

С. М. ОГАНЕСЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ
 ОРТОГОНАЛЬНЫМИ РЯДАМИ, СУММИРУЕМЫМИ
 В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

Пусть

$$T = \|a_{ij}\| \quad (1.1)$$

— линейный регулярный метод суммирования, то есть матрица (1.1) удовлетворяет условиям:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < H, \text{ где } H \text{ не зависит от } i, \quad (1.2)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 1. \quad (1.4)$$

Пусть далее $\varphi(y)$ — любая непрерывная функция, определенная на $[0, +\infty)$ и удовлетворяющая условиям:

$$\varphi(y) \uparrow, \quad \varphi(0) = 0, \quad (1.5)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\varphi(y)}{y} = 0, \quad (1.6)$$

$$\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b) \text{ при любых } a, b \geq 0. \quad (1.7)$$

Определение. Измеримая функция $f(x)$, определенная почти всюду на отрезке $[0,1]$, принадлежит пространству $L_p[0,1]$, если

$$\int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx < +\infty.$$

В работе [3] было установлено, что если линейный регулярный метод $T = \|a_{ij}\|$ удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^p < +\infty \text{ для каждого } i=1, 2, \dots, \text{ где } 0 < p < 1, \quad (1.8)$$

то для произвольной функции $f(x) \in L_p[0,1]$ ($0 < p < 1$) существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

и последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \dots$, которые удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 |A_{i_k}(x, T) - f(x)|^p dx = 0 \quad (0 < p < 1),$$

где T -средние $A_i(x, T)$ существуют в смысле сходимости в $L_p [0, 1]$ для всех $i = 1, 2, \dots$.

Можно доказать, что в указанном утверждении условие (1.8) на метод T излишне, и что вместо подпоследовательности i_k можно взять всю последовательность. Более того, верна

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ПОНС в $L_2 [0, 1]$, $T = \|a_{ij}\|$ — линейный регулярный метод суммирования. Тогда для любой функции $f(x) \in L_p [0, 1]$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (1.9)$$

T -средние которого сходятся к $f(x)$ в метрике $L_p [0, 1]$, т. е.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi_i(|A_i(x, T) - f(x)|) dx = 0, \quad (1.10)$$

где

$$A_i(x, T) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} S_j(x), \quad S_j(x) = \sum_{k=1}^j c_k \varphi_k(x), \quad (1.11)$$

причем $A_i(x, T)$ существуют в смысле сходимости в $L_2 [0, 1]$ для всех $i = 1, 2, \dots$.

Эта теорема представляет также обобщение результатов А. А. Талаляна (см. [1], [2]) о том, что для любой измеримой функции $f(x)$ (соответственно $f(x) \in L_p [0, 1]$, $0 < p < 1$) и для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$, который сходится по мере (соответственно в метрике $L_p [0, 1]$) к функции $f(x)$.

Действительно, эти теоремы получаются из теоремы 1, когда $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ и, соответственно, $\varphi(x) = x^p$, $0 < p < 1$.

Заметим (см. [3]), что из сходимости ортогональных рядов по мере или в метриках L_p не вытекает их суммируемость в тех же метриках линейными методами, и поэтому из результатов работ [1], [2] не вытекают вышеуказанные частные случаи теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1 использована следующая лемма, доказанная в работе [1].

Лемма 1. Пусть $f(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ интегрируемы с квадратом на отрезке $\Delta \equiv [a, b]$ и $1 > \varepsilon > 0$, $\tau > 0$ — произвольные положительные числа.

Тогда существует функция $\psi(x) \in L_2 [a, b]$, обладающая следующими свойствами:

$$1. \quad \psi(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta - e, \quad (1.12)$$

где e — измеримое множество, такое, что

$$e \subset \Delta, \mu(e) \leq \varepsilon \mu(\Delta), \quad (1.13)$$

$$2. \quad \int_{\Delta} \psi^2(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Delta} f^2(x) dx, \quad (1.14)$$

$$3. \quad \left| \int_{\Delta} f(x) f_k(x) dx - \int_{\Delta} \psi(x) f_k(x) dx \right| < \varepsilon, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1.15)$$

причем, если $|f(x)| \leq M$ всюду на $[a, b]$, то функция ψ удовлетворяет неравенству

$$4. \quad |\psi(x)| \leq \frac{M}{\varepsilon}, \quad x \in [a, b]. \quad (1.16)$$

Выполнение условия 4 в формулировке, приведенной в [1], не указано, но оно непосредственно следует из определения функции $\psi(x)$.

