ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 6, 1975 Математика

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. З. МКРТЧЯН

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА С ОДНОКРАТНЫМ СПЕКТРОМ

В работе изучается вопрос о полноте заданной совокупности собственных элементов произвольного самосопряженного оператора A, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве H. В предположении однократности спектра этого оператора, доказывается необходимое и достаточное условие полноты системы $\Phi = \{\varphi_k\}$ его собственных элементов φ_k, отвечающих собственным значениям λ_k, которое формулируется исключительно в терминах резольвенты R_z рассматриваемого оператора A.

Представляется уместным особо подчеркнуть, что наше условие инвариантно относительно выбора фигурирующего в нем, так называемого, допустимого вспомогательного оператора G, а также и то, что при проверке выполнимости этого условия для конкретного самосопряженного оператора, достаточно знать лишь совокупность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ и нет необходимости находить саму систему Φ, полнота которой исследуется.

1°. В этом пункте приводится подробное доказательство нескольких вспомогательных предложений, используемых при установлении упомянутого выше критерия полноты, а также при доказательстве одного неравенства, аналогичного хорошо известному неравенству Бесселя для произвольных ортонормальных систем.

Пусть E_λ — соответствующее A спектральное семейство проекционных операторов, g — нормированный порождающий (циклический) элемент, $\rho(t) = \|E_t g\|^2$, а $\rho(t) = \rho_d(t) + \rho_a(t) + \rho_s(t)$ — каноническое разложение неубывающей функции $\rho(t)$ на дискретную, абсолютно непрерывную и сингулярную составляющие, причем $\rho_c(t) = \rho_a(t) + \rho_s(t)$ — вся непрерывная составляющая.

Пусть далее $V\colon H \to L^2_\rho$ — изометрический оператор, существующий по основной спектральной теореме (см., например, [1]).

Условимся, наконец, неограниченный линейный оператор G с плотной в H областью определения D_G, называть допустимым вспомогательным оператором, если как его ядро, так и его коядро тривиальны ($ker\ G = coker\ G = \{0\}$), а обратный к нему оператор $G^{-1}\colon H \to D_G$ является оператором Гильберта-Шмидта, и поэтому допускает представление:

$$G^{-1} f = \sum_{(p)} \mu_p \cdot (f, \hat{\omega}_p) \cdot \omega_p; \quad \forall f \in H, \tag{1}$$

где

$$\sum_{(p)} \mu_p^2 = \|G^{-1}\|_S^2 < +\infty, \text{ а } \{\hat{\omega}_p\} \text{ и } \{\omega_p\} \text{ — полные в } H$$

ортонормальные системы (см., например, [2]).

Лемма 1. *Пусть при некотором* $p \in N$ $\rho(\lambda_p + 0) - \rho(\lambda_p - 0) = \Delta_p > 0$, *и пусть* $\tilde{\omega}_k = V\omega_k$, *тогда* $\tilde{\omega}_k(\lambda_p)$ *определено при каждом* $k \in N$ *и имеет место неравенство*

$$|\tilde{\omega}_k(\lambda_p)|^2 \leqslant \frac{1}{\Delta_p}. \tag{2}$$

◀ Для доказательства прежде всего заметим, что точка λ_p по условию обладает положительной ρ-мерой, т. е. $\rho(\{\lambda_p\}) = \Delta_p > 0$, и поскольку $\tilde{\omega}_k(t) \in L_\rho^2$, то $\tilde{\omega}_k(\lambda_p)$ — вполне определенное число.

Далее, поскольку каждый из элементов ω_k имеет единичную норму в H, а оператор V изометрический, то справедлива нижеследующая цепочка соотношений:

$$1 = \|\omega_k\|^2 = \|V\omega_k\|^2 = \int_R |V\omega_k|^2 \, d\rho(t) = \int_R |\tilde{\omega}_k(t)|^2 \, d\rho(t) \geqslant$$

$$\geqslant \int_R |\tilde{\omega}_k(t)|^2 \, d\rho_d(t) \geqslant \sum_{(m)} |\tilde{\omega}_k(\lambda_m)|^2 \, \Delta_m \geqslant |\tilde{\omega}_k(\lambda_p)|^2 \cdot \Delta_p,$$

