В. Г. ВЕРДИЕВ

О ПЛОТНОСТИ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК МАКСИМАЛЬНОГО
 ОТКЛОНЕНИЯ ПРИ НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ
 НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1°. Пусть $C_{2\pi}$ — множество всех непрерывных 2π -периодических функций $f(t)$ с равномерной метрикой $\|f\|_{C_{2\pi}} = \max |f(t)|$ при $0 \leq t \leq 2\pi$; $E_n^*(f)$ — наилучшее приближение функции $f(t) \in C_{2\pi}$ посредством тригонометрических многочленов порядка $\leq n$; $T_n^*(t)$ — тригонометрический многочлен, для которого достигается наилучшее приближение $E_n^*(f)$; $M_n^*(f)$ — множество точек $\{u\}$ из $[0, 2\pi]$, для которых $|f(u) - T_n^*(u)| = E_n^*(f)$. Как известно, множество $M_n^*(f)$ содержит не менее $2n + 2$ точек $\{u_i\}_{i=1}^{2n+2} \subset [0, 2\pi)$, в которых значения разности $f(t) - T_n^*(t)$ попеременно положительны и отрицательны. Точки $\{u_i\} \subset M_n^*(f)$ называются точками максимального отклонения от нуля разности $f(t) - T_n^*(t)$. Множество $M^*(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^*(f)$ назовем множеством точек максимального отклонения функции $f(t) \in C_{2\pi}$.

В работе [1] М. И. Кадец доказал теорему, из которой следует, что множество точек максимального отклонения при наилучшем приближении непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции алгебраическими многочленами всюду плотно на отрезке $[-1, 1]$. Цель настоящей работы — доказать, что множество $M^*(f)$ любой функции $f(t) \in C_{2\pi}$ всюду плотно на отрезке $[0, 2\pi]$.

2°. Теорема 1 [2]. Пусть $T(t)$ и $Q(t)$ — два тригонометрических многочлена порядка n ; $(0 \leq) x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} (< 2\pi)$ — нули многочлена $T(t)$, $(0 \leq) t_1 < t_2 < \dots < t_{2n} (< 2\pi)$ — нули его производной $T'(t)$; $(0 \leq) y_1 < y_2 < \dots < y_{2n} (< 2\pi)$ — нули многочлена $Q(t)$; $(0 \leq) q_1 < q_2 < \dots < q_{2n} (< 2\pi)$ — нули его производной $Q'(t)$. Если

$$\left. \begin{aligned} T(t_i) = Q(q_i) \text{ при } i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, 2n, \\ T(t_j) > Q(q_j) \text{ при } Q(q_j) > 0 \text{ и } T(t_j) < Q(q_j) \text{ при } Q(q_j) < 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и $t_1 = q_1$, то

$$t_2 < q_2; t_3 < q_3; \dots; t_{j-1} < q_{j-1}; q_{j+1} < t_{j+1}; q_{j+2} < t_{j+2}; \dots; q_{2n} < t_{2n}, \quad (2)$$

$$x_1 < y_1; x_2 < y_2; \dots; x_{j-1} < y_{j-1}; y_j < x_j; y_{j+1} < x_{j+1}; \dots; y_{2n} < x_{2n}, \quad (3)$$

$$y_1 - x_1 < y_2 - x_2 < \dots < y_{j-1} - x_{j-1} \text{ и } x_j - y_j > x_{j+1} - y_{j+1} > \dots > x_{2n} - y_{2n}, \quad (4)$$

$$q_2 - t_2 < q_3 - t_3 < \dots < q_{j-1} - t_{j-1} \text{ и } t_{j+1} - q_{j+1} > t_{j+2} - q_{j+2} > \dots > t_{2n} - q_{2n}. \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим многочлены $T^2(t)$ и $Q^2(t)$. Для доказательства неравенств (2) и (3) укажем процесс перехода от многочлена $T^2(t)$ к многочлену $Q^2(t)$, то есть построим последовательность тригонометрических многочленов $\{T_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ так, что $T_0(t) = T^2(t)$ и $\lim T_m(t) = Q^2(t)$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно относительно $t \in [0, 2\pi]$. Для этого рассмотрим многочлен $T^2(t)$ как интерполяционный с узлами интерполяции в точках $t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_{2n}, x_{2n}$ и значениями $T^2(t_1), T^2(x_1), T^2(t_2), T^2(x_2), \dots, T^2(t_{2n}), T^2(x_{2n})$. Так как $T^2(t_j) > Q^2(q_j)$, то в промежутке (x_{j-1}, x_j) найдутся две точки μ_1 и η_1 , причем $\mu_1 < \eta_1$, такие, что $T^2(\mu_1) = Q^2(q_j) = T^2(\eta_1)$. Выберем точки $\xi_{2j-1,1}^{(1)} = \frac{1}{3}(\eta_1 + \mu_1)$ и $\xi_{2j-1,2}^{(1)} = \frac{2}{3}(\eta_1 + \mu_1)$. По теореме 3 из [3] для каждой из этих точек $\xi_{2j-1,i}^{(1)}$ ($i=1, 2$) существует единственный тригонометрический многочлен $T_{1,i}(t)$ порядка $2n$ и единственная система из $4n-2$ точек