Лемма 2. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ — ПОНС в $L_2[0, 1]$, $\Phi(x) \in L_{\varphi}[0, 1]$, $T = \|a_{ij}\|$ — линейный регулярный метод суммирования, определяемый матрицей (1.1) и $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел. Тогда для всякого $0 < \eta < 1$ и любых натуральных N и q существуют конечное число полиномов по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$P_1(x) = \sum_{k=m_1}^{n_1} c_k \varphi_k(x), \quad P_2(x) = \sum_{k=m_2}^{n_2} c_k \varphi_k(x), \dots, \quad P_v(x) = \sum_{k=m_v}^{n_v} c_k \varphi_k(x), \quad (1.17)$$

$$N \leq m_1 < n_1 < m_2 < \dots < m_v < n_v,$$

и натуральные числа

$$m_{v+1}, \quad q < q_1 < q_2 < \dots < q_v, \quad (1.18)$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$1^\circ \quad \|P_k\|_{L_2} < \eta, \quad k = 1, 2, \dots, v, \quad (1.19)$$

$$2^\circ \quad \int_0^1 \varphi(|\Phi(x) - H(x)|) dx < \eta, \quad (1.20)$$

$$\text{где} \quad H(x) = \sum_{k=1}^v P_k(x), \quad (1.21)$$

$$3^\circ \quad \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{k=m_1}^n c_k \varphi_k(x) \right| \right) dx < \eta + \int_0^1 \varphi(|\Phi(x)|) dx, \quad m_1 \leq n \leq n_v, \quad (1.22)$$

$$\text{где} \quad c_k = 0 \text{ при } n_i < k < m_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, v-1, \quad (1.23)$$

$$4^\circ \quad |a_{ij}| < \frac{\varepsilon_k}{kn_k}, \quad 1 \leq j \leq n_k, \quad i \geq q_k, \quad k = 1, 2, \dots, v, \quad (1.24)$$

$$5^\circ \quad \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - 1 \right| < \frac{\varepsilon_k}{k}, \quad i > q_k, \quad k = 1, 2, \dots, \nu, \quad (1.25)$$

$$6^\circ \quad \sum_{j=m_k+1}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\varepsilon_k}{k}, \quad 1 \leq i \leq q_k, \quad k = 1, 2, \dots, \nu. \quad (1.26)$$

Доказательство. Возьмем ограниченную функцию $|f(x)| \leq M$ такую, что

$$\int_0^1 \varphi(|f(x) - \Phi(x)|) dx < \frac{\eta}{4}. \quad (1.27)$$

Учитывая (1.6), выбираем $0 < \varepsilon < 1$, удовлетворяющее неравенству

$$\varepsilon \cdot \varphi\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) < \frac{\eta}{4}. \quad (1.28)$$

Возьмем $\delta > 0$ такое, чтобы $\delta < \eta^2$ и для всякой функции $g(x) \in L_2[0, 1]$ из неравенства

$$\int_0^1 g^2(x) dx < \delta \quad (1.29)$$

вытекало бы неравенство

$$\int_0^1 \varphi(|g(x)|) dx < \frac{\eta}{4}. \quad (1.30)$$

Далее, отрезок $[0, 1]$ разделим на конечное число непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\nu$ таким образом, чтобы

$$\frac{4}{\varepsilon} \int_{\Delta_i} f^2(x) dx < \delta, \quad 1 \leq i \leq \nu. \quad (1.31)$$