откуда уже непосредственно следует неравенство (2). ▶

Лемма 2. *Пусть для некоторого* $p \in N$, $\Delta_p > 0$, *тогда*

$$\sum_{(k)} \mu_k^2 \cdot |\tilde{\omega}_k(\lambda_p)|^2 < +\infty. \tag{3}$$

◀ Доказательство непосредственно следует из предыдущей леммы и сходимости ряда $\sum_{(k)} \mu_k^2$. ▶

Лемма 3. *Пусть для каждого* $p \in N$, $\Delta_p > 0$, *тогда нижеследующий двойной ряд*

$$\sum_{k,\, p \in N} \mu_k^2 \cdot |\tilde{\omega}_k(\lambda_p)|^2 \, \Delta_p < +\infty \tag{4}$$

сходится.

◀ Для доказательства прежде всего заметим, что поскольку все члены рассматриваемого двойного числового ряда (4) неотрицательны, то очевидно достаточно доказать его сходимость, например, в нижеследующем порядке суммирования:

$$\sum_{(k)} \mu_k^2 \left(\sum_{(p)} |\widetilde{\omega}_p (\lambda_k)|^2 \Delta_p \right).$$

С другой стороны, при доказательстве леммы 1 мы уже видели, что

$$\sum_{(p)} |\widetilde{\omega}_k (\lambda_p)|^2 \cdot \Delta_p \leqslant \|\omega_k\|^2 = 1,$$

поэтому сходимость рассматриваемого двойного ряда (4) непосредственно следует опять из сходимости ряда $\sum\limits_{(k)} \mu_k^2$. ▶

Лемма 4. *Пусть неотрицательная функция $f(t)$ принадлежит $L_\rho^1(R)$, тогда каждая точка непрерывности функции $\rho(t)$ является точкой непрерывности для*

$$\widetilde{\rho}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\, d\rho(t),$$

если же

$$\rho(\lambda_0 + 0) - \rho(\lambda_0 - 0) = \Delta_0 > 0, \text{ то}$$

$$\widetilde{\rho}(\lambda_0 + 0) - \widetilde{\rho}(\lambda_0 - 0) = f(\lambda_0) \cdot \Delta_0. \tag{5}$$

◀ Пусть сначала λ_0 — точка непрерывности функции $\rho(t)$, что конечно равносильно тому, что мера $\rho([\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta])$ промежутка $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ стремится к нулю вместе с δ. С другой стороны, для каждого $\delta > 0$ очевидно имеем

$$\widetilde{\rho}(\lambda_0 + \delta) - \widetilde{\rho}(\lambda_0 - \delta) = \int\limits_{\lambda_0 - \delta}^{\lambda_0 + \delta} f(t)\, d\rho(t),$$

и так как $f(t)$ суммируема по мере ρ, а ρ-мера множества, по которому производится интегрирование, стремится к нулю вместе с δ, то первая часть утверждения леммы доказана.

Пусть теперь ρ-мера одноточечного подмножества $\{\lambda_0\}$ положительна и, стало быть, функция $f(t)$ обязана быть определена в точке $t = \lambda_0$.

В силу первой части леммы имеем

$$\widetilde{\rho}(\lambda_0 + 0) - \widetilde{\rho}(\lambda_0 - 0) = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\lambda_0 - \delta}^{\lambda_0 + \delta} f(t)\, d\rho_d(t) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{|\lambda_k - \lambda_0| < \delta} f(\lambda_k)\, \Delta_k, \tag{6}$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ — последовательность всех точек разрыва функции $\rho(t)$. С другой стороны, из очевидного неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)\Delta_k \leqslant \int\limits_{R} f(t)\, d\rho(t) < +\infty$$

следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует N_ε такое, что $\sum_{k>N_\varepsilon} f(\lambda_k)\Delta_k<\varepsilon$. Положив $\delta_\varepsilon=\inf_{1\le k\le N_\varepsilon}|\lambda_k-\lambda_0|$, нетрудно понять, что для любого $\delta<\delta_\varepsilon$ будем иметь

$$\sum_{|\lambda_k-\lambda_0|<\delta} f(\lambda_k)\Delta_k=f(\lambda_0)\Delta_0+\sum_{k\in N_\varepsilon^*} f(\lambda_k)\Delta_k, \tag{7}$$

где N_ε^* — совокупность таких $k>N_\varepsilon$, для которых $|\lambda_k-\lambda_0|\leqslant\delta$, и поэтому сумма, стоящая справа в (7), очевидно, меньше ε. Переходя в (7) к пределу при $\delta\to 0$, мы получим вторую часть утверждения леммы, если принять во внимание соотношение (6). ▶