$$\xi_{2,1}^{(1)}, \xi_{3,1}^{(1)}, \dots, \xi_{2j-2,1}^{(1)}, \xi_{2j,1}^{(1)}, \dots, \xi_{4n,1}^{(1)}$$

таких, что

$$t_1 = \xi_{1,1}^{(1)} < \xi_{2,1}^{(1)} < \dots < \xi_{2j-2,1}^{(1)} < \xi_{2j-1,1}^{(1)} < \xi_{2j,1}^{(1)} < \dots < \xi_{4n,1}^{(1)} < 2\pi,$$

$$T_{1,i}(\xi_{2k-1,i}^{(1)}) = T^2(t_k) = Q^2(q_k) \text{ при } k=1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, 2n,$$

$$T_{1,i}(\xi_{2k,i}^{(1)}) = T^2(x_k) = Q^2(y_k) \text{ при } k=1, 2, \dots, 2n,$$

$$T_{1,i}(\xi_{2j-1,i}^{(1)}) = Q^2(q_j) \text{ и } T_{1,i}(\xi_{k,i}^{(1)}) = 0 \text{ при } k=1, 2, \dots, 2j-2, 2j, \dots, 4n.$$

При этом хотя бы для одного из многочленов $T_{1,1}(t)$ и $T_{1,2}(t)$ имеем $T_{1,i}(\xi_{2j-1,i}^{(1)}) \neq 0$ или при $i=1$, или при $i=2$. Действительно, если одновременно $T_{1,1}(\xi_{2j-1,1}^{(1)}) = 0$ и $T_{1,2}(\xi_{2j-1,2}^{(1)}) = 0$, то по теореме 3 из [3] $T_{1,1}(t) \equiv T_{1,2}(t) \equiv Q^2(t)$ и $\xi_{2k-1,1}^{(1)} = \xi_{2k-1,2}^{(1)} = q_k$ при $k=1, 2, \dots, 2n$, $\xi_{2k,1}^{(1)} = \xi_{2k,2}^{(1)} = y_k$ при $k=1, 2, \dots, 2n$. Однако равенство $\xi_{2j-1,1}^{(1)} = \xi_{2j-1,2}^{(1)}$ противоречит определению точек $\xi_{2j-1,1}^{(1)}$ и $\xi_{2j-1,2}^{(1)}$. Пусть при $i=i_0$ ($i_0=1, 2$) для $\xi_{2j-1,i_0}^{(1)}$ имеем $T_{1,i_0}(\xi_{2j-1,i_0}^{(1)}) \neq 0$. Положим $T_1(t) = T_{1,i_0}(t)$ и $\xi_k^{(1)} = \xi_{k,i_0}^{(1)}$ ($k=1, 2, \dots, 4n$). При $T_{1,1}(\xi_{2j-1,1}^{(1)}) \neq 0$ и $T_{1,2}(\xi_{2j-1,2}^{(1)}) \neq 0$ положим $T_1(t) = T_{1,1}(t)$ и $\xi_k^{(1)} = \xi_{k,1}^{(1)}$ ($k=1, 2, \dots, 4n$). Ясно, что $T_1(\xi_{2j-1}^{(1)}) = Q^2(q_j)$. Из $T^2(t_j) > Q^2(q_j)$ и $T_1(\xi_{2j-1}^{(1)}) \neq 0$ следует $\max_{[x_{j-1}, x_j]} T_1(t) > Q^2(q_j)$. Поэтому кроме $\xi_{2j-1}^{(1)}$