Если m_k — заранее заданное натуральное число и $\sigma > 0$, то в силу леммы 1, существует $\psi_k(x) \in L_2[0, 1]$, удовлетворяющая условиям:

$$\psi_k(x) = 0 \text{ при } x \in [0, 1] - e_k, \quad e_k \subset \Delta_k, \quad \mu(e_k) \leq \varepsilon \mu(\Delta_k), \quad (1.32)$$

$$\left| \int_{\Delta_k} [\psi_k(x) - f(x)] \varphi_i(x) dx \right| \leq \sigma, \quad 1 \leq i \leq m_k - 1, \quad (1.33)$$

$$\int_{\Delta_k} \psi_k^2(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Delta_k} f^2(x) dx, \quad (1.34)$$

$$|\psi_k(x)| \leq \frac{M}{\varepsilon}. \quad (1.35)$$

Положим

$$F_k(x) = \begin{cases} f(x) - \psi_k(x), & x \in \Delta_k \\ 0, & x \notin \Delta_k, \end{cases} \quad (1.36)$$

$$c_i = \int_0^1 F_k(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.37)$$

В неравенстве (1.33) число $\varepsilon > 0$ можно считать настолько малым, что

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{i=1}^{m_k-1} c_i \varphi_i(x) \right| \right) dx \leq \frac{\eta}{8\nu}, \quad (1.38)$$

с другой стороны, поскольку система $\{\varphi_i(x)\}$ полна, можно выбрать $n_k > m_k$ такое, что

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{i=1}^{n_k} c_i \varphi_i(x) - F_k(x) \right| \right) dx \leq \frac{\eta}{8\nu}. \quad (1.39)$$

Из (1.7), (1.38), (1.39) вытекает

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{i=m_k}^{n_k} c_i \varphi_i(x) - F_k(x) \right| \right) dx \leq \frac{\eta}{4\nu}. \quad (1.40)$$

Далее, из (1.31), (1.34) и (1.36) получаем

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=m_k}^n c_i \varphi_i(x) \right|^2 dx \leq \int_0^1 F_k^2(x) dx \leq \frac{4}{\varepsilon} \int_{\Delta_k} f^2(x) dx < \delta, \quad (1.41)$$

$$(m_k \leq n \leq n_k),$$

откуда, согласно выбору числа $\delta > 0$ (см. (1.29)), будем иметь

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{i=m_k}^n c_i \varphi_i(x) \right| \right) dx \leq \frac{\eta}{4} \quad (m_k \leq n \leq n_k). \quad (1.42)$$

Положим

$$P_k(x) = \sum_{i=m_k}^{n_k} c_i \varphi_i(x). \quad (1.43)$$

Таким образом, для каждого k ($1 \leq k \leq \nu$) определяется полином вида (1.43), который удовлетворяет условиям (1.40), (1.41) и (1.42). При этом важно то обстоятельство, что для каждого k число m_k , независимо от чисел m_i, n_i , $1 \leq i < k$, можно взять сколь угодно большим.

Поэтому, очевидно, можно считать, что выбраны полиномы (1.43), где $m_1 = N$, $m_k < n_k$, $1 \leq k \leq v$, $m_{i+1} > n_i$, $1 \leq i \leq v-1$, а также числа $q < q_1 < q_2 < \dots < q_v$ и m_{i+1} такие, что наряду с условиями (1.40) — (1.42) для каждого k , $1 \leq k \leq v$, выполнены также неравенства

$$|a_{ij}| < \frac{\varepsilon_k}{kn_k} \quad (i \geq q_k, 1 \leq j \leq n_k), \quad (1.44)$$

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - 1 \right| < \frac{\varepsilon_k}{k} \quad (i > q_k), \quad (1.45)$$

$$\sum_{j=m_{k+1}}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\varepsilon_k}{k} \quad (1 \leq i \leq q_k). \quad (1.46)$$

Докажем, что полином

$$H(x) = \sum_{i=1}^v \sum_{k=m_i}^{n_i} c_k \varphi_k(x) = \sum_{k=m_1}^{n_v} c_k \varphi_k(x), \quad (1.47)$$

где

$$c_k = 0 \text{ при } n_i < k < m_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, v-1, \quad (1.48)$$

удовлетворяет требованиям леммы.

