ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 5, 1975 Математика

Р. О. НАЗАРЯН

МИНИМАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГРУПП ЛИ

Тройка (G, G', G''), где G-группа, G', G'' — ее подгруппы, называется разложением, если $G = G' G''$. Аналогично, если $\mathfrak{M}$—алгебра Ли, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ — ее подалгебры и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, то тройка является, разложением.

В работе [8] был до конца изучен случай, когда G некомпактна, G', G'': либо обе редуктивны в G, либо обе максимальны в G.

Основной целью настоящей работы является изучение минимальных разложений (G, G', G''), т. е. таких, что не существует разложений вида (G, G_0', G_0''), где $G_0' \subset G'$, $G_0'' \subset G''$ и $G_0' \neq G'$, $G_0'' \neq G''$. Знание всех максимальных и всех минимальных разложений группы G дает возможность найти все разложения этой группы.

Мы находим в явном виде все минимальные разложения групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$, обладающие тем свойством, что полупростые части групп G' и G'' некомпактны. Здесь же изучается случай, когда G'—нередуктивная подгруппа с компактной полупростой частью, но указать явный вид радикала группы G' нам не удалось. Мы находим также разложения без пересечения всех простых вещественных классических групп Ли, т. е. такие разложения $G = G' G''$, что $\dim G' \cap G'' = 0$. Такое разложение является минимальным. Отметим, что Ван Прааг [9], [10] изучал разложения псевдоортогональных и псевдосимплектических групп над произвольным полем в произведение двух подгрупп, пересекающихся только по единице, при сильном дополнительном предположении.

С каждой k-подалгеброй $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ (см. [6]) связано разложение $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + R$, которое как показано в [5], соответствует разложению группы $G = G'K$. В частности, если $\mathfrak{M}'$—минимальная k-подалгебра (т. е. k-подалгебра, не содержащая никаких меньших k-подалгебр), то $\mathfrak{M}' \cap R = 0$, т. е. $G = G'K$—разложение с нулевым пересечением. Эти разложения мы будем называть обобщенными разложениями Ивасава, так как одним из них является разложение $G = T \cdot K$, где K—максимальная компактная в G подгруппа, а T—максимальная треугольная в G подгруппа, обычно называемая разложением Ивасава.

В таблице 3 мы приводим список всех простых алгебр Ли над R, причем на схемах Сатаке указывается нумерация простых корней, которой мы будем пользоваться. В этой же таблице даны схемы

Дынкина характеристических представлений полупростых частей соответствующих максимальных компактных подалгебр.

Автор пользуется случаем выразить свою признательность А. Л. Онищику, который руководил его работой.

§ 1. Минимальные разложения групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$

В настоящем параграфе будет дано явное описание минимальных некомпактных разложений групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$. Сперва опишем максимальные k-подалгебры u_Γ в алгебрах $so(p, q)$, $su(p, q)$, $sp(p, q)$. Их можно описать как алгебры всех линейных преобразований пространства k^{p+q} ($k=R$, C, K—соответственно), оставляющих инвариантным изотропное подпространство [2]. Приведем это описание для тех алгебр u_Γ, которые встречаются в таблице 3 работы [8]. Пусть $\mathfrak{M}$ записана в матрицах над k так, как это сделано в § 3 работы [3], и пусть $e_1, \cdots, e_{p+q}$ —стандартный базис в k^{p+q}.

Если $\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\}$ $(k=K)$ $(p=q)$, $\{\alpha_p, \alpha_q\}$ $(K=C)$ $(p<q)$, $\{\alpha_p\}$ $(k=R)$ $(q \neq p+2)$, $\{\alpha_p, \alpha_{p+1}\}$ $(q=p+2)$, то u_Γ переводит в себя равномерное изотропное подпространство, натянутое на $e_1-e_{p+1}, \cdots$ $\cdots, e_p-e_{2p}$.

Она состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} X+Y & S+Y & H \\ S-Y & X-Y & -H \\ H^* & H^* & Z \end{pmatrix},$$

где $X^*=-X$, $Y^*=-Y$, $Z^*=-Z$, $S^*=S$. При этом

$$s^1_\Gamma=\{Y=0,\ H=0,\ Z=0,\ TrS=0,\ TrX=0 \text{ при } k=C\},$$

$$c^-_\Gamma=\{X=Y=0,\ S=cE\ (c\in R),\ H=0,\ Z=0\},$$

$$n_\Gamma=\{X=S=0,\ Z=0\}.$$

Если $S^1_\Gamma=l_\Gamma+p_\Gamma$—разложение Картана, то

$$l_\Gamma=\{Y=0,\ H=0,\ Z=0,\ S=0,\ TrX=0, \text{ при } k=C\},$$

$$p_\Gamma=\{Y=0,\ H=0,\ Z=0,\ X=0,\ TrS=0\}.$$

Пусть $b\subset n_\Gamma$—подпространство, выделяемое условием $Y=0$. Тогда имеем $n_\Gamma=b+[b, b]$, где $[b, b]$ выделяется условием $H=0$. Пространства b и $[b, b]$ инвариантны относительно $ad\,\mathfrak{M}\ s'_\Gamma$ и в них индуцируются представления алгебры s'_Γ со следующими схемами:

k	S'_{Γ}	b	$[b, b]$
K	$su^*(2p)$	$\overset{1}{o}$—o—···—o $(q-p)$-раз	$\overset{2}{o}$—o—···—o
C	$sl(p, C)$	$\overset{1}{o}$--o—···—o $(q-p)$-раз	$\overset{1}{o}$—o—···—o o—o—···—$\overset{1}{o}$
R	$sl(p, R)$	$\overset{1}{o}$—o—···—o $(q-p)$-раз	o—$\overset{1}{o}$—···—o

При этом всюду, кроме случая b при $k = C$ указана схема комплексификации представления.

Если $\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1, \alpha_{2p+2q-1}\}$ $(k = C)$, $\{\alpha_1\}$ $(k = R)$, то u_Γ переводит в себя 1-мерное изотропное подпространство, натянутое на $e_1 - e_{p+1}$. Она состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} x+y & F & s+y & H \\ -F^* & A & -F^* & B \\ s-y & -F & x-y & -H \\ H^* & B^* & H^* & Z \end{pmatrix},$$

де $\bar{x} = -x$, $\bar{y} = -y$, $\bar{s} = s$, $A^* = -A$, $Z^* = -Z$. При этом

$s'_\Gamma = \{x = y = s = 0,\ F = 0,\ H = 0,\ TrA = 0,\ TrZ = 0$ при $k = C\}$,

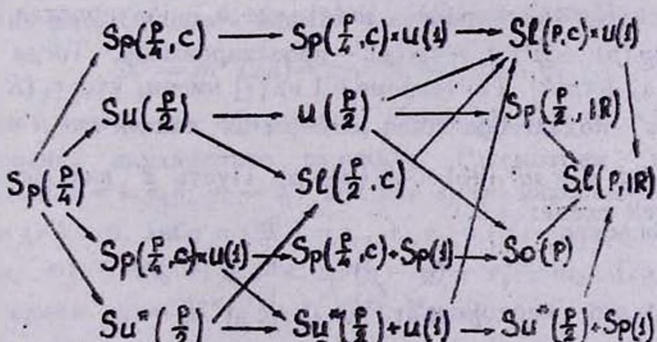
$c^-_\Gamma = \{x = y = 0,\ F = 0,\ H = 0,\ A = 0,\ B = 0,\ Z = 0\}$,

$n_\Gamma = \{x = s = 0,\ A = 0,\ B = 0,\ Z = 0\}$.

Пусть $b \subset n_\Gamma$ — подпространство, выделяемое условиями $x = y = 0$. Тогда $n_\Gamma = b \dot{+} [b, b]$, где $[b, b]$ выделяется условиями $F = H = 0$. Пространства b и $[b, b]$ инвариантны относительно $ad_{\mathfrak{M}}\, s'_\Gamma$, причем в b индуцируется стандартное представление, а в $[b, b]$—нулевое представление. Имеем $\dim [b, b] = 1$ для $k = C$ и $[b, b] = 0$ для $k = R$.

Для дальнейшего полезно отметить следующий факт.

Лемма 1.1. *Все подалгебры* $sl(p, R)$, *содержащие* $su\left(\frac{p}{2}\right)$ *(если p—четно) и все ее подалгебры, содержащие* $sp\left(\frac{p}{4}\right)$ *(если $4|p$) описываются с точностью до сопряженности следующей диаграммой, в которой стрелки означают естественные вложения:*



Доказательство. Пусть $h \subset sl(p, R)$— подалгебра, содержащая $su\left(\frac{p}{2}\right)$ или $sp\left(\frac{p}{4}\right)$. Тогда h — алгебра Ли группы, транзитивной на S^{p-1}. Если h редуктивна в $\mathfrak{M}$, то из классификации редуктивных групп, транзитивных на сфере [6], легко видеть, что h содержится в нашей диаграмме. Нетрудно проверить также (например, с помощью явного описания максимальных k-подалгебр [8]), что всякая максимальная подалгебра в любой из алгебр диаграммы, содержащая $su\left(\frac{p}{2}\right)$ или $sp\left(\frac{p}{4}\right)$, редуктивна. Отсюда легко следует, что всякая подалгебра $h \subset sl(p, R)$, удовлетворяющая условиям леммы, редуктивна и, значит, содержится в диаграмме. Действительно, существует минимальная редуктивная подалгебра $\hat{h} \subset sl(p, R)$ такая, что $h \subset \hat{h}$. Алгебра $\hat{h}$ содержится в диаграмме.

Если $\tilde{h}$—ее максимальная подалгебра, содержащая h, то $\bar{h}$ редуктивна и поэтому $h = \bar{h}$.