найдется еще одна точка η_2 в промежутке $(\xi_{2j-1}^{(1)}, \eta_1)$ такая, что $T_1(\eta_2) = T_1(\xi_{2j-1}^{(1)}) = Q^2(q_j)$. Выберем $\xi_{2j-1,1}^{(2)} = \frac{1}{3}(\xi_{2j-1}^{(1)} + \eta_2)$ и $\xi_{2j-1,2}^{(2)} = \frac{2}{3}(\xi_{2j-1}^{(1)} + \eta_2)$. Опять по теореме 3 из [3] для каждой точки $\xi_{2j-1,i}^{(2)}$ ($i=1, 2$) существует единственный тригонометрический многочлен

$T_{2,i}(t)$ ($i = 1, 2$) и единственная система из $4n-2$ точек $\xi_{2,1}^{(2)}, \xi_{3,1}^{(2)}, \dots, \xi_{2j-2,1}^{(2)}, \xi_{2j,1}^{(2)}, \dots, \xi_{4n,1}^{(2)}$ таких, что

$$t_1 = \xi_{1,1}^{(2)} < \xi_{2,1}^{(2)} < \dots < \xi_{2j-2,1}^{(2)} < \xi_{2j-1,1}^{(2)} < \xi_{2j,1}^{(2)} < \dots < \xi_{4n,1}^{(2)} < 2\pi,$$

$$T_{2,i}(\xi_{2k-1,1}^{(2)}) = T^2(t_k) = Q^2(q_k) \text{ при } k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, 2n,$$

$$T_{2,i}(\xi_{2k,1}^{(2)}) = T^2(x_k) = Q^2(y_k) \text{ при } k = 1, 2, \dots, 2n,$$

$$T_{2,i}(\xi_{2j-1,1}^{(2)}) = Q^2(q_j) \text{ и } T_{2,i}(\xi_{k,1}^{(2)}) = 0 \text{ при } k = 1, 2, \dots, 2j-2, 2j, \dots, 4n.$$

При этом хотя бы для одного из многочленов $T_{2,1}(t)$ и $T_{2,2}(t)$ имеем $T_{2,1}(\xi_{2j-1,1}^{(2)}) \neq 0$ или $T_{2,2}(\xi_{2j-1,2}^{(2)}) \neq 0$. Если при $i = i_0$ ($i_0 = 1, 2$) для точки $\xi_{2j-1,i_0}^{(2)}$, $T_{2,i_0}(\xi_{2j-1,i_0}^{(2)}) \neq 0$, то положим $T_2(t) = T_{2,i_0}(t)$ и $\xi_k^{(2)} = \xi_{k,i_0}^{(2)}$ ($k = 1, 2, \dots, 4n$). При $T_{2,1}(\xi_{2j-1,1}^{(2)}) \neq 0$ и $T_{2,2}(\xi_{2j-1,2}^{(2)}) \neq 0$ положим $T_2(t) = T_{2,1}(t)$ и $\xi_k^{(2)} = \xi_{k,1}^{(2)}$ ($k = 1, 2, \dots, 4n$).

Теперь покажем, что

$$\xi_2^{(1)} < \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(1)} < \xi_3^{(2)}, \dots, \xi_{2j-2}^{(1)} < \xi_{2j-2}^{(2)}; \xi_{2j}^{(2)} < \xi_{2j}^{(1)}, \dots, \xi_{4n}^{(2)} < \xi_{4n}^{(1)}. \quad (6)$$

Рассмотрим многочлен $T_2(t)$ как непрерывный образ многочлена $T_1(t)$, соответствующий непрерывному перемещению точки $\xi_{2j-1}^{(1)}$ в точку $\xi_{2j-1}^{(2)}$.

Сместим точку $\xi_{2j-1}^{(1)}$ в точку $\tilde{\xi}_{2j-1} \in (\xi_{2j-1}^{(1)}, \eta_1)$ и будем считать, что $|\xi_{2j-1}^{(1)} - \tilde{\xi}_{2j-1}|$ настолько мала, насколько нам понадобится. Для точки $\tilde{\xi}_{2j-1}$, по теореме 3 из [3] существует единственный тригонометрический многочлен $\tilde{T}(t)$ порядка $2n$ и единственная система из $4n-2$