Обозначим

$$Q_j(x) = \sum_{k=1}^j \psi_k(x) \quad (1 \leq j \leq v), \quad (1.49)$$

$$\Phi_j(x) = \sum_{k=1}^j F_k(x) \quad (1 \leq j \leq v), \quad (1.50)$$

$$A_j = \bigcup_{k=1}^j \Delta_k \quad (1 \leq j \leq v), \quad (1.51)$$

$$B_j = \bigcup_{k=1}^j e_k \quad (1 \leq j \leq v). \quad (1.52)$$

Из (1.7), (1.40) и (1.48) следует

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{k=m_1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) - \Phi_j(x) \right| \right) dx = \\ &= \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{k=1}^j \left[\sum_{l=m_k}^{n_k} c_l \varphi_l(x) - F_k(x) \right] \right| \right) dx \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^j \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_k}^{n_k} c_l \varphi_l(x) - F_k(x) \right| \right) dx \leq \sum_{k=1}^j \frac{\eta}{4v} \leq \frac{v}{4} \end{aligned} \quad (1.53)$$

($1 \leq j \leq v$).

С другой стороны (см. (1.32), (1.36), (1.49),

$$\int_{A_j} \varphi (|f(x) - \Phi_j(x)|) dx = \int_{B_j} \varphi (|Q_j(x)|) dx \quad (1 \leq j \leq v), \quad (1.54)$$

$$\mu(B_j) = \sum_{k=1}^j \mu(e_k) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^j \mu(\Delta_k) \leq \varepsilon, \quad (1.55)$$

и в силу (1.49), (1.35), (1.28)

$$\int_{B_j} \varphi (|Q_j(x)|) dx \leq \varphi\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) \mu(B_j) \leq \varepsilon \cdot \varphi\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) < \frac{\eta}{4} \quad (1 \leq j \leq v), \quad (1.56)$$

т. е. (см. (1.54))

$$\int_{A_j} \varphi (|f(x) - \Phi_j(x)|) dx < \frac{\eta}{4} \quad (1 \leq j \leq v). \quad (1.57)$$

Из (1.53) и (1.57) при $j = v$ получим

$$\int_0^1 \varphi (|f(x) - H(x)|) dx < \frac{\eta}{2}. \quad (1.58)$$

Тогда согласно (1.7), (1.27) и (1.58) будем иметь

$$\int_0^1 \varphi (|\Phi(x) - H(x)|) dx < \eta. \quad (1.59)$$

Это значит, что условие 2° выполнено.

Проверим выполнение условия 3°. Поскольку $\Phi_j(x) = 0$ при $x \notin A_j$, то из (1.53) и (1.57) следует

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{k=m_1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) \right| \right) dx &\leq \int_{A_j} \varphi (|\Phi_j(x)|) dx + \frac{\eta}{4} \leq \\ &\leq \int_0^1 \varphi (|f(x)|) dx + \frac{\eta}{2} \quad (1 \leq j \leq v). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Пусть $m_1 \leq n \leq n_v$ и число k ($1 \leq k \leq v$) выбрано так, что

$$m_k \leq n \leq n_k. \quad (1.61)$$

Тогда

$$\sum_{l=m_1}^n c_l \varphi_l(x) = \sum_{l=m_1}^{n_{k-1}} c_l \varphi_l(x) + \sum_{l=n_{k-1}+1}^n c_l \varphi_l(x)^*. \quad (1.62)$$

* $\sum_{l=m_1}^{n_{k-1}} c_l \varphi_l(x)$ при $k=1$ считается равной нулю.

Учитывая (1.42), (1.60) и (1.62) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_1}^n c_l \varphi_l(x) \right| \right) dx &\leq \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_1}^{n_{k-1}} c_l \varphi_l(x) \right| \right) dx + \\ &+ \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_k}^n c_l \varphi_l(x) \right| \right) dx \leq \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx + \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_1}{4}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Отсюда и из (1.27) получаем

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_1}^n c_l \varphi_l(x) \right| \right) dx \leq \int_0^1 \varphi(|\Phi(x)|) dx + \tau_0, \quad (1.64)$$

$$m_1 \leq n \leq n_1,$$

т. е. условие 3° выполнено.