Лемма 5. *Пусть $F(t)$ — произвольная функция из L_ρ^1, тогда для каждого λ_0, являющегося точкой непрерывности функции $\rho(t)$, имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\tau\to 0}\tau^2\int_R\frac{|F(t)|\,d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}=0. \tag{8}$$

◀ Для доказательства разобьем промежуток интегрирования на две части, тогда будем иметь

$$\tau^2\int_R\frac{|F(t)|\,d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}=\tau^2\int_{|t-\lambda_0|<\delta}\frac{|F(t)|\,d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}+\tau^2\int_{|t-\lambda_0|\geqslant\delta}\frac{|F(t)|\,d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}. \tag{9}$$

Для первого, из стоящих в (9), интеграла $J_1(\tau)$ справедлива оценка

$$J_1(\tau)\leqslant\int_{|t-\lambda_0|<\delta}|F(t)|\,d\rho(t), \tag{9*}$$

и поскольку $F(t)$ суммируема по мере ρ, а мера множества, по которому производится интегрирование в (9*), равна $\rho(\lambda_0+\delta)-\rho(\lambda_0-\delta)$ и, стало быть, стремится к нулю вместе с δ, то найдется $\delta_0>0$, зависящее от ε и такое, что $J_1(\tau)\leqslant\varepsilon/2$. Полагая в (9) $\delta=\delta_0$, для второго, из стоящих справа в (9), интеграла $J_2(\tau)$ справедлива оценка

$$J_2(\tau)\leqslant\tau^2\int_R\frac{|F(t)|\,d\rho(t)}{\delta_0^2+\tau^2}\leqslant\frac{\tau^2}{\delta_0^2}\int_R|F(t)|\,d\rho(t),$$

откуда непосредственно заключаем, что при

$$\tau\leqslant\frac{\delta_0}{\sqrt{\|F\|_{L_\rho}}}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},\quad J_2(\tau)\leqslant\varepsilon/2.$$

Итак, предельное соотношение (8) доказано.

Лемма 6. *Пусть неотрицательные числа B_m таковы, что ряд $\sum_{m\in N} B_m$ сходится, тогда для любой последовательности $\{\lambda_m\}$,* *состоящей из попарно различных вещественных чисел, имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^2 \sum_{m\neq k} \frac{B_m}{(\lambda_m-\lambda_k)^2+\tau^2}=0. \tag{10}$$

◀ Сначала рассмотрим случай, когда λ_k не является предельной точкой рассматриваемой последовательности, т. е. $\inf_{m\neq k} |\lambda_m-\lambda_k| = \delta > 0$, тогда легко понять, что справедлива оценка

$$\tau^2 \sum_{m\neq k} \frac{B_m}{(\lambda_m-\lambda_k)^2+\tau^2} \leqslant \tau^2 \sum_{m\in N} \frac{B_m}{\delta^2},$$

откуда непосредственно следует искомое соотношение (10).

Рассмотрим теперь случай, когда λ_k — предельная точка последовательности $\{\lambda_m\}$, т. е. $\inf_{m\neq k} |\lambda_m-\lambda_k| = 0$. В этом случае при любом $\varepsilon > 0$ целесообразнее разбить участвующую в (10) сумму на две части следующим образом:

$$\tau^2 \sum_{m\in N_\varepsilon} \frac{B_m}{(\lambda_m-\lambda_k)^2+\tau^2} + \tau^2 \sum_{m>N_\varepsilon} \frac{B_m}{(\lambda_m-\lambda_k)^2+\tau^2}, \tag{11}$$

где N_ε выбрано так, что $\sum\limits_{m>N_\varepsilon} B_m \leqslant \varepsilon/2$ (это очевидно возможно, так как ряд $\sum\limits_{(m)} B_m$ сходится), и поэтому второе слагаемое в (11) тоже меньше $\varepsilon/2$. Для оценки первого слагаемого в (11) положим $\delta=\inf|\lambda_m-\lambda_k|$, где нижняя грань берется по всем $m\leqslant N_\varepsilon$ и отличных от k, тогда ясно, что $\delta>0$, и поэтому имеем оценку

$$\tau^2 \sum_{\substack{m<N_\varepsilon\\ m\neq k}} \frac{B_m}{(\lambda_m-\lambda_k)^2+\tau^2} \leqslant \tau^2 \sum_{(m)} \frac{B_m}{\delta^2},$$