Теорема 1.1. *Пусть $G = Sp(p, q)$ $(0 < p \leqslant q)$ и $G = G' \cdot G''$— минимальное некомпактное разложение. Пусть $\mathfrak{M}' = s' \dotplus r'$—разложение Леви, где s' полупроста. Если s' некомпактна, то $\mathfrak{M}' = su^* \times \times (2p) + n_\Gamma$, где $\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\}$, $\mathfrak{M}'' = sp(1, q)$. Обратно, такое разложение минимально. Если s' компактна, то s' — подалгебра в $sp(p) \times \times sp(q-p)$, изоморфно проектирующаяся на $sp(p)$, $r' \subset sp(q-p) \dotplus c_{\bar{\Gamma}} \dotplus n_\Gamma$ проектируется на $c_{\bar{\Gamma}}$, а $\mathfrak{M}'' = sp(p-1, q)$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1 из [3] имеем, что $\mathfrak{M}'' = a \times sp(k, q)$, где $a \subset sp(p-k)$, $0 \leqslant k < p$. Расширим подалгебру $\mathfrak{M}'$ до максимальной собственной подалгебры $\bar{\mathfrak{M}}'$. Так как алгебра $sp(p, q)$ не допускает редуктивных разложений (см. теорему 4.1 из [8]), то $\bar{\mathfrak{M}}'$ является максималной k-подалгеброй и по теореме 6.1 из [8] $\bar{\mathfrak{M}}' = su^*(2p) \times sp(q-p) + c_{\bar{\Gamma}} + n_\Gamma$, где $\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\}$. Пусть R_0, R_0', R_0''— максимальные полупростые компактные подалгебры в $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ соответственно. Тогда $R_0 = R_0' + R_0''$. Имеем $R_0' \subset sp(p) \times \times sp(q-p)$ и $R_0'' \subset a_0 \times sp(k) \times sp(q)$, где a_0—полупростая часть в a. Пусть π_1: $sp(p) \times sp(q) \to sp(p)$ — проектирование. Тогда $sp(p) = = \pi_1(R_0') + a_0 + sp(k)$. По теореме 4.1 из [7] имеем, что $\pi_1(R_0') = sp(p)$.

Пусть s'—подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{M}'$ такая, что $R' \subset s'$. Можно считать $s' \subset \bar{s}' = su^*(2p) \times sp(q-p)$. Пусть s' вкладывается в $\tilde{s}$, по следующей схеме:

$$\begin{tikzcd}
\dot{s}_1 \arrow[d, dash] & \dot{s}_{12} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \dot{s}_2 \arrow[d, dash] \\
su^*(2p) & & sp(q-p)
\end{tikzcd}$$

Так как $s_2' \subset \mathfrak{M}''$ и наше разложение минимально, то $s_2' = 0$. Проектируя s' на $su^*(2p)$, получим следующее включение $sp(p) \subset \pi_1(s') \subset \subset su^*(2p)$. Алгебра $sp(p)$ максимальна в $su^*(2p)$ как максимальная компактная подалгебра [1], поэтому $\pi_1(s') = sp(p)$ или $su^*(2p)$. Если s' компактна, то имеет место первый случай, а если некомпактна—то второй случай.

Рассмотрим случай, когда s' некомпактна. Имеем $s_1' \dotplus s_{12}' \approx su^*(2p)$. Но $su^*(2p)$ проста и некомпактна, а s_{12}' компактна. Значит $s_{12}' = 0$, $s_1' = su^*(2p)$. Следовательно, $s' = su^*(2p)$ и $\mathfrak{M}' = su^*(2p) + + r'$, где $r' \subset sp(q-p) \dotplus c_\Gamma^- \dotplus n_\Gamma$. Рассмотрим прямое разложение $u_\Gamma = su^*(2p) \dotplus sp(q-p) \dotplus c_\Gamma^- \dotplus b \dotplus [b, b]$ на подпространства, инвариантные относительно $ad_{\mathfrak{M}}\, su^*(2p)$.

Соответствие

$$H \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & H \\ 0 & 0 & -H \\ H^* & H^* & 0 \end{pmatrix}$$

отождествляет b с пространством $H^{p,\,q-p}(k)$, а представление алгебры $su^*(2p)$ в b отождествляется с суммой $q-p$ стандартных представлений. Из вида представления в $[b, b]$ следует, что $r' = r' \cap (sp(q - -p) \dotplus c_\Gamma^-) \dotplus (r' \cap b) + (r' \cap [b, b])$. Покажем, что $r' \cap b = b$. По лемме 1.2 из [3] имеем $u_\Gamma = (su^*(2p) \dotplus r') \dotplus (u_\Gamma \cap \mathfrak{M}'')$. Легко проверить, что $u_\Gamma \cap \mathfrak{M}'' = (su^*(2p) + c_\Gamma^- + [b, b]) \cap \mathfrak{M}'') + (b \cap \mathfrak{M}'') + sp(q-p)$, причем $b \cap \mathfrak{M}''$ отождествляется с подпространством матриц из $H^{p,\,q-p}(k)$, первые $p-k > 0$ строк которых равны 0. Имеем, $b = (b \cap \cap r') \dotplus (b \cap \mathfrak{M}'')$. Значит $b \cap r'$ содержит матрицы с произвольной первой строкой. Из леммы Шура легко следует, что для каждого неприводимого подпространства b первые строки входящих в него матриц образуют одномерное подпространство в k^{q-p}. Следовательно, инвариантное подпространство $b \cap r'$ должно разлагаться в сумму $q-p$ неприводимых подпространств, т. е. $b \cap r' = b$. Значит $r' = n_\Gamma \dotplus (r' \cap \cap (sp(q-p) \dotplus c_\Gamma^-)$.

Из теоремы 2.1 работы [3] видно, что $G = (SU^*(2p) \cdot N_\Gamma) \cdot Sp(1, q)$. Поэтому из минимальности нашего разложиния следует, что

$$\mathfrak{M}' = su^*(2p) = n_\Gamma,\ \mathfrak{M}'' = sp(1, q).$$

Пусть теперь s' компактна. Пусть $\rho\colon u_\Gamma \to s_\Gamma'$— гомоморфизм проектирования параллельно радикалу. Рассмотрим гомоморфизм проектирования $\pi = \pi_1 \rho\colon u_\Gamma \to s_\Gamma'$. Так как $sp(p)$ максимальна в $su^*(2p)$, то либо $\pi(r') = 0$, либо $\pi(\mathfrak{M}') = s_\Gamma'$, т. е. $\pi(r')$—разрешимый идеал в s_Γ'. Итак, $\pi(r') = 0$, т. е. $r' \subset sp(q-p) + c_\Gamma^- + n_\Gamma$. По лемме 1.2 из [3] имеем $u_\Gamma = \mathfrak{M}' + (u_\Gamma \cap \mathfrak{M}'')$. Рассмотрим разложение $u_\Gamma = = l_\Gamma + p_\Gamma + c_\Gamma^- + n_\Gamma$ в прямую сумму подпространств. Пусть

$pr: u_\Gamma \to p_\Gamma + c_\Gamma^-$ соответственное проектирование. Мы должны иметь $p_\Gamma + c_\Gamma^- = pr\,\mathfrak{M}' + pr\,(\mathfrak{M}'' \cap u_\Gamma)$. Отождествим $p_\Gamma + c_\Gamma^-$ с пространством всех эрмитовых матриц над K порядка p. Легко проверить, что $pr\,(\mathfrak{M}'' \cap u_\Gamma)$ состоит из всех матриц $S = (s_{ij})$, где $s_{11} = s_{22} = \cdots \cdots = s_{p-k\,p-k} = 0$. Далее из доказанного выше видно, что $pr\,\mathfrak{M}' \subset c_\Gamma^-$. Отсюда ясно, что $k = p-1$ и, что $pr\,\mathfrak{M}' = c_\Gamma^-$. Итак, $\mathfrak{M}'' = a \times sp\,(p-1, q)$, где $a \subset sp\,(1)$. Но ясно, что $a \subset \mathfrak{M}' + sp\,(p-1, q)$, так что $a = 0$.

Остается доказать, что разложение $G = G' \cdot Sp\,(1, q)$, где $G' = SU^*\,(2p) \cdot N_\Gamma$ минимально. Пусть $G = \hat{G}' \cdot \hat{G}''$ — содержащееся в нем минимальное разложение. Если $\hat{\mathfrak{M}}''$ компактна, то $\hat{\mathfrak{M}}'$ должна быть k-подалгеброй, что неверно. Значит, к минимальному разложению $\mathfrak{M} = \hat{\mathfrak{M}}' + \hat{\mathfrak{M}}''$ применима доказанная часть теоремы. Поскольку радикал алгебры $\hat{\mathfrak{M}}'$ содержится в $s_\Gamma + n_\Gamma$, имеем $\hat{\mathfrak{M}}' = \mathfrak{M}'$, $\hat{\mathfrak{M}}'' = \mathfrak{M}''$.

Теорема 1.2. *Пусть* $G = SU\,(p, q)$ $(0 < p \leqslant q)$ *и* $G = G' \cdot G''$ — *минимальное некомпактное разложение. Пусть* $\mathfrak{M}' = s' + r'$ — *разложение Леви, где* s' *полупроста. Если* s' *некомпактна, то разложение содержится в таблице* 1. *Обратно, все эти разложения минимальны. Если* s' *компактна, то* s' — *подалгебра в* $su\,(p) \dot{+} su\,(q-p)$, *причем проектирование на первый сомножитель изоморфно отображает ее на* $su\,(p)$ *или* $sp\left(\frac{p}{4}\right)$, $r' \subset su\,(q-p) + c_\Gamma^- \dot{+} n_\Gamma$ *проектируется на* c_Γ^-, *а* $\mathfrak{M}'' = su\,(p-1, q)$.