Условие 1° следует из (1.41), так как $\delta < \gamma_1^2$, а условия 4°, 5° и 6° следуют из (1.44)–(1.46). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(x) \in L_{\varphi}[0,1]$, $\{\gamma_{ik}\}$ и $\{\varepsilon_k\}$ — последовательности положительных чисел, где

$$1 > \gamma_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \quad (2.1)$$

Для каждого ε_k , $k=1, 2, \dots$ возьмем δ_k такое, чтобы для всякой функции $g(x) \in L_2[0,1]$ из неравенства

$$\|g(x)\|_{L_2} < \delta_k \quad (2.2)$$

следовало неравенство

$$\int_0^1 \varphi(|g(x)|) dx < \varepsilon_k. \quad (2.3)$$

Потребуем также, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < +\infty. \quad (2.4)$$

Возьмем

$$\vartheta_1 = 1, \quad m_{\vartheta_1} = n_{\vartheta_1} = 1, \quad c_1 = 0, \quad P_{\vartheta_1}(x) = \sum_{k=m_{\vartheta_1}}^{n_{\vartheta_1}} c_k \varphi_k(x),$$

и определим $q_{\vartheta_1} > 1$ и m_{ϑ_1+1} такие, что

$$1. \quad |a_{ij}| < \frac{\delta_1}{1 \cdot n_1} \quad (1 \leq j \leq n_{\vartheta_1}, \quad i \geq q_{\vartheta_1}), \quad (2.5)$$

$$2. \quad \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - 1 \right| < \frac{\delta_1}{1} \quad (i \geq q_{\vartheta_1}), \quad (2.6)$$

$$3. \quad \sum_{j=m_{\vartheta_i}+1}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\delta_i}{2} \quad (1 \leq i \leq q_{\vartheta_i}). \quad (2.7)$$

Предположим, что для $\vartheta_e \geq 1$ определены полиномы

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_{\vartheta_e}(x), \quad P_i(x) = \sum_{k=m_i}^{n_i} c_k \varphi_k(x) \quad (1 \leq i \leq \vartheta_e) \quad (2.8)$$

и натуральные числа $m_{\vartheta_e+1}, q_i, 1 \leq i \leq \vartheta_e$, такие, что

$$1 < q_1 < q_2 < \dots < q_{\vartheta_e}, \\ 1 = m_1 = n_1 < m_2 < n_2 < \dots < m_{\vartheta_e} < n_{\vartheta_e} < m_{\vartheta_e+1}. \quad (2.9)$$

Обозначим

$$G_e(x) = \sum_{k=1}^{n_{\vartheta_e}} c_k \varphi_k(x),$$

где

$$c_k = 0 \text{ при } n_i < k < m_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, \vartheta_e - 1. \quad (2.10)$$

Полагая в формулировке леммы 2

$$\Phi(x) = f(x) - G_e(x), \quad \eta = \eta_{e+1}, \quad \{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\delta_k\}_{k=m_{\vartheta_e+1}}^{\infty},$$

$$N = m_{\vartheta_e+1}, \quad q = q_{\vartheta_e},$$

определим полиномы

$$P_{\vartheta_e+1}(x) = \sum_{k=m_{\vartheta_e+1}}^{n_{\vartheta_e+1}} c_k \varphi_k(x), \dots, P_{\vartheta_{e+1}}(x) = \sum_{k=m_{\vartheta_{e+1}}}^{n_{\vartheta_{e+1}}} c_k \varphi_k(x)$$

и натуральные числа,

$$m_{\vartheta_{e+1}+1}, q_{\vartheta_{e+1}} < q_{\vartheta_{e+2}} < \dots < q_{\vartheta_{e+1}} (q_{\vartheta_{e+1}} > q_{\vartheta_e}), \quad (2.11)$$

которые, после введения обозначений

$$H_{e+1}(x) = \sum_{j=\vartheta_e+1}^{\vartheta_{e+1}} P_j(x), \quad (2.12)$$

$$G_{e+1}(x) = G_e(x) + H_{e+1}(x) = \sum_{k=1}^{\vartheta_{e+1}} c_k \varphi_k(x), \quad (2.13)$$

где $c_k = 0$ при

$$m_{\vartheta_{e+1}} < k < m_{\vartheta_{e+1}+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \vartheta_{e+1} - \vartheta_e - 1, \quad (2.14)$$