точек $\tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \dots, \tilde{\xi}_{2j-2}, \tilde{\xi}_{2j}, \dots, \tilde{\xi}_{4n}$ такие, что

$$t_1 = \tilde{\xi}_1 < \tilde{\xi}_2 < \dots < \tilde{\xi}_{2j-2} < \tilde{\xi}_{2j-1} < \tilde{\xi}_{2j} < \dots < \tilde{\xi}_{4n} < 2\pi,$$

$$\tilde{T}(\tilde{\xi}_k) = T_1(\xi_k^{(1)}) \text{ при } k = 1, 2, \dots, 4n \text{ и } \tilde{T}'(\tilde{\xi}_k) = 0$$

$$\text{при } k = 1, 2, \dots, 2j-2, 2j, \dots, 4n.$$

Если $|\xi_k^{(1)} - \tilde{\xi}_k|$ при $k = 2, 3, \dots, 2j-2, 2j, \dots, 4n$ достаточно малы, то

$$\xi_2^{(1)} < \tilde{\xi}_2, \xi_3^{(1)} < \tilde{\xi}_3, \dots, \xi_{2j-2}^{(1)} < \tilde{\xi}_{2j-2}; \tilde{\xi}_{2j} < \xi_{2j}^{(1)}, \dots, \tilde{\xi}_{4n} < \xi_{4n}^{(1)}. \quad (7)$$

Действительно, если бы при некотором l для $1 < l < 2j-1$ $\tilde{\xi}_l \leq \xi_l^{(1)}$ или для $2j-1 < l \leq 4n$ $\tilde{\xi}_l > \xi_l^{(1)}$, то тригонометрический многочлен $T_1(t) - \tilde{T}(t)$ имел бы в окрестности точки $\xi_l^{(1)}$ два нуля. В окрестности же

каждого из $\xi_k^{(1)}$ ($k \neq l$) он имеет хотя бы один нуль, и, следовательно, общее число его нулей в $[0, 2\pi)$ было бы $\geq 4n + 2$, так что в

$[0, 2\pi)$ тригонометрический многочлен $T_1(t) - \tilde{T}(t) \neq 0$ порядка $2n$

имел бы $> 4l + 2$ нулей. Этим доказаны неравенства (6), так как неравенства (7) не могут нарушаться при $\xi_{2j-1}^{(1)} \rightarrow \bar{\xi}_{2j-1}$.

Ясно, что если продолжим процесс по той же схеме, то получим последовательность тригонометрических многочленов $\{T_m(t)\}$ с соответствующими точками экстремума $\{\xi_k^{(m)}\}$ ($k=2, 3, \dots, 2j-2, 2j, \dots, 4l$ и $\xi_1^{(m)} = t_1 = q_1$), которые при фиксированном k будут монотонными, ограниченными и

$$\xi_2^{(m-1)} < \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m-1)} < \xi_3^{(m)}, \dots, \xi_{2j-2}^{(m-1)} < \xi_{2j-2}^{(m)}; \xi_{2j}^{(m)} < \xi_{2j}^{(m-1)}, \dots, \xi_{4l}^{(m)} < \xi_{4l}^{(m-1)}, \quad (8)$$

следовательно, существуют пределы и $\lim \xi_{2k-1}^{(m)} = q_k$, $\lim \xi_{2k}^{(m)} = y_k$ при $m \rightarrow \infty$ ($k=1, 2, \dots, 2n$), а последовательность многочленов $\{T_m(t)\}$ сходится к $Q^2(t)$ равномерно относительно $t \in [0, 2\pi]$. Из приведенных рассуждений и из того, что неравенства (8) не могут нарушаться при $\xi_{2j-1}^{(m)} \rightarrow q_j$ следует справедливость неравенств (2) и (3).

Для доказательства утверждения (4) допустим, что одно из неравенств (4) нарушается, то есть при некотором фиксированном i (для определенности пусть $i < j$) имеет место неравенство

$$y_i - x_i \leq y_{i-1} - x_{i-1}. \quad (9)$$

Рассмотрим многочлен $F(t) = T(t) - Q(t + (y_{i-1} - x_{i-1}))$. Полагая для определенности $T(t_1) = Q(q_1) > 0$ и принимая во внимание (1), в точках $t_1, t_2, \dots, t_{2n} \in [0, 2\pi]$ экстремума многочлена $T(t)$ имеем $(-1)^{l-1} F(t_l) > 0$, а в точках $q_1, q_2, \dots, q_{l-1}, q_{l+1}, \dots, q_{2n} \in [0, 2\pi]$ экстремума многочлена $Q(t)$ имеем $(-1)^{l-1} F(q_l) \geq 0$ ($l=1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, 2n$). Отсюда следует, что в промежутке $[t_1, x_{i-1})$ многочлен $F(t)$ имеет $\geq i-1$ нулей, а в интервале $(x_i, 2\pi)$ имеет $\geq 2n-i$. Заметим, что x_i тоже является нулем $F(t)$. Из неравенства $F(t_l)F(q_l) < 0$, которое вытекает из (1) и (9), следует, что в промежутке $(x_{i-1}, x_i]$ лежит не менее одного нуля. Значит, тригонометрический многочлен $F(t)$ порядка n имеет $> 2n+1$ нулей в $[0, 2\pi)$, что невозможно, так как $F(t) \neq 0$, благодаря (1). Поэтому допущение (9) неверно. Таким же рассуждением можно установить неравенства (5). Теорема 1 доказана.