следовательно, при достаточно малом τ, первое слагаемое тоже будет меньше $\varepsilon/2$. Итак, предельное соотношение (10) доказано в полном объеме. ▶

Лемма 7. *В каждой точке разрыва λ_0 функции ρ имеет место соотношение*

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0+i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 \cdot |\tilde{\omega}_p(\lambda_0)|^2 \cdot \Delta_0, \tag{12}$$

где $\Delta_0=\rho(\lambda_0+0)-\rho(\lambda_0-0)$.

◀ Сначала докажем, что левая часть в (12) не превосходит правую часть, а затем докажем, что и правая часть не превосходит левую, чем и будет установлена справедливость соотношения (12).

Для этого, прежде всего, воспользуемся указанной в [3] формулой

$$\|R_{\lambda_0+i\tau} G^{-1}\|^2 = \sup_{\{a\}} \int_R \frac{\left|\sum\limits_{(p)} a_p\mu_p \tilde{\omega}_p(t)\right|^2}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\, d\rho(t), \tag{13}$$

где верхняя грань распространена на всевозможные последовательности $\{a_p\}$ такие, что $\sum\limits_{(p)} |a_p|^2 = 1$. ▶.

Из этой формулы, принимая во внимание неравенство Коши-Буняковского, легко следует оценка

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0+i\tau}\, G^{-1}\|^2 \leqslant \lim_{\tau\to 0} \tau^2 \int\limits_R \frac{F(t)\, d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}, \tag{14}$$

где положено $F(t) = \sum\limits_{(p)} \mu_p^2 \cdot |\tilde{\omega}_p(t)|^2$ и, как показано в [3], $F(t) \in L^1_\rho(R)$.

Пусть теперь $\rho(t) = \rho_d(t) + \rho_c(t)$ — упомянутое выше разложение неубывающей функции $\rho(t)$ на функцию скачков $\rho_d(t)$ и на ее непрерывную составляющую $\rho_c(t)$, тогда очевидно будем иметь

$$\tau^2 \int\limits_R \frac{F(t)\, d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2} = \tau^2 \int\limits_R \frac{F(t)\, d\rho_d(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2} + \tau^2 \int\limits_R \frac{F(t)\, d\rho_c(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}, \tag{15}$$

и в силу леммы 5 второе слагаемое справа в (15) будет стремиться к нулю при $\tau \to 0$, а интеграл в первом слагаемом превратиться в соответствующий ряд и поэтому будем иметь

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^2 \int\limits_R \frac{F(t)\, d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2} = \lim_{\tau\to 0} \tau^2 \sum_{(\lambda_m)} \frac{F(\lambda_m)}{(\lambda_m-\lambda_0)^2+\tau^2} \cdot \Delta_m, \tag{16}$$

где суммирование распространено на все точки разрыва λ_m функции $\rho(t)$, а Δ_m — скачок $\rho(t)$ в точке λ_m. Поскольку λ_0 по условию тоже точка разрыва, то выделяя соответствующее ей одно слагаемое в правой части (16), получим

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^2 \int\limits_R \frac{F(t)\, d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2} = F(\lambda_0) \cdot \Delta_0 + \lim_{\tau\to 0} \tau^2 \sum_{\lambda_m \neq \lambda_0} \frac{B_m}{(\lambda_m-\lambda_0)^2+\tau^2}, \tag{17}$$

где положено $B_m = F(\lambda_m)\, \Delta_m$, а суммирование распространено по всем λ_m отличным от λ_0. Но так как ряд

$$\sum_{(m)} B_m = \sum_{(m)} F(\lambda_m)\, \Delta_m$$

очевидно сходится (его сумма не превосходит $\|F\|_{L^1_\rho}$), то в силу леммы 6 второе слагаемое в (17) стремится к нулю при $\tau \to 0$, следовательно, левая часть из (12) действительно не превосходит правую.