удовлетворяют условиям

$$1' \quad \|P_k\|_{L_1} < \eta_{e+1} \quad (k = \vartheta_e + 1, \dots, \vartheta_{e+1}), \quad (2.15)$$

$$2' \quad \int_0^1 \varphi(|f(x) - G_{e+1}(x)|) dx < \eta_{e+1}, \quad (2.16)$$

$$3' \quad \int_0^1 \varphi\left(\left|\sum_{k=m_{\vartheta_e+1}}^n c_k \varphi_k(x)\right|\right) dx < \eta_{e+1} + \int_0^1 \varphi(|f(x) - G_e(x)|) dx$$

$$(m_{\vartheta_e+1} \leq n \leq n_{\vartheta_e+1}), \quad (2.17)$$

$$4' \quad |a_{ij}| < \frac{\delta_{\vartheta_e+r}}{(\vartheta_e+r) n_{\vartheta_e+r}}$$

$$(r=1, 2, \dots, \vartheta_{e+1} - \vartheta_e, j=1, 2, \dots, n_{\vartheta_e+r}, i \geq q_{\vartheta_e+r}), \quad (2.18)$$

$$5' \quad \left| \sum_{j=1}^{\vartheta_e+r} a_{ij} - 1 \right| < \frac{\delta_{\vartheta_e+r}}{\vartheta_e+r} \quad (r=1, 2, \dots, \vartheta_{e+1} - \vartheta_e, i \geq q_{\vartheta_e+r}),$$

$$(2.19)$$

$$6' \quad \sum_{j=m_{\vartheta_e+r+1}}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\delta_{\vartheta_e+r}}{\vartheta_e+r+1}, \quad (2.20)$$

$$(r=1, 2, \dots, \vartheta_{e+1} - \vartheta_e, 1 \leq i \leq q_{\vartheta_e+r}).$$

Покажем, что для определенных нами полиномов $\{P_k(x)\}_1^\infty$, ряд

$$\sum_{e=1}^{\infty} \sum_{r=\vartheta_{e-1}+1}^{\vartheta_e} \sum_{k+m_r}^{m_{r+1}-1} c_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (\vartheta_0=0) \quad (2.21)$$

удовлетворяет требованиям теоремы.

Сначала покажем, что ряды

$$A_i(x, T) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} S_j(x), \quad i=1, 2, \dots,$$

где

$$S_j(x) = \sum_{k=1}^j c_k \varphi_k(x) \quad (2.22)$$

сходятся в $L_2[0,1]$.

Из (2.1) и (2.15) следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k\|_{L_2} = 0 \text{ и } \|P_k\|_{L_2} \leq 1 \quad (k=1, 2, \dots), \quad (2.23)$$

откуда получаем

$$\|S_j(x)\|_{L_2} \leq r \quad (m_r \leq j \leq m_{r+1} - 1, r=1, 2, \dots). \quad (2.24)$$

Пусть $\delta > 0$ и i — натуральное число.

Выбрав k и r так, чтобы выполнялись неравенства

$$q_{k-1} \leq i < q_k \quad (q_0 = 1), \quad (2.25)$$

$$r \geq k \text{ и } \sum_{e=r}^{\infty} \delta_e < \delta, \quad (2.26)$$

для произвольного натурального $N \geq m_{r+1}$ будем иметь

$$\left\| \sum_{j=m_{r+1}}^N a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1} \leq \sum_{e=r}^{r-2} \left\| \sum_{j=m_{e+1}}^{m_{e+2}-1} a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1}^* + \left\| \sum_{j=m_0}^N a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1}, \quad (2.27)$$

где $\vartheta \geq r+1$ определено из неравенства

$$m_0 \leq N < m_{\vartheta+1}.$$

Учитывая, что в силу (2.24), (2.25) и (2.26) выполняются неравенства

$$\left\| \sum_{j=m_{e+1}}^{m_{e+2}-1} a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1} \leq \sum_{j=m_{e+1}}^{m_{e+2}-1} |a_{ij}| (e+1) \leq (e+1) \sum_{j=m_{e+1}}^{\infty} |a_{ij}| \leq \delta_e \quad (e \geq r)$$

и

$$\left\| \sum_{j=m_0}^N a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1} \leq \sum_{j=m_0}^N |a_{ij}| \cdot \vartheta \leq \delta_{\vartheta-1}, \quad (2.28)$$

из (2.27) и (2.26) получаем

$$\left\| \sum_{j=m_{r+1}}^N a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1} \leq \sum_{e=r}^{\infty} \delta_e < \delta. \quad (2.29)$$

Отсюда следует, что T -средние ряда (2.21) сходятся в $L_2[0,1]$.