$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
$su\,(p-1, q-1) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1, \alpha_{2p+2q-1}\}$ $su\,(p-1, q)$ $su\,(p, q-1)$	$sp\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$
$sl\,(p, C) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p, \alpha_q\}\ (p < q),\ \{\alpha_p\}\ (p = q))$	$su\,(1, q)$
$su\,(p-1, p)$	$sp\,(p, R)$
$su^*\,(p) + n_\Gamma\,(p, 2)$ $sp\left(\frac{p}{2}, C\right) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p, \alpha_q\}\ (p < q),\ \{\alpha_p\}\ (p = q))$	$su\,(p-1, q)$

Таблица 1

Доказательство. Из теоремы 3.1 работы [3] имеем, что $\mathfrak{M}' = a \times su\,(k, q)$, где $0 < k < p$, $a \subset su\,(p-k) \times \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $s(u(p-k)\times u(k+q))$ или $\mathfrak{M}'' = a\times sp\left(k, \frac{q}{2}\right)$, где $k\leqslant \frac{p}{2}$, $a\subset su(p-2k)\times \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $u(p-2k,\ 2k+q)$.

Разложение $R_0 = R'_0 + R''_0$ максимальных полупростых компактных подалгебр задается следующими схемами:

а) $$\begin{array}{ccccc} R'_{01} & & R'_{012} & & R'_{02}\\ | & / & & \backslash & | \\ su(p) & & & & su(q)\\ | & & & & \| \\ a_0\times su(k) & & & & su(q)\end{array}$$

б) $$\begin{array}{ccccc} R'_{01} & & R'_{012} & & R'_{02}\\ | & / & & \backslash & | \\ su(p) & & & & su(q)\\ | & & & & \vdots \\ a_0\times sp(k) & & & & sp\left(\frac{q}{2}\right)\end{array}$$

Пусть $R'_{012} = 0$. Проектируя наше разложение на $su(p)$, получим

а) $su(p) = R'_{01} + a_0\times su(k)$,

б) $su(p) = R'_{01} + a_0\times sp(k)$.

Из теоремы 4.1 работы [7] следует, что в случае б) либо $R'_{01} = su(p)$, либо $R'_{01} = sp\left(\frac{p}{2}\right)$ и $k = p-1$, а в случае б) либо $R'_{01} = su(p)$, либо $R'_{01} = su(p-1)$ и $k = \frac{p}{2}$.

В случае а) и в случае б) когда $R'_{01} = su(p)$ из лемм 3.2 и 3.4 работы [3] вытекает, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна, и следовательно, наше разложение совпадает с одним из тех, которые перечислены в таблице 2 работы [8]. Из этой таблицы видно, что $\mathfrak{M}' = su(p,\ q-1)$ или

$$su(p-1,\ q) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}'' = sp\left(\frac{p}{2},\ \frac{q}{2}\right).$$

Пусть $k = \frac{p}{2}$, $R'_{01} = su(p-1)$. Можно считать, что $R'_{02} = su(q-1)$. Расширим подалгебру $\mathfrak{M}'$ до максимальной собственной подалгебры $\widetilde{\mathfrak{M}}'$. Если $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ редуктивна, то в силу теоремы 4.1 из [8] $\widetilde{\mathfrak{M}}' = su(p-1,\ q)$ или $su(p,\ q-1)$. Так как $su(q)\subset \mathfrak{M}'\subset su(p-1,\ q)$, $su(q-1)\subset \mathfrak{M}'\subset su(p,\ q-1)$, то из леммы 3.2 [3] следует, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна. По теореме 4.1 из [8] этот случай невозможен. Если $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ — k-подалгебра, то из теоремы 6.1 работы [8] имеем, что

$\widetilde{\mathfrak{M}}' = su(p-1,\ q-1) \dotplus c_{\Gamma} \dotplus n_{\Gamma}$, где $\pi_1\setminus\Gamma = \{\alpha_1,\ \alpha_{2p+2q-1}\}$.

Пусть s' — подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{M}'$ такая, что $R'_0\subset s'$.

Можно считать, что $s'\subset \widetilde{s}' = su(p-1,\ q-1)$. Имеем, что $su(p-1)\times su(q-1)\subset s'\subset su(p-1,\ q-1)$. Если s' некомпактна, то из классификации простых алгебр легко следует, что $s' = su(p-1,\ q-1)$.

Имеем $\mathfrak{M}' = su\,(p-1,\ q-1) \dotplus r'$, где $r' \subset c_\Gamma \dotplus n_\Gamma$. Рассмотрим прямое разложение $u_\Gamma = su\,(p-1,\ q-1) \dotplus c_\Gamma \dotplus b \dotplus [b,\ b]$ на подпространства, инвариантные относительно $ad_{\mathfrak{M}}\ su\,(p-1,\ q-1)$. Из данного выше описания представления алгебры s'_Γ в u_Γ видно, что $r' = (r' \cap b) \dotplus r' \cap \cap (c_\Gamma \dotplus [b,\ b])$. Так как b—неприводимое инвариантное подпространство, то $r' \cap b = b$, либо 0.

Рассмотрим разложение Картана $\mathfrak{M} = R \dotplus P$, $su\,(p-1,\ q-1) = R' \dotplus P'$, $\mathfrak{M}'' = R'' \dotplus P''$, где $R', R'' \subset R$, $P', P'' \subset P$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, то $P = P' + P'' + pr_{\mathfrak{M}} r'$. Отождествим P с $H^{p,\,q}(C)$ так, как это было сделано в § 3 из [3]. Тогда P' отождествляется с пространством $H^{p-1,\,q-1}(C)$ матриц, у которых первая строка и первый столбец—нулевые, а P''—с пространством матриц вида

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & -Z_1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $pr_P\,(c_\Gamma \dotplus [b,\ b])$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} z & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{pmatrix},\ \text{где } z \in C.$$

Отсюда видно, что $pr_P(c_\Gamma \dotplus [b,\ b]) \subset P' + P''$. Если $r' \cap b = 0$, то $P = P' + P''$, откуда $\mathfrak{M} = su\,(p-1,\ q-1) + \mathfrak{M}''$. Но это невозможно (см. теорему 4.1 из [8]). Значит $r' \cap b = b$ и, следовательно, $r' = n_\Gamma + (r' \cap c_\Gamma)$, $\mathfrak{M}' = su\,(p-1,\ q-1) \dotplus n_\Gamma + (r' \cap c_\Gamma)$. Очевидно, что $\mathfrak{M}'' = sp\left(\frac{p}{2},\ \frac{q}{2}\right)$, в силу минимальности разложения $\mathfrak{M}' = su\,(p-1,\ q-1) + n_\Gamma$. Разложения с указанными $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ существуют, в силу теоремы 2.1 работы [3].

Покажем, что случай, когда s' компактна, невозможен. Пусть $\rho\colon \widetilde{\mathfrak{M}}' \to su\,(p-1,\ q-1)$—проектирование параллельно радикалу. По лемме 1.2 из [3] имеем $\widetilde{\mathfrak{M}}' = \mathfrak{M}' + (\widetilde{\mathfrak{M}}' \cap \mathfrak{M}'')$, откуда

$$su\,(p-1,\ q-1) = s\,(u\,(p-1) \times u\,(q-1)) \dotplus \rho\,(\widetilde{\mathfrak{M}}' \cap \mathfrak{M}').$$

Очевидно, полупростая часть в $\rho\,(\widetilde{\mathfrak{M}}' \cap \mathfrak{M}'')$ есть $sp\left(\frac{p}{2}-1,\ \frac{q}{2}-1\right)$ и не может быть полупростой частью k-подалгебры в $su\,(p-1,\ q-1)$, [8]. Пусть $R_{\mathfrak{M}2} \neq 0$. Рассмотрим максимальную собственную подалгебру $\widetilde{\mathfrak{M}}' \supset \mathfrak{M}'$. Если $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ редуктивна, то из таблицы 2 работы [8] видно, что $p=q$ и $\widetilde{\mathfrak{M}}'=sp\,(p,\ R)$. Отсюда видно, что $R'_{01}=R'_{02}=0$, $R'_{012}\subset su\,(p)$. Из результатов работы [8] следует, что $R'_{012}=su\,(p)$ или $sp\left(\frac{p}{2}\right)$. Из леммы 1.1 следует, что $\mathfrak{M}'=sp\,(p,\ R)$.

Пусть $\mathfrak{M}'$ — k-подалгебра. Из теоремы 6.1 работы [8] имеем, что $\widetilde{\mathfrak{M}}=sl\,(p,\ C)\times su\,(q-p)\dot{+}c_{\overline{\Gamma}}\dot{+}n_{\Gamma}$, где $\pi_1\diagdown\Gamma=\{\alpha_p\}$ $(p=q)$. Пусть s' — подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{M}'\subset\widetilde{\mathfrak{M}}'$ такая, что $\dot{R}_0\cap s'$. Рассуждая аналогично как в теореме 1.1, получаем следующие включения:

1) $su\,(p)\subset\pi_1\,(s')\subset sl\,(p,\ C)$ или $sp\left(\frac{p}{2}\right)\subset\pi_1\,(s')\subset sl\,(p,\ C)$ и

$k=p-1$, причем π_1: $s'\to\pi_1\,(s')$ — изоморфизм. Пусть ρ: $\widetilde{\mathfrak{M}}'\to$ $\to sl\,(p,\ C)\times su\,(q-p)$ — проектирование параллельно радикалу, и пусть $\pi=\pi_1\cdot\rho$: $\widetilde{\mathfrak{M}}'\to sl\,(p,\ C)$. Применяя лемму 4.1 к подалгебре $\pi\,(\mathfrak{M}')\subset$ $\subset sl\,(p,\ C)$ получаем, что $\pi\,(r')=0$, т. е. $r'\subset su\,(q-p)\dot{+}c_{\Gamma}\dot{+}n_{\Gamma}$.

