (summary)

In terms convex capacity a general theorem concerning continuous function satisfyine an integral equation in the unite circle is proved.

This is employed in the proof of two theorems on boundary properties of functions considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Гаврилов.* О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными, Мат. сб., 67 (209), № 3, 1965, 408—427.
2. *Н. Бари.* Тригонометрические ряды, ИИЛ, М., 1961.
3. *Y. Yamashita.* S. Function—theoric metrics and boundary behaviour functions meromorphic or holomorphic in the unit disk, Nogoya Math. J., 1972, 45, 1972, 105—117.
4. *В. И. Гаврилов.* О теоремах Берлинга, Карлесона и Цудзи относительно исключительных множеств, Мат. сб., 94 (136), № 1 (5), 1974.
5. *В. С. Захарян, В. И. Гаврилов.* Об исключительных множествах подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., в печати.
6. *F. Bagemihl.* Curvilinear cluster sets of arbitrary functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 41, 1955, 379—382.
7. *M. Tsuji.* Beurlings theorem on exceptional sets, Tohoki math. J., 2. 1950, 113—125.
8. *В. И. Гаврилов.* Об одной теореме Цудзи, Сибирск. матем. журн., 14, № 5, 1973.
9. *К. Носиро.* Предельные множества, М., 1963.