Теперь докажем, что $A_i(x, T)$ сходятся к $f(x)$ в метрике $L_\varphi[0,1]$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выберем $\delta > 0$ такое, чтобы для всякой функции $g(x) \in L_2[0,1]$ из неравенства

$$\|g(x)\|_{L_1} < \delta \quad (2.30)$$

следовало бы неравенство

$$\int_0^1 \varphi(|g(x)|) dx < \varepsilon. \quad (2.31)$$

Из (2.1), (2.16) и (2.17) легко следует, что ряд (2.21) сходится к $f(x)$ в метрике $L_\varphi[0,1]$.

* $\sum_{e=r}^{r-2}$ при $\vartheta = 2$ считается равной нулю.

Тогда найдется такое N , что

$$\int_0^1 \varphi(|S_n(x) - f(x)|) dx < \varepsilon, \quad n \geq N. \quad (2.32)$$

Выберем ϑ настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$n_0 \geq N, \quad \sum_{e=0}^{\infty} \delta_e < \delta, \quad (2.33)$$

$$2\delta_k + \delta_{k+1} + \|P_{k+1}\|_{L_1} \cdot H < \delta \quad (k \geq \vartheta), \quad (2.34)$$

где H — константа, фигурирующая в (1.2).

Пусть теперь i — натуральное число такое, что

$$i > q_\vartheta, \quad (2.35)$$

а k удовлетворяет неравенствам

$$k > \vartheta, \quad q_k \leq i < q_{k+1}. \quad (2.36)$$

Представим $A_i(x, T) - f(x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_i(x, T) - f(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} S_j(x) - f(x) = \sum_{j=1}^{n_k} a_{ij} S_j(x) + \\ &+ \sum_{j=n_k+1}^{m_{k+1}-1} a_{ij} S_j(x) + \sum_{j=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} a_{ij} S_j(x) + \sum_{e=k+2}^{\infty} \sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x) - \\ &- S_{n_k}(x) + S_{n_k}(x) - f(x). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(|A_i(x, T) - f(x)|) dx &\leq \int_0^1 \varphi(|S_{n_k}(x) - f(x)|) dx + \\ &+ \int_0^1 \varphi\left(\left|\sum_{j=1}^{n_k} a_{ij} S_j(x)\right|\right) dx + \int_0^1 \varphi\left(\left|\sum_{j=n_k+1}^{m_{k+1}-1} a_{ij} S_j(x) + \right.\right. \\ &\left. + \sum_{j=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} a_{ij} S_j(x) - S_{n_k}(x)\right|) dx + \int_0^1 \varphi\left(\left|\sum_{e=k+2}^{\infty} \sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x)\right|\right) dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части (2.41).

Учитывая (2.32), (2.33) и (2.36), имеем

$$\int_0^1 \varphi(|S_{n_k}(x) - f(x)|) dx < \varepsilon. \quad (2.39)$$

Из (2.18), (2.24) и (2.33) следует

$$\left\| \sum_{j=1}^{n_k} a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_2} \leq k \sum_{j=1}^{n_k} |a_{ij}| < \delta_k < \delta, \quad (2.40)$$

откуда (см. 2.30) и (2.31), получаем

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{j=1}^{n_k} a_{ij} S_j(x) \right| \right) dx < \varepsilon. \quad (2.41)$$

Рассмотрим теперь сумму $\sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x)$, где $e \geq k+2$. Так как $i < q_{k+1} \leq q_{e-1}$, то из (2.20) и (2.24) вытекает

$$\left\| \sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_2} \leq e \sum_{j=m_e}^{\infty} |a_{ij}| < \delta_{e-1} (e \geq k+2), \quad (2.42)$$