Предположим, что s' некомпактна. Так как $su\,(p)$ максимальна в $sl\,(p,\ C)$, то в случае 1) $s'=sl\,(p,\ C)$. Рассуждая так же в теореме 1.1, получаем, что $\mathfrak{M}'=sl\,(p,\ C)\dot{+}n_{\Gamma}$, $\mathfrak{M}''=su\,(1,\ q)$. В случае 2) из леммы 1.1 видно, что $\pi\,(s')=su^*\,(p)$ или $sp\left(\frac{p}{2},\ C\right)$, откуда так же как в теореме 1.1, получаем $s'=su^*\,(p)$ или $sp\left(\frac{p}{2},\ C\right)$.

Пусть $s'=su^*\,(p)$. Разложим пространства u_{Γ} на неприводимые компоненты относительно ads'. Схемы комплексификации представлений имеют вид:

$$b\colon\ \overset{1}{\circ}-\circ-\cdots-\circ\quad(q-p)\text{— раз}$$

$$[b,\ b]\colon\ \overset{1}{\circ}-\circ-\cdots-\overset{1}{\circ}+N,$$

$c_{\Gamma}\dot{+}su\,(q-p)$ — нулевое представление.

Следовательно, $r'=(r'\cap b)\dot{+}(r'\cap(su\,(q-p)\dot{+}[b,\ b]+c_{\Gamma}))$. Так же, как и в теореме 4.1 доказываем, что $r'\cap b=b$. Значит, $n_{\Gamma}\subset r'$ и $r'=n_{\Gamma}\dot{+}r'\cap(su\,(q-p)+c_{\Gamma})$. Покажем, что $G=(SU^*\,(p)\cdot N_{\Gamma})\cdot SU\,(p-$ $-1,\ q)$. Легко проверить, что $\pi\,(su\,(p-1,\ q)\cap(sl\,(p,\ C+n_{\Gamma}))=sl\,(p-$ $1,\ C)\dot{+}n_{\Delta}$, где $n_{\Delta}\subset sl\,(p,\ C)$ соответствует системе $\Delta=\pi_1\diagdown\{\alpha_1,\ \alpha_1\}$. Согласно теореме 6.1 из [8] $SL\,(p,\ C)=SU^*\,(p)\cdot U_{\Delta}$. По теореме 2.1 из [3] отсюда следует, что $SL\,(p,\ C)=SU^*\,(p)\cdot(SL\,(p-1,\ C)\cdot N_{\Delta})$. Но $SL\,(p-1,\ C)\ N_{\Delta}\subset N_{\Gamma}\ SU\,(p-1,\ q)$, откуда следует наше утверждение. Отсюда, как в теореме 1.1, получаем, что $r'=n_{\Gamma}$, $\mathfrak{M}'=su^*\times$ $\times\,(p)\dot{+}n_{\Gamma}$, а $\mathfrak{M}''=su\,(p-1,\ q)$.

Случай $s'=sp\left(\frac{p}{2},\ C\right)$ рассматривается аналогично.

Случай, когда s' компактна, рассматривается так же, как в теореме 1.1. Аналогично проверяется и минимальность разложений.

Теорема 1.3. *Пусть* $G = SO(p, q)$ $(0 < p \leqslant q)$ *и* $G = G' \cdot G''$ — *минимальное некомпактное разложение. Пусть* $\mathfrak{M}' = s' + r'$ — *разложение Леви, где* s' *полупроста. Если* s' *некомпактна, то разложение содержится в таблице 2. Обратно, все эти разложения минимальны. Если* s' *компактна, то* s' — *подалгебра в* $so(p) \times \times so(q-p)$, *причем проектирование на первый сомножитель изоморфно отображает ее на* $so(p)$, $su\left(\frac{p}{2}\right)$, $sp\left(\frac{p}{4}\right)$ *или* $sp\left(\frac{p}{4}\right) \times \times sp(1)$, $r' \subset so(q-p) \dotplus c_\Gamma \dotplus n_\Gamma$ *при* $s' \cong so(p)$, $sp\left(\frac{p}{4}\right) \times sp\ (1)$,

$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
$so(2p, 2q)$	$so(2p-1, 2q-1) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$, $so(2p-1, 2q)$ $so(2p, 2q-1)$	$su(p, q)$
$so(4p, 4q)$	$so(4p-1, 4q-1) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$ $so(4p-1, 4q)$ $so(4p, 4q-1)$	$sp(p, q)$
$so(p, p)$	$so(p-1, p)$	$sl(p, R)$
$so(2p, 2p)$	$so(2p-1, 2p)$	$sp(p, R)$
$so(p, q)$	$sl(p, R) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p\}\ (q \neq p+2), \{\alpha_p, \alpha_{p+1}\}\ (q = p+2)$	$so(1, q)$
$so(p, q)$	$sl\left(\frac{p}{2}, C\right) + n_\Gamma\ (p > 2)$ $sp\left(\frac{p}{2}, R\right) + n_\Gamma$ $su^*\left(\frac{p}{2}\right) + n_\Gamma\ \ (p > 4)$ $sp\left(\frac{p}{4}, C\right) + n_\Gamma$	$so(p-1, q)$
$so(3, 4)$	$so(1, 4)$; $so(2, 3)$	G_2
$so(8, 8)$	$spin(1, 8)$; $spin(4, 5)$	$so(7, 8)$
$so(4, 4)$	$so(1, 4)$; $so(2, 3)$	$spin(3, 4)$

Таблица 2

проектируется на $\mathrm{c}\bar{\mathrm{r}}$, а $\mathfrak{M}'' = so(p-1, q) \ltimes r' \subset u(1) \times so(q-p) \dotplus \mathrm{c}\bar{\mathrm{r}} \dotplus \mathrm{nr}$ *при* $s' \cong su\left(\frac{p}{2}\right)$, $sp\left(\frac{p}{4}\right)$ *причем* r' *проектируется на* $\mathrm{c}\bar{\mathrm{r}}$.

Доказательство. Из теоремы 3.1 [3] имеем

a) $\mathfrak{M}'' = a \times so(k, q)$, где $0 < k < p$, $a \subset so(p-k)$,

в) $\mathfrak{M}'' = a \times su\left(k, \frac{q}{2}\right)$, где $0 < k \leqslant \frac{p}{2}$ и q — четно,

$a \subset so(p-2k) \times \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $u\left(k, \frac{q}{2}\right)$,

c) $\mathfrak{M}'' = a \times sp\left(k, \frac{q}{4}\right)$, где $4|q$, $0 < k \leqslant \frac{p}{4}$, $a \subset so(p-4k) \times$ $\times\, sp(1)$, $sp(1) \subset so(4k, q)$,

d) $\mathfrak{M}'' = G_2$ при $p = 3$, $q = 4$,

e) $\mathfrak{M}'' = spin(3, 4)$ при $p = q = 4$.

Разложение $R_0 = R_0' + R_0''$ задается следующими схемами:

a)
$$\begin{tikzcd}
R'_{01} \arrow[d, dash] & R'_{012} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & R'_{02} \arrow[d, dash] \\
so(p) \arrow[d, dash] & & so(q) \arrow[d, equal] \\
a_0 \times so(k) & & so(q)
\end{tikzcd}$$

(b)
$$\begin{tikzcd}
R'_{01} \arrow[d, dash] & R'_{012} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & R'_{02} \arrow[d, dash] \\
so(p) \arrow[d, dash] & & so(q) \arrow[d, dash] \\
a_0 \times su(k) & & su\left(\frac{q}{2}\right)
\end{tikzcd}$$

(c)
$$\begin{tikzcd}
R'_{01} \arrow[d, dash] & R'_{012} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & R'_{02} \arrow[d, dash] \\
so(p) \arrow[d, dash] & & so(q) \arrow[d, dash] \\
a_0 \times sp(k) & & sp\left(\frac{q}{4}\right)
\end{tikzcd}$$

d)
$$\begin{tikzcd}
R'_{01} \arrow[d, dash] & R'_{012} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & R'_{02} \arrow[d, dash] \\
so(3) \arrow[dr, equal] & & so(4) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
 & sp(1) & sp(1)
\end{tikzcd}$$

(e)
$$\begin{tikzcd}
R'_{01} \arrow[d, dash] & R'_{012} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & R'_{02} \arrow[d, dash] \\
so(4) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & so(4) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
sp(1) & sp(1) & sp(1),
\end{tikzcd}$$

где a_0 — полупростая часть в a.

Рассмотрим случаи a), b), c). Пусть $R'_{012} = 0$. Проектируя наше разложение на $so(p)$, получим

a) $so(p) = R'_{01} + a_0 \times so(k)$,

b) $so(p) = R'_{01} + a_0 \times su(k)$,

c) $so(p) = R'_{01} + a_0 \times sp(k)$.

Из теоремы 4.1 работы [7] имеем, что в случае a) возможны следующие варианты: $R'_{01} = so(p)$, $R'_{01} = su\left(\frac{p}{2}\right)$ при $k - p = 1$, $R'_{01} =$

$= sp\left(\frac{p}{4}\right)$ при $k = p-1$, $R'_{01} = G_2$, при $p = 7$, $k = 5, 6$, $R'_{01} = \mathrm{spin}\,(7)$, при $p = 8$, $k=5, 6, 7$; $R'_{01} = \mathrm{spin}\,(9)$, при $p = 16$, $k = 15$. Из результатов § 3 [3] следует, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна, и, следовательно, наше разложение содержится в одном из тех, которые перечислены в таблице 2 работы [8]. Отсюда видно, что разложение совпадает с одним из первых двух разложений таблиц 2.