Перейдем теперь к доказательству обратного неравенства. Из (13) ясно, что

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0+i\tau}\, G^{-1}\|^2 \geqslant \lim_{\tau\to 0} \tau^2 \int\limits_R \frac{\left|\sum\limits_{(p)} a_p\, \mu_p\, \tilde{\omega}_p(t)\right|^2 d\rho_d(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2} +$$

$$+\lim_{\tau\to 0}\tau^2\int\limits_R \frac{\left|\sum\limits_{(p)} a_p\,\mu_p\,\tilde{\omega}_p(t)\right|^2}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\,d\rho_c\,(t), \tag{18}$$

и поскольку $\left|\sum\limits_{(p)} a_p\,\mu_p\,\tilde{\omega}_p\,(t)\right|^2$ при любых $\{a_p\}$ таких, что $\sum\limits_{(p)}|a_p|^2=1$, очевидно не превосходит функцию $F(t)\in L^1_\rho$, то в силу леммы 5, второе справа слагаемое в (18) стремится к нулю, поэтому это неравенство примет вид

$$\lim_{\tau\to 0}\tau^2\|R_{\lambda_0+i\tau}\,G^{-1}\|^2\geqslant\left|\sum_{(p)} a_p\,\mu_p\,\tilde{\omega}_p\,(\lambda_0)\right|^2\cdot\Delta_0-$$

$$+\lim_{\tau\to 0}\tau^2\sum_{\lambda_m\neq\lambda_0}\frac{B^*_m}{(\lambda_m-\lambda_0)^2+\tau^2}, \tag{19}$$

где $\quad B^*_m=\left|\sum\limits_{(p)} a_p\,\mu_p\,\tilde{\omega}_p\,(\lambda_m)\right|^2\Delta_m.$

Докажем, что ряд с неотрицательными членами

$$\sum_{(m)} B^*_m \tag{20}$$

сходится, и поэтому второе справа слагаемое в (19), в силу леммы 6, тоже стремится к нулю при $\tau\to 0$.

В самом деле, так как $\sum\limits_{(p)}|a_p|^2=1$, то по неравенству Коши-Буняковского очевидно будем иметь

$$B^*_m\leqslant\sum_{(p)}\mu_p^2\,|\tilde{\omega}_p\,(\lambda_m)|^2\,\Delta_m=B^{**}_m,$$

и поэтому ряд

$$\sum_{(m)}\left(\sum_{(p)}\mu_p^2\,|\tilde{\omega}_p\,(\lambda_m)|^2\Delta_m\right)=\sum_{(m)}B^{**}_m$$

будет мажорантным для ряда (20) и сходящимся в силу леммы 3.

Таким образом, обратное неравенство тоже установлено, чем и завершается доказательство соотношения (12). ▶

2°. В этом пункте, опираясь на доказанные выше леммы, мы установим одно неравенство, которое можно рассматривать как некоторый аналог классического неравенства Бесселя, а именно, справедливо следующее

Предложение 1. *Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в H с однократным спектром, R_z — его резольвента, а G — некоторый допустимый вспомогательный оператор, тогда для любой совокупности $\Lambda=\{\lambda_k\}$ собственных значений оператора A имеет место неравенство*

$$\sum_{(k)}\lim_{\tau\to 0}\tau^2\|R_{\lambda_k+i\tau}\,G^{-1}\|^2\leqslant\|G^{-1}\|^2_S\,. \tag{21}$$

◀ Каждый из членов этого ряда, в силу леммы 7, может быть записан в виде

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k+i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 \cdot |\tilde{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k,$$

поэтому искомое неравенство (21) без труда следует из нижеследующей цепочки неравенств:

$$\sum_{(k)} \lim_{\tau\to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k+i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(k)} \left(\sum_{(p)} \mu_p^2 |\tilde{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k \right) =$$

$$= \sum_{(p)} \mu_p^2 \left(\sum_{(k)} |\tilde{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k \right) \leqslant \sum_{(p)} \mu_p^2 \int_R |\tilde{\omega}_p(t)|^2 d\rho_d(t) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(p)} \mu_p^2 \int_R |\tilde{\omega}_p(t)|^2 d\rho(t) = \sum_{(p)} \mu_p^2 \|\omega_p\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 = \|G^{-1}\|_S^2 . \blacktriangleright$$

3°. Доказанные выше леммы позволяют установить нижеследующий критерий полноты системы собственных элементов, являющийся основным результатом настоящей статьи.