Отсюда в силу (2.33), будем иметь

$$\left\| \sum_{e=k+2}^{\infty} \sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_2} \leq \sum_{e=k+2}^{\infty} \delta_{e-1} < \delta, \quad (2.43)$$

которое вместе с (2.31) дает

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{e=k+2}^{\infty} \sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x) \right| \right) dx < \varepsilon. \quad (2.44)$$

Имея в виду (1.2), (2.18), (2.19) (2.20), (2.24) и (2.34), получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=n_k+1}^{m_{k+1}-1} a_{ij} S_j(x) + \sum_{j=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} a_{ij} S_j(x) - S_{n_k}(x) \right\|_{L_2} = \\ & = \left\| \sum_{j=n_k+1}^{m_{k+1}-1} a_{ij} \sum_{s=1}^k P_s(x) + \sum_{j=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} a_{ij} \left(\sum_{s=1}^k P_s(x) + \sum_{e=m_{k+1}}^j c_e \varphi_e(x) \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{s=1}^k P_s(x) \right\|_{L_2} \leq \left\| \sum_{s=1}^k P_s(x) \right\|_{L_2} \left| 1 - \sum_{j=n_k+1}^{m_{k+2}-1} a_{ij} \right| + \|P_{k+1}\|_{L_2} \sum_{j=m_{k+1}}^{\infty} |a_{ij}| \leq \\ & \leq k \left| 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| + k \sum_{j=1}^{n_k} |a_{ij}| + k \sum_{j=m_{k+2}}^{\infty} |a_{ij}| + \|P_{k+1}\|_{L_2} \cdot H \leq \\ & \leq k \cdot \frac{\delta_k}{k} + k \cdot \frac{\delta_k}{k \cdot n_k} + k \frac{\delta_{k+1}}{k+2} + \|P_{k+1}\|_{L_2} \cdot H < \delta. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Отсюда и из (2.31) следует

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_k+1}^{m_{k+1}-1} a_{lj} S_l(x) + \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+2}-1} a_{lj} S_j(x) - S_{n_k}(x) \right| \right) dx < \varepsilon. \quad (2.46)$$

Из (2.38), (2.39), (2.41), (2.44) и (2.46) окончательно получаем

$$\int_0^1 \varphi (|A_l(x, T) - f(x)|) dx < 4\varepsilon, \text{ при } l > q_0. \quad (2.47)$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. А. Талалаяну за постановку задачи и оказанную помощь при ее решении.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15.VI.1975

Ս. Մ. Հովհաննիսյան. Չափելի ֆունկցիաների ներկայացումը L_φ տարածություններում գույմարվող շարքերով (ամփոփում)

Դիցուք φ -ն դանդաղ աճող անընդհատ ֆունկցիա է որոշված $[0, +\infty)$ -ում, T -ն գծային ռեզոլյար գումարման մեթոդ է, $\{\varphi_k\}$ -ն լրիվ օրթոնորմալ սիստեմ է $L_2[0,1]$ -ում և նպաստելի է, որ ցանկացած

$$f \in L_\varphi = \left\{ f: \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx < +\infty \right\}$$

գոյություն ունի $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ շարք, որի T -միջինները ղուգամիտում են f -ին L_φ մետրիկայով:

S. M. HOVHANNISIAN. On the representation of measurable functions by orthogonal series summable in L_φ spaces (summary)

Let φ be a slowly increasing continuous function on $[0, \infty)$, be a linear regular summation method and $\{\varphi_k\}$ be a C.O.N.S. in $L_2[0,1]$. The following assertion is proved.

For any $f \in L_\varphi = \left\{ f: \int \varphi(|f|) dx < +\infty \right\}$ there exists a series $\sum c_k \varphi_k$ such that its T -means converge to f in the metric of L_φ .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Качмаж и Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., 1958, 374—385.
2. А. А. Талалаян. Представление функций классов $L_p[0,1]$, $0 < p < 1$, ортогональными рядами, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 21 (1—2), 1970, 1—9.
3. Н. О. Синамян. Сходимость и суммируемость ортогональных рядов, кандидатская диссертация, Ереван, 1972.