В случаях б) и с), если $R'_{01} = so\,(p)$, из леммы 3.2 [3] также следует, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна. Из таблицы 2 работы [8] видно, что получаются те же разложения, что в случае а). Рассмотрим случаи б) и с) при $R'_{01} \neq so\,(p)$. Тогда $R'_{01} = so\,(p-1)$, $k = \frac{p}{2}, \frac{p}{4}$ — соответственно. Очевидно, можно также считать, что $R'_{02} = so\,(q-1)$. Расширим подалгебру $\mathfrak{M}'$ до максимальной собственной подалгебры $\bar{\mathfrak{M}}'$. Если $\bar{\mathfrak{M}}'$ редуктивна, то из теоремы 4.1 работы [8] имеем $\bar{\mathfrak{M}}' = so\,(p, q-1)$ или $so\,(p-1, q)$. Из включений $so\,(p-1) \subset \bar{\mathfrak{M}}' \subset so\,(p-1, q)$; $so\,(q-1) \subset \bar{\mathfrak{M}}' \subset so\,(p, q-1)$ и из леммы 3.2 работы [3] следует, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна, и, следовательно, по теореме 4.1 из [8] этот случай невозможен.

Если $\bar{\mathfrak{M}}'$—k-подалгебра, то из теоремы 6.1 работы [8] имеем, что $\bar{\mathfrak{M}}' = so\,(p-1, q-1) \dotplus c_{\bar{\Gamma}} + n_\Gamma$, где $\pi_1 \diagdown \Gamma = \{\alpha_1\}$. Аналогично доказательству теоремы 4.2 получаем, что $\mathfrak{M}' = r' + so\,(p-1, q-1)$, где $r' = (r' \cap b) \dotplus (r' \cap c_{\bar{\Gamma}})$, причем $r' \cap b = b = n_\Gamma$, либо 0. Если $r' \cap b = 0$, то алгебра $\mathfrak{M}'$ редуктивна, что противоречит теореме 4.1 из [8]. Значит $\mathfrak{M}' = so\,(p-1, q-1) \dotplus n_\Gamma \dotplus (r' \cap c_{\bar{\Gamma}})$. Из минимальности разложения следует, что $\mathfrak{M}' = so\,(p-1, q-1) \dotplus n_\Gamma$, $\mathfrak{M}'' = su\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$ или $\left(\frac{p}{4}, \frac{q}{4}\right)$.

Пусть $R'_{012} \neq 0$. Рассмотрим максимальную собственную подалгебру $\bar{\mathfrak{M}}' \supset \mathfrak{M}'$. Если $\bar{\mathfrak{M}}$ редуктивна, то из таблицы 2 работы [8] видно, что $p = q$ и возможны случаи: $\bar{\mathfrak{M}}' = sl\,(p, R)$, spin (1,8), spin (4,5) при $p = q = 8$, spin (3,4) при $p = q = 4$. В случае, когда $\bar{\mathfrak{M}}' = sl\,(p, R)$, из результатов работы [7] следует, что $R'_{012} = so\,(p)$, $su\left(\frac{p}{2}\right)$ или $sp\left(\frac{p}{4}\right)$. Из леммы 1.1 видно, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна. Используя теорему 4.1 из [8], получаем, что $\mathfrak{M}' = sl\,(p, R)$ или $sp\left(\frac{p}{2}, R\right)$.

В случае, когда $\bar{\mathfrak{M}}' = \mathrm{spin}\,(1,8)$ или spin (4,5) при $p = q = 8$, для $R_0 = R'_0 + R''_0$ имеем

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & so(8) \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal, dotted] & \\ so(8) \arrow[d, dash] & & so(8) \arrow[d, dash] \\ \dot R_{01} & & \dot R_{02} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] sp(1) \arrow[d, dash] & sp(2) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & sp(1) \arrow[d, dash] \\ so(8) \arrow[d, dash] & & so(8) \arrow[d, dash] \\ \dot R_{01} & & \bar{\dot R}_{02} \end{tikzcd}$$

Отсюда и из результатов работы [7] нетрудно понять, что $R'_{012}=so\,(8)$, $su\,(4)$ или $sp\,(2)$ в первом случае и $sp\,(2)\cong so\,(5)$ во втором случае. В силу леммы 3.2 из [3] имеем, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна, и, следовательно, по теореме 4.1 из [8] $\mathfrak{M}'=\mathrm{spin}\,(1{,}8)$, $\mathfrak{M}'=\mathrm{spin}\,(4{,}5)$, а $\mathfrak{M}''=so\,(7{,}8)$.

Пусть $p=q=4$ и $\tilde{\mathfrak{M}}'=\mathrm{spin}\,(3{,}4)$. Схема разложения $R_0=\bar{\dot R}_0+\dot R_0$ имеет вид

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] sp(1) \arrow[d, dash] & sp(1) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & sp(1) \arrow[d, dash] \\ so(4) \arrow[d, dash] & & so(4) \arrow[d, dash] \\ \dot R_{01} & & \dot R_{02}, \end{tikzcd}$$

причем, как видно из теоремы 4.1 работы [7], $\dot R_{01}\subset so\,(3)$. Проектируя это разложение на первое прямое слагаемое, убеждаемся в том, что R' содержит простой идеал алгебры $\bar{\dot R}_0$, т. е. подалгебру $so\,(3)$ или $su\,(2)\subset so\,(3{,}4)$. По лемме 3.5 из [3] $\mathfrak{M}''$ редуктивна, и по теореме 4.1 из [8] имеем $\mathfrak{M}'=\mathrm{spin}\,(3.4)$, $\mathfrak{M}''=so\,(1{,}4)$, $so\,(2{,}3)$.

Пусть $\tilde{\mathfrak{M}}'$ — k-подалгебра. Из теоремы 6.1 работы [8] имеем, что $\tilde{\mathfrak{M}}'=sl\,(p,\,R)\times so\,(q-p)\dot+ c_{\bar\Gamma}\dot+ n_\Gamma$, где $\pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_p\}$ $(q\neq p+2)$, $\{\alpha_p,\,\alpha_{p+1}\}$ $(q=p+2)$, $\{\alpha_p\}$ $(p=q)$. Пусть s'—подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{M}'\subset\tilde{\mathfrak{M}}'$, такая, что $R'_0\subset s'$. Аналогично как в теореме 1.1 получаем следующие включения:

1) $so\,(p)\subset\pi_1\,(s')\subset sl\,(p,\,R)$ или

2) $su\left(\dfrac{p}{2}\right)\subset\pi_1\,(s')\subset sl\,(p,\,R)$ и $k=p-1$ или

3) $sp\,\left(\dfrac{p}{4}\right)\subset\pi_1\,(s')\subset sl\,(p,\,R)$ и $k=p-1$,

причем π_1: $s'\to\pi_1\,(s')$—изоморфизм. Пусть $\rho:\tilde{\mathfrak{M}}'\to sl\,(p,\,R)\times so\,(q-p)$ —проектирование параллельно радикалу, и пусть $\pi=\pi_1\cdot\rho$: $\tilde{\mathfrak{M}}'\to sl\,(p,\,R)$. Применяя лемму 1.1 к подалгебре $\pi\,(\mathfrak{M}')\subset sl\,(p,\,R)$, получаем, что $\pi\,(r')=0$ или $\pi\,(r')=u\,(1)$ (при четном p). Итак, $r'\subset so\,(q-p)\dot+c_{\bar\Gamma}\dot+n_\Gamma$ или $r'\subset u\,(1)\times so\,(q-p)\dot+c_{\bar\Gamma}\dot+n_\Gamma$ (при четном p).

Предположим, что s' некомпактна. Так как $so\,(p)$ максимальна в $sl\,(p,\,R)$, то в случае 1) $s'\subset sl\,(p,\,R)$ и аналогично, как в теореме 1.1, получаем $\mathfrak{M}'=sl\,(p,\,R)\dot+n_\Gamma$. В случаях 2) и 3), в силу 1.1, прихо, дим к следующим вариантам:

$$R'_{012} = su\left(\frac{p}{2}\right), \quad s' = sl\left(\frac{p}{2}, C\right) \text{ или } sp\left(\frac{p}{2}, R\right),$$

$$R'_{012} = sp\left(\frac{p}{4}\right), \quad s' = su^*\left(\frac{p}{2}\right) \quad \text{или} \quad sp\left(\frac{p}{4}, C\right).$$

Ясно, что s' индуцирует в $b = n_\Gamma$ $(q-p)$-кратное стандартное представление. Следовательно, $r' = (r' \cap n_\Gamma) \dot{+} (r' \cap (c_{\bar\Gamma} \dot{+} so\,(q-p)))$ для $s' = sp\left(\frac{p}{2}, R\right)$ и $r' = (r' \cap n_\Gamma) \dot{+} (r' \cap (u\,(1) \dot{+} c_{\bar\Gamma} \dot{+} so\,(q-p)))$ для $s' = sl \times \times \left(\frac{p}{2}, C\right)$, $su^*\left(\frac{p}{2}\right)$, $sp\left(\frac{p}{4}, C\right)$. Так же, как в теореме 1.1, доказывается, что $r' \cap n_\Gamma = n_\Gamma$.

Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как в теоремах 1.1 и 1.2. Аналогично теореме 1.1 разбирается случай компактной s'.