Теорема. *Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}$ — некоторая система собственных элементов самосопряженного оператора A с однократным спектром, отвечающих собственным значениям $\lambda_k \in \Lambda$, R_z — его резольвента, а G — некоторый допустимый вспомогательный оператор, тогда эта система полна в H, если и только если*

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau\to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k+i\tau} G^{-1}\|^2 = \|G^{-1}\|_S^2 . \tag{22}$$

◀ Необходимость. Пусть система Φ полна в H и, стало быть, непрерывный спектр отсутствует и вся спектральная мера сосредоточена в точках $\lambda_k \in \Lambda$, следовательно,

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \Delta_k = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} [\rho(\lambda_k + 0) - \rho(\lambda_k - 0)] = 1.$$

Докажем, что имеет место соотношение (22). В самом деле, по лемме 7 имеем

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k+i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 \cdot |\tilde{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k, \tag{12}$$

следовательно

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau\to 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k+i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 \left(\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\tilde{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k \right). \tag{23}$$

С другой стороны, поскольку $\rho(t) = \rho_d(t)$, имеет место цепочка равенств

$$1 = \|\omega_p\|^2 = \|V\omega_p\|^2 = \|\tilde{\omega}_p(t)\|^2_{L^2_\rho} = \int_R |\tilde{\omega}_p(t)|^2 d\rho(t) =$$

$$= \int\limits_R |\tilde{\omega}_p(t)|^2 \, d\rho_d(t) = \sum_{(k)} |\tilde{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k,$$

и поэтому из (23) непосредственно заключаем

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \| R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1} \|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 = \| G^{-1} \|_S^2 .$$

Достаточность. Пусть теперь соотношение (22) выполнено. Докажем сначала, что непрерывная составляющая спектральной меры отсутствует.

Допустим, вопреки нашему утверждению, что некоторая положительная доля спектральной меры ρ принадлежит непрерывной составляющей, тогда найдется множество $M \subset R$ такое, что $\rho_d(M) = 0$, $\rho_c(M) > 0$, и так как система $\{\tilde{\omega}_p(t)\}$ полна в $L^2_\rho(R)$, то найдется хотя бы одна функция из этой системы, например, $\tilde{\omega}_{p_0}(t)$, которую можно без ограничения общности считать отличной от нуля почти всюду на M и, стало быть

$$\int\limits_M |\tilde{\omega}_{p_0}(t)|^2 \, d\rho_c(t) > 0. \tag{24}$$

С другой стороны, как и выше, имеет место цепочка соотношений

$$1 = \|\omega_{p_0}\|^2 = \int\limits_R |\tilde{\omega}_{p_0}(t)|^2 \, d\rho_d(t) + \int\limits_R |\tilde{\omega}_{p_0}(t)|^2 \, d\rho_c(t) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{(k)} |\tilde{\omega}_{p_0}(\lambda_k)|^2 \Delta_k + \int\limits_M |\tilde{\omega}_{p_0}(t)|^2 \, d\rho_c(t),$$

и поэтому, в силу (24), получаем

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\tilde{\omega}_{p_0}(\lambda_k)|^2 \Delta_k < 1. \tag{25}$$

Теперь уже легко прийти к противоречию с соотношением (22). В самом деле

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \to 0} \tau^2 \| R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1} \|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 \Big(\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\tilde{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k \Big) =$$

$$= \mu_{p_0}^2 \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\tilde{\omega}_{p_0}(\lambda_k)|^2 \Delta_k + \sum_{p \neq p_0} \mu_p^2 \int\limits_R |\tilde{\omega}_p(t)|^2 \, d\rho_d(t),$$

но принимая во внимание строгое неравенство (25), а также и то, что $\int\limits_R |\tilde{\omega}_p(t)|^2 \, d\rho_d(t)$ очевидно меньше нормы $\|\omega_p\|^2 = 1$, получим неравенство

$$\sum_{\lambda_k\in\Lambda}\lim_{\tau\to 0}\tau^2\|R_{\lambda_k+i\tau}G^{-1}\|^2<\mu_{p_0}^2+\sum_{p\neq p_0}\mu_p^2=\|G^{-1}\|_S^2,$$

которое противоречит соотношению (22).

Докажем теперь, что система Φ полна в H, для чего очевидно достаточно установить, что $\sum_{\lambda_k\in\Lambda}\Delta_k=1$. Допустим, вопреки нашему утверждению, что $\sum_{\lambda_k\in\Lambda}\Delta_k\leqslant 1-\delta$, где $\delta>0$.