Рассмотрим случай d). Включим $\mathfrak{M}'$ в максимальную собственную подалгебру $\bar{\mathfrak{M}}'$. Если $\bar{\mathfrak{M}}'$ редуктивна, то из таблицы 2 работы [8] имеем, что $\bar{\mathfrak{M}}' = so\,(2.4)$, $so\,(2) \times so\,(1.4)$ или $so\,(3,3)$. Отсюда видно, что $R'_{012} = 0$. Из результатов работы [7] следует, что либо $R'_{01} = 0$, тогда $R'_{02} = so\,(4)$ или $su\,(2)$ либо $R'_{01} = so\,(3)$, тогда R'_{02} — произвольна. Пусть $R'_{01} = 0$, тогда $R'_{02} = so\,(4)$ или $su\,(2)$. В силу лемм 3.2 и 3.5 из [3] получаем, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна и, следовательно, как видно из таблицы 2 работы [8] $\mathfrak{M}' = so\,(1,4)$. Если $R'_{01} = so\,(3)$, имеем $so\,(3) \subset \mathfrak{M}' \subset so\,(3,3)$ и, в силу леммы 3.2 из [3], $\mathfrak{M}'$ редуктивна и, следовательно, как видно из таблицы 2 работы [8] $\mathfrak{M}' = so\,(3,2)$. Пусть $\bar{\mathfrak{M}}'$ — k-подалгебра.

Из таблицы 3 работы [8] имеем $\bar{\mathfrak{M}}' = so\,(2,3) \dot{+} c_{\bar\Gamma} \dot{+} n_\Gamma$, где $\pi_1 \setminus \setminus \Gamma = \{\alpha_1\}$. Так как $so\,(2,3) \subset so\,(2,3) \dot{+} c_{\bar\Gamma} \dot{+} n_\Gamma$ и как мы уже показали, при $\mathfrak{M}' = so\,(2,3)$ получаем разложение, то у алгебры $so\,(3,4)$, кроме указанных редуктивных разложений, других минимальных разложений не существует.

Случай e) рассматривается аналогично.

Проверка минимальности разложений из таблицы делается так, как в теоремах 1.1 и 1.2.

§ 2. Разложения без пересечения

В этом параграфе будут найдены все разложения без пересечения всех простых вещественных классических групп Ли. Напомним, что такими разложениями являются, в частности, обобщенные разложения Ивасава.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ — разложение без пересечения простой алгебры Ли $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}'' = R$, то $\mathfrak{M}' = w + n$, где $w \subset \subset m_\varnothing \dot{+} h_-$ изоморфно проектируется на h_-, т. е. разложение яв-*

ляется обобщенным разложением Ивасава. Если R не полупроста, $R = R_0 \dot{+} \mathfrak{z}$ и $\mathfrak{M}'' = R_0$, то возможны следующие случаи:

1) $\mathfrak{M}' = (m + w_{\mathfrak{z}}) \dot{+} n$, где $m \subset m_{\mathfrak{z}} \subset R$ изоморфно проектируется на $\mathfrak{z}$, $w \subset m_{\mathfrak{z}} \dot{+} h_-$ — изоморфно проектируется на h_-.

2) $\mathfrak{M}' = s_\Gamma' + w + n_\Gamma$, где $w \subset c_\Gamma^- \dot{+} n_\Gamma$ изоморфно проектируется на c_Γ^-, Γ состоит из одного элемента и максимальная компактная $c \subset s_\Gamma'$ изоморфно проектируется на $\mathfrak{z}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{M}'' = R$, то $\mathfrak{M}'$ является минимальной k-подалгеброй и, как было отмечено в § 1 работы [3], имеет указанный выше вид. Пусть R не полупроста и $\mathfrak{M}'' = R_0$. Тогда $\tilde{\mathfrak{M}}'$ — k-подалгебра и по лемме из § 1 работы [3] имеем $R = R' + R_0$, $R' \cap R_0 = 0$. Отсюда следует, что $R' \subset R$ изоморфно проектируется на $\mathfrak{z}$. Пусть c — максимальная компактная подалгебра в s_Γ'. Тогда $\dim c = 1$. Значит $\Gamma = \varnothing$ или состоит из одного элемента, причем в первом случае $R' \subset m_{\mathfrak{z}}$, а во втором случае $R' = c$. Отсюда легко следует, что $\mathfrak{M}'$ имеет вид, указанный в лемме.

Пусть $G = G'$. G'' — разложение без пересечения простой группы G. По лемме 1.1 из [3] имеем разложение $R_0 = R_0' + R_0''$ для максимальных полупростых компактных подалгебр в $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$. Очевидно, $R_0' \cap R_0'' = 0$. Мы будем пользоваться следующим результатом [4, 8].

Теорема. *Пусть $R_0 = R_0' + R_0''$, где R_0 — полупростая компактная алгебра Ли, $R_0' \cap R_0'' = 0$. Тогда $R_0 \cong R_0' \times R_0''$. Если*

$$R_0 = \sum_{i=1}^{n} {}^{\cdot} R_{0i},\quad R_0' = \sum_{i=1}^{s} {}^{\cdot} R_{0i}',\quad R_0'' = \sum_{i=1}^{t} {}^{\cdot} R_{0i}''$$

— разложения алгебр в прямые суммы простых идеалов, $\pi_i : R_0 \to R_{0i}$ — соответствующее проектирование, то нумерацию простых идеалов можно выбрать так, что $R_{0i}' \subset R_{0i} + \sum_{j=s-1}^{n} {}^{\cdot} R_{0j}$, $\pi_i R_{0i}' \to R_{0i}$, — изоморфизм $(i = 1, 2, \cdots, s)$, $R_{0j}'' \subset R_{0s+j} + \sum_{l=1}^{s} R_{0l}$, $\pi_{s+j}: R_{0j}'' \to R_{0s+j}$ — изоморфизм $(j = 1, 2, \cdots, t)$. При этом из $\pi_{s+j}(R_{0l}') = 0$ следует, что $\pi_l(R_{0j}'') = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, s;\ j = 1, 2, \cdots, t)$.

Теорема 2.1. *Если $G = SL(n, R)$ $(n \neq 4)$, $SU^*(2n)$, $SO(1, n)$ $(n > 4)$ или простая комплексная группа Ли, то всякое ее разложение без пересечения является обобщенным разложением Ивасава. Если $G = SO^*(4n+2)$, $SU(1, n)$, то, кроме обобщенных разложений Ивасава, существуют разложения, описанные в лемме 2.1 (случай 1). Если $G = Sp(n, R)$, $SO(2, n)$ $n > 4)$, $SO^*(4n)$, то, кроме обобщенных разложений Ивасава, существуют следующие разложения (лемма 2.1, случай 2).*

$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
$sp(n, R)$	$sp(1, R) + c_\Gamma^- \dot{+} n_\Gamma$ $(\Gamma = \{\alpha_n\})$	$su(n)$
$so(2, n)$	$sl(2, R) \dot{+} w \dot{+} n_\Gamma$ $(\Gamma = \{\alpha_l\}$, $w \subset c_\Gamma^- + so(n-2)$ изоморфно проектируется на c_Γ^-	$so(n)$
$so^*(4n)$	$sl(2, R) \dot{+} w \dot{+} n_\Gamma$ $(\Gamma = \{\alpha_{2n}\}$, $w \subset c_\Gamma^- \dot{+} m_\Gamma$ — изоморфно проектируется на c_Γ^-	$su(2n)$

$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
$Sp(p, q)$ $(p \le q)$	$Su^*(2p) + \mathfrak{b} + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\}$, $\mathfrak{b} \subset C_\Gamma + Sp(q-p)$ изоморфно проектируется на $C_\Gamma)$	$Sp(q)$
$Su(p, q)$ $(1 < p \le q)$	$Sl(p, C) + \mathfrak{b} + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p, \alpha_q\}$ $(p<q)$, $\{\alpha_p\}$ $(p=q)$, $\mathfrak{b} \subset C_\Gamma + Su(q-p)$ - изоморфно проектируется на C_Γ	$\mathfrak{a} = Su(q)$ $(\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z} + Su(p)$ изоморфно проектируется в $\mathfrak{z})$
$Su(p, q)$ $(1 < p < q)$	$Sl(p, C) + C + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p, \alpha_q\}$ $(p<q)$, $\{\alpha_p\}$ $(p=q)$, $C \subset C_\Gamma \times Su(p-q)$ - изоморфно проектируется на C_Γ	$Su(q)$
$So(p, q)$ $(2 < p \le q)$	$Sl(p, R) + \mathfrak{b} + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_\beta\}$ $(\beta \ne p+2)$, $\mathfrak{b} \subset C_\Gamma + So(q-p)$ изоморфно проектируется на C_Γ	$So(q)$
$So(4, q)$ $(q \ge 4)$	$Sl(3, R) + \mathfrak{b} + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_3, \alpha_4\}$, $\mathfrak{b} \subset C_\Gamma + So(q-p)$ изоморфно проектируется на C_Γ	$Su(2) \times So(q)$
$So(4, 4)$	$Sl(4, R) + C_\Gamma + n_\Gamma$, $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$	$\cong Su(2) \times Su(2)$
$So(3, 4)$	$Sl(3, R) + C_\Gamma + n_\Gamma$, $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_3\})$	$So(3) \times Su(2)$

Доказательство. Если $\mathfrak{M} = sl(n, R)$ $(n \ne 4)$, $su^*(2n)$, $so(1, n)$ $(n > 4)$ или простая комплексная алгебра Ли, то R проста. Из сформулированной выше теоремы следует, что $\mathfrak{M}' \supset R$, откуда $\mathfrak{M}'' = R$ и применима лемма 2.1. В остальных случаях $R = R_0 + \mathfrak{z}$, где R_0 проста. Из сформулированной выше теоремы следует, что $\mathfrak{M}'' \supset R_0$. Из классификации простых алгебр легко вывести, что $\mathfrak{M}'' = R$ или R_0, и опять применима лемма 2.1. В случаях $\mathfrak{M} = su(1, n)$, $so^*(4n+2)$ имеем $m_\mathfrak{z} \subset R_0$ и поэтому существуют разложения, описанные в случае 1). В то же время легко проверить, что для любого $\alpha \in \pi_1$, для этих алгебр максимальная компактная подалгебра $c \subset s'_{\{\alpha_1\}}$ содержится в

R_0. Наоборот, если $\mathfrak{M} = sp(n, R)$, $so^*(4n)$, $so(2, n)$, то $m_{\mathfrak{z}}$ — полупроста и потому $m_{\mathfrak{z}} \subset R_0$ и легко находятся те корни $\alpha \in \pi_1$, для которых $c \subset R_0$.

Теорема 2.2. *Пусть $G = G' \cdot G''$ разложения без пересечения, где $G = Sp(p, q)$, $SU(p, q)$ или $SO(p, q)$, причем $\mathfrak{M}'' = R$, R_0. Тогда разложение компактно и имеет следующий вид:*

$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
$sp(p, q)$ $(p \leqslant q)$	$su^*(2p) \dot{+} b \dot{+} n_\Gamma$ ($\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\}$, $b \subset c_\Gamma^- + sp(q-p)$— изоморфно проектируется на c_Γ^-)	$sp(q)$
$su(p, q)$ $(1 < p \leqslant q)$	$sl(p, C) \dot{+} b \dot{+} n_\Gamma$ ($\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p, \alpha_q\}$ $(p < q)$, $\{\alpha_p\}$ $(p = q)$, $b \subset c_\Gamma^- \dot{+} su(q-p)$-изоморфно проектируется на c_Γ^-)	$a \times su(q)$ ($a \subset \mathfrak{z} \dot{+} (su(p)$-изоморфно проектируется в $\mathfrak{z}$)
$su(p, q)$ $(1 < p \leqslant q)$	$sl(p, C) \dot{+} c \dot{+} n_\Gamma$ ($\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha p, \alpha q\}$ $(p < q)$, $\{\alpha p\}$ $(p = q)$, $c \subset c_\Gamma^+ \times su(q-p)$-изоморфно проектируется на c_Γ^+)	$su(q)$
$so(p, q)$ $(2 < p \leqslant q)$	$sl(q, R) \dot{+} b \dot{+} n_\Gamma$ ($\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha p\}$ $(q \neq p+2)$, $b \subset c_\Gamma^- \dot{+} so(q-p)$-изоморфно проектируется на c_Γ^-)	$so(q)$
$so(4, q)$ $(q \geqslant 4)$	$sl(3, R) \dot{+} b \dot{+} n_\Gamma$ ($\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_3, \alpha_4\}$, $b \subset c_\Gamma^- \dot{+} so(q-p)$ изоморно проектируется на c_Γ^-)	$su(2) \times so(q)$
$so(4, 4)$	$sl(4, R) \dot{+} c_\Gamma^- \dot{+} n_\Gamma$, $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$	$\cong su(2) \times su(2)$
$so(3, 4)$	$sl(3, R) + c_\Gamma^- + n_\Gamma$; $(\pi_1 / \Gamma = \{\alpha_3\})$	$so(3) \times su(2)$

Если $\mathfrak{M} = su(p, q)$, $\mathfrak{M}'' = R_0$, то существует разложение, удовлетворяющее условию 1) леммы 2.1, а при $p = q$ существует еще следующее разложение: $\mathfrak{M}' = su(1,1) + w + n_\Gamma$, где $\Gamma = \{\alpha_p\}$, $w \subset c_\Gamma^- \dot{+} n_\Gamma$ изоморфно проектируется на c_Γ^-, $\mathfrak{M}'' = R_0$.

Доказательство. Если наше разложение некомпактно, то будучи минимальным, оно удовлетворяет условиям теорем 1.1, 1.2, 1.3. Но легко проверить, что все разложения, описанные в этих теоремах, имеют ненулевые пересечения.

Пусть $G = Sp(p, q)$, имеем $R_1 = sp(p)$, $R_0 = sp(q)$. Согласно теореме из § 2 имеем $R'' = sp(q)$, π_1: $R' \to sp(p)$— изоморфизм. Из леммы 3.2 работы [3] следует, что $\mathfrak{M}'' = sp(q)$. Значит, $\mathfrak{M}'$— k-под. алгебра. Из описания k-подалгебр легко понять, что $\mathfrak{M}'$ имеет указанный вид.

Пусть $\mathfrak{M} = su(p, q)$ $(1 < p \leqslant q)$, тогда $R_{01} = su(p)$, $R_{02} = su(q)$. Согласно теореме из § 2, имеем $R_0^{''} = su(q)$, π_1: $R_0' \to su(p)$—изоморфизм. Из леммы 3.2 работы [3] следует, что $\mathfrak{M}'' = a \times su(q)$ или $a \times su(1, q)$, где $a \subset su(p) \dotplus \mathfrak{z}$, $su(p-1) \dotplus \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ — центр R. Так как разложение компактно, то $\mathfrak{M}'' = a \times su(q)$, а $\mathfrak{M}'$ — k-подалгебра. Из описания k-подалгебр ясно, что $\mathfrak{M}' = sl(p, C) \dotplus b \dotplus c \dotplus n_\Gamma$, где $b \subset c_\Gamma + su(q-p)$ изоморфно проектируется на c_Γ^-, $c \subset c_\Gamma^+ + su(q-p)$. Согласно лемме из § 1 [3] мы должны иметь $R = R' + R''$, причем $R' \cap R'' = 0$. Имеем $R = \mathfrak{z} + su(p) + su(q)$, $R' = su(p) \dotplus c$, $R'' = a \dotplus$ $+ su(q)$.

Из соображений размерности ясно, что либо $c = 0$, $\dim a = 1$, либо наоборот. Далее a или $\mathfrak{z}$ должны проектироваться на $\mathfrak{z}$. Отсюда видно, что $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$ имеют указанный вид.

Пусть $\mathfrak{M} = so(p, q)$. Рассмотрим случай, когда $q > 4$. Из сформулированной выше теоремы видно, что $\mathfrak{M}'' \supset so(q)$.

По лемме 3.2 из [3] $\mathfrak{M}'' = a \times so(k, q)$, где $a \subset so(p-k)$. Так как разложение компактно, то $k = 0$, т. е. $\mathfrak{M}'' = a \times so(q)$, где $a \subset so(p)$.

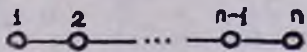
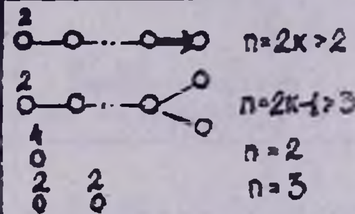
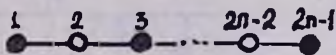
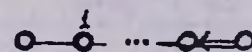
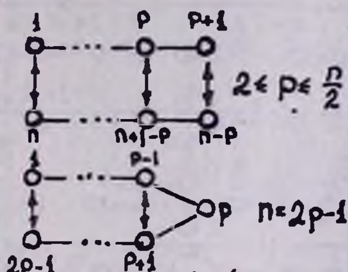
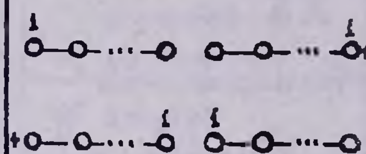
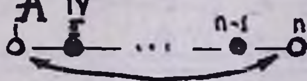
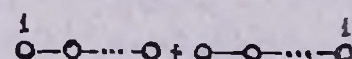
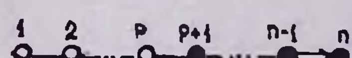
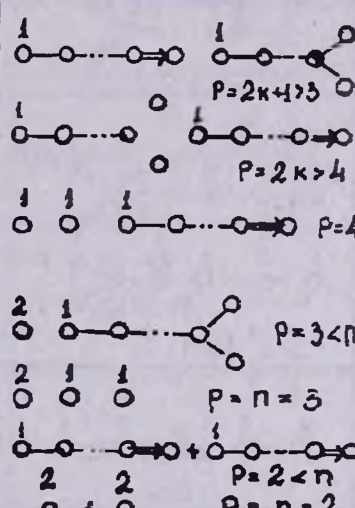
Пусть $p \neq 2,4$. Тогда $so(p)$ проста и из теоремы § 1 видно, что $a = 0$ и π_1: $R' \to so(p)$ — изоморфизм. Из описания k-подалгебр следует, что $\mathfrak{M}' = sl(p, R) \dotplus b \dotplus n_\Gamma$, где b изоморфно проектируется на c_Γ^-, $\Gamma = \{\alpha_p\}$ $(q \neq p+2)$, $\{\alpha_p, \alpha_{p+1}\}$ $(q = p+2)$. Если $p=4$, то возможны также случаи, когда $a = su(2)$. Тогда $\mathfrak{M}' = sl(3, R) \dotplus b \dotplus n_\Gamma$, где $\Gamma =$ $= \{\alpha_3, \alpha_4\}$.