В силу доказанного выше, имеем

$$\sum_{\lambda_k\in\Lambda}\lim_{\tau\to 0}\tau^2\|R_{\lambda_k+i\tau}G^{-1}\|^2=\sum_{(p)}\mu_p^2\sum_{\lambda_k\in\Lambda}|\tilde\omega_p(\lambda_k)|^2\Delta_k. \tag{23}$$

С другой стороны, по только что доказанному, непрерывная составляющая спектральной меры отсутствует, а по предположению $\sum_{\lambda_k\in\Lambda}\Delta_k<1-\delta$, поэтому найдется хотя бы одна точка $\lambda_0\bar{\in}\Lambda$ такая, что $\rho(\{\lambda_0\})=\Delta_0>0$.

Далее, поскольку система $\{\tilde\omega_p(t)\}$ полна в $L_\rho^2(R)$, то найдется функция $\tilde\omega_{p_0}(t)$ такая, что $\tilde\omega_{p_0}(\lambda_0)\neq 0$. Ясно, что для этой функции $\tilde\omega_{p_0}(t)$ имеет место неравенство:

$$\sum_{\lambda_k\in\Lambda}|\tilde\omega_{p_0}(\lambda_k)|^2\Delta_k\leqslant 1-|\tilde\omega_{p_0}(\lambda_0)|^2\Delta_0. \tag{26}$$

В самом деле, это непосредственно следует из того, что

$$\sum_{\lambda_k\in\Lambda}|\tilde\omega_{p_0}(\lambda_k)|^2\Delta_k<\sum_{\lambda_k\in\Lambda}|\tilde\omega_{p_0}(\lambda_k)|^2\Delta_k+|\tilde\omega_{p_0}(\lambda_0)|^2\Delta_0\leqslant$$

$$\leqslant\int_R|\tilde\omega_{p_0}(t)|^2d\rho_d(t)=\int_R|\tilde\omega_{p_0}(t)|^2d\rho(t)=1.$$

Теперь уже легко прийти к противоречию с соотношением (22), так как в силу (26) будем иметь

$$\sum_{\lambda_k\in\Lambda}\lim_{\tau\to 0}\tau^2\|R_{\lambda_k+i\tau}G^{-1}\|^2=\sum_{p\neq p_0}\mu_p^2\Big(\sum_{\lambda_k\in\Lambda}|\tilde\omega_p(\lambda_k)|^2\Delta_k\Big)+\mu_{p_0}^2\sum_{\lambda_k\in\Lambda}|\tilde\omega_{p_0}(\lambda_k)|^2\Delta_k\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{p\neq p_0}\mu_p^2+\mu_{p_0}^2(1-|\tilde\omega_{p_0}(\lambda_0)|^2\Delta_0)=\sum_{(p)}\mu_p^2-\mu_{p_0}^2|\tilde\omega_{p_0}(\lambda_0)|^2\Delta_0=$$

$$=\|G^{-1}\|_S^2-\mu_{p_0}^2\cdot|\tilde\omega_{p_0}(\lambda_0)|^2\Delta_0<\|G^{-1}\|_S^2. \blacktriangleright$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 1.XII.1975

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ, Ռ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Միապատիկ սպեկտրով կամայական ինքնահամալույծ օպերատորի սեփական էլեմենտների սիստեմի լրիվության մի հայտանիշի մասին *(ամփոփում)*

Հետազոտվում է սեպարաբել հիլբերտյան տարածության մեջ գործող կամայական ինքնահամալույծ օպերատորի սեփական էլեմենտների լրիվության հարցը։

Ենթադրելով օպերատորի սպեկտրի միապատիկությունը, ապացուցված է լրիվության անհրաժեշտ և բավարար պայման, որն ձևակերպված է միայն օպերատորի ռեզոլվենտի տերմիններով։

R. A. ALEXANDRIAN, R. Z. MKRTCHIAN. *On the criterion of completness of the system eigenelements general selfadjoined operator with simple spectrum*
(summary)

Completness of given system of eigenelements of arbitrery selfadjoined operator in separable Hilbert space is studied.

Necessary and sufficient condition of completness is prooved in the case when the spectrum of operator is simple.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Морен.* Методы гильбертова пространства, Изд. „Мир", М., 1965.
2. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд. „Наука", М., 1965.
3. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О ядре спектра самосопряженного оператора с простым спектром, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 2, 1970.