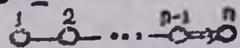
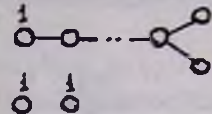
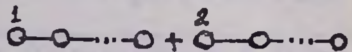
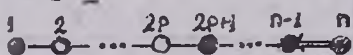
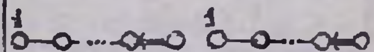
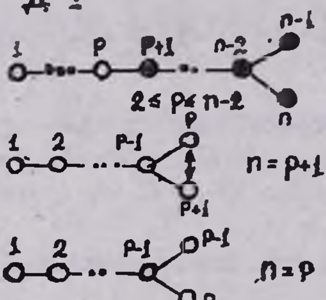
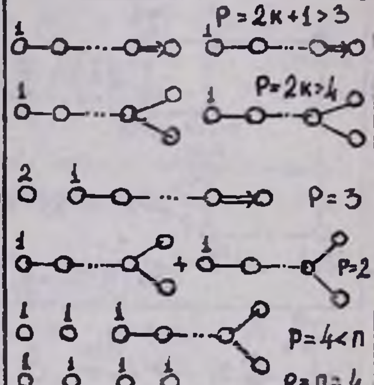
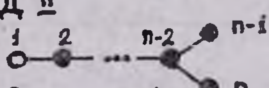
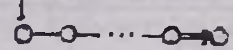
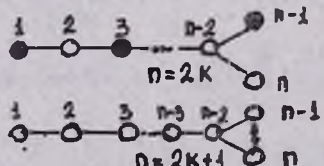
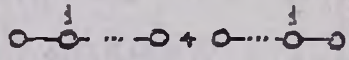
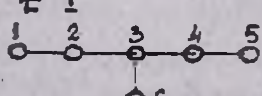
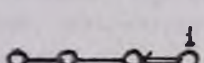
В случае $p=2$ по лемме из § 1 работы [3] имеем $R = R' \dotplus R''$, и дальше рассуждаем так же, как при $p \neq 2,4$.

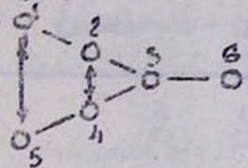
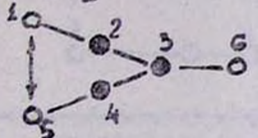
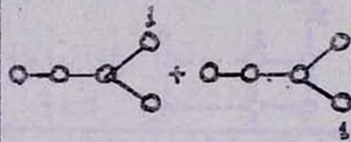
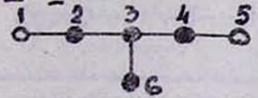
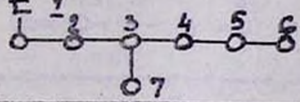
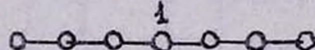
Если $p = q = 4$ и $\mathfrak{M}''$ компактно, то $\mathfrak{M}'$ — k-подалгебра и R' полупроста, откуда $\mathfrak{M}' = sl(4, R) + c_\Gamma^- + n_\Gamma$, где $\Gamma = \{\alpha_1\}$ или $\mathfrak{M}' =$ $= sl(3, R) \dotplus c_\Gamma^- \dotplus n_\Gamma$, где $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. В первом случае ясно, что $\mathfrak{M}''$— подалгебра в R, изоморфная $so(4)$ (возможно несколько вариантов), а во втором случае $\mathfrak{M}'' = su(2) \times so(4)$. Аналогично рассматривается случай $p = 3$, $q = 4$.

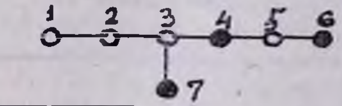
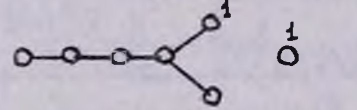
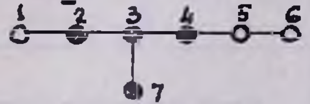
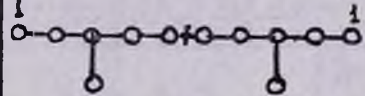
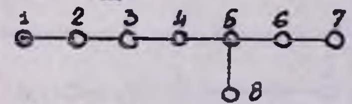
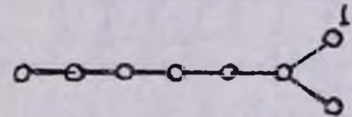
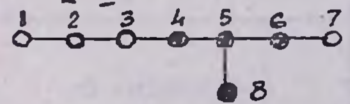
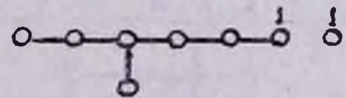
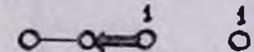
Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 9.IV.1974

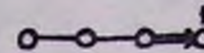
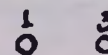
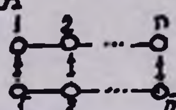
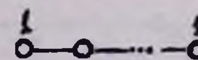
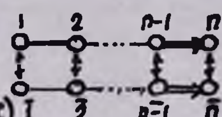
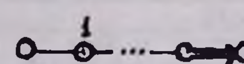
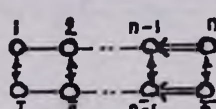
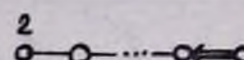
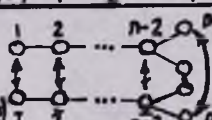
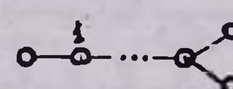
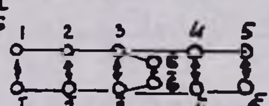
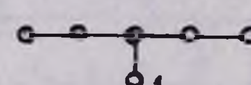
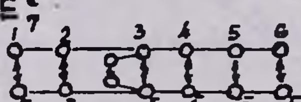
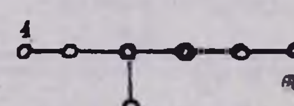
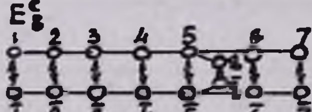
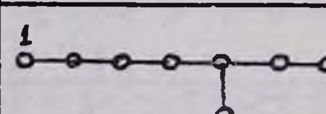
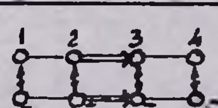
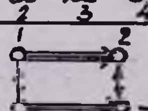
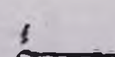
$\mathfrak{ggg}$	R	X
AI  $Sl(n+1, \mathbb{R})$	$So(n+1)$	
AII  $Su^*(2n)$	$Sp(n)$	
AIII  $Su(p, n+1-p)$	$S(u(p)\times u(n+1-p))$	
AIV  $Su(1,n)$	$S(u(1)\times u(n))$	
BI  $2\leq p\leq n$ $So(p, 2n+1-p)$	$So(p)\times So(2n+1-p)$	

$\mathfrak{GGG}$	R	$\mathcal{X}$
B $\overline{\text{II}}$  So(1,2n)	So(2n)	 n > 2; n = 2
C $\overline{\text{I}}$  Sp(n, IR)	U(n)	
C $\overline{\text{II}}$  Sp(p, n-p) $1 \le p \le \frac{n}{2}$	Sp(p)×Sp(n-p)	
Д $\overline{\text{I}}$  $2 \le p \le n-2$; n = p+1; n = p; So(p, 2n-p) n > 3	So(p)×So(2n-p)	 P = 2K+1 > 3; P = 2K > 4; P = 3; P = 2; P = 4 < n; P = n = 4
Д $\overline{\text{II}}$  So(1,2n-1)	So(2n-1)	
Д $\overline{\text{III}}$  n = 2K; n = 2K+1; So* (2n)	U(n)	
E $\overline{\text{I}}$ 	Sp(4)	

[illegible]	R	χ
E II 	$Su(6) \times Su(2)$	
E III 	$So(10) \times SO(2)$	
E IV 	F_4	
E V 	$Su(8)$	

E $\overline{\text{VI}}$ 	$So(12) \times Su(2)$	
E $\overline{\text{VII}}$ 	$E_6 \times So(2)$	
E $\overline{\text{VIII}}$ 	$So(16)$	
E $\overline{\text{IX}}$ 	$E_7 \times Su(2)$	
F_1 	$Sp(3) \times Su(2)$	

ПРОДОЛЖЕНИЕ ТАБЛИЦЫ 3

ggg	R	X
F II 	So(9)	
G_2 	So(4)	
A^c  $Sl(n+1,C)$ $n>1$	Su(n+1)	
B^c  $n>2$ $So(2n+1,C)$	So(2n+1)	
C^c  $Sp(n,C)$	Sp(n)	
$Д^c$  $n>3$ $So(2n,C)$	So(2n)	
E_6^c 	E_6	
E_7^c 	E_7	
E_8^c 	E_8	
F_4^c 	F_4	
G_2^c 	G_2	

Ռ. Օ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ. Իրական պարզ Լիի խմբերի փոքրագույն վերլուծությունները *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում բացահայտ տեսքով գտնված են Լիի $SO(p, q)$, $SU(p, q)$ *և* $Sp(p, q)$ *խմբերի բոլոր փոքրագույն վերլուծությունները, ինչպես նաև Լիի դասական իրական պարզ խմբերի առանց հատման վերլուծությունները։*

R. O. NAZARIAN. *The minimal decompositions of real simple Lie groups*
(summary)

This paper is a study of the minimal decompositions for groups $SO(p, q)$ $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$, and the decompositions $G=G'\cdot G''$ for all classic real simple Lie groups, where $\dim C'\cap G' = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Б. Дынкин.* Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли, Матем. сб., 30 (72), 1952, 349—462.
2. *Н. П. Мушиц.* О максимальных приводимых подгруппах простых вещественных групп Ли, Уч. зап. Каз. ун-та, 114, кн. 2, 1954, 195—204.
3. *Р. О. Назарян.* О разложении некоторых простых вещественных групп Ли.
4. *D. Sternheimer.* Extensions et unifications dàlgèbres de Lie, J. math. pures et appl; 47, 1968, 247—287.
5. *А. Л. Онищик.* О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях II, Матем. сб., 74 (116), 1967, 398—416.
6. *А. Л. Онищик.* О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях III, Матем. сб., 75 (117), 1968, 255—263.
7. *А. Л. Онищик.* Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований, Труды ММО, XI, 1962, 199—242.
8. *А. Л. Онищик.* Разложения редуктивных групп Ли, Матем. сб., 80 (122), № 4, 1969, 553—599.
9. *P. Van Praag.* Une décomposition des groupes orthogonaux et Symplectiques, C. r. Acad. sci., 262, 1966, 1037—1039.
10. *P. Van Praag.* Sous groupes non triangulables factorisant certaing groupes orthogonaux, C. r. Acad. sci., 263, 1966, 156—157.