3°. Теорема 2. Если $f(t) \in C_{2r}$ и

$$E_p^*(f) = E_{p+1}^*(f) = \dots = E_{r-1}^*(f) > E_r^*(f), \quad (10)$$

то: а) многочлен $\bar{T}_r(t) = T_p^*(t) - T_r^*(t)$ имеет $2r$ простых нулей $z_1 < z_2 < \dots < z_{2r}$ в промежутке $[0, 2\pi)$; б) точки $\{u_k\}_{k=1}^{2r}$ максимального отклонения от нуля разности $f(t) - T_p^*(t) = R_p(t, f)$ перемежаются с нулями $\{z_l\}_{l=1}^{2r}$ многочлена $\bar{T}_r(t)$, то есть

$$0 \leq u_1 < z_1 < u_2 < z_2 < \dots < u_{2r} < z_{2r} < 2\pi \quad (11)$$

или

$$0 \leq z_1 < u_1 < z_2 < u_2 < \dots < z_{2r} < u_{2r} < 2\pi;$$

в) для точек $\{u_i\}_{i=1}^{2r}$ имеют место соотношения

$$u_i \in [z_i, z_{i+1}] \cap \{t: |T_r(t)| \geq h \|\bar{T}_r\|_{C_{2\pi}}\}$$

или

$$u_i \in [z_{i-1}, z_i] \cap \{t: |T_r(t)| > h \|\bar{T}_r\|_{C_{2\pi}}\},$$

где p и r ($r > p$) — целые положительные числа;

$$z_0 = 0, z_{2r+1} = 2\pi \text{ и } h = \frac{E_p^*(f) - E_r^*(f)}{E_p^*(f) + E_r^*(f)}.$$

Аналогичная теорема в случае приближения непериодической непрерывной функции алгебраическими многочленами доказана С. Пашковским [4].

Доказательство. Из (10) следует, что $T_p^*(t) \equiv T_{r-1}^*(t)$, поэтому разность $R_p(t, f)$ имеет столько точек максимального отклонения с последовательно противоположными знаками, сколько их имеет разность $f(t) - T_{r-1}^*(t)$, то есть $2r$. Из (10) следует также, что многочлен $\bar{T}_r(t)$

$$\bar{T}_r(t) = T_p^*(t) - T_r^*(t) = [T_p^*(t) - f(t)] - [T_r^*(t) - f(t)]$$

в точках $\{u_i\}_{i=1}^{2r}$ максимального отклонения от нуля разности $R_p(t, f)$ имеет тот же знак, что и разности

$$T_p^*(u_i) - f(u_i) = (-1)^i E_p^*(f) \quad (p = \pm 1; i = 1, 2, \dots, 2r).$$

Отсюда и из непрерывности $\bar{T}_r(t)$ на $[0, 2\pi]$ следует, что в каждом из $2r-1$ интервалов $(u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_{2r-1}, u_{2r})$ многочлен $\bar{T}_r(t)$ имеет по крайней мере один нуль. Поэтому $\bar{T}_r(t)$ в интервале $(u_1, u_{2r}) \subset (0, 2\pi)$ имеет не менее $2r-1$ нулей, не менее одного нуля в каждом из промежутков $(u_{2r} - 2\pi, u_1)$ и $(u_{2r}, u_1 + 2\pi)$, причем только один из них попадает в интервал $(0, 2\pi)$. Так как тригонометрический многочлен $\bar{T}_r(t)$ имеет порядок r , то его нули $\{z_i\}_{i=1}^{2r} \subset [0, 2\pi]$ являются простыми, кроме того они перемежаются с точками максимального отклонения $\{u_i\}_{i=1}^{2r}$, то есть справедливы неравенства (11). Утверждения а) и б) доказаны.

Далее из приведенных рассуждений можно заключить, что точки максимального отклонения u_i принадлежат интервалам (z_{i-1}, z_i) или (z_i, z_{i+1}) . Из определения точек u_i следует

$$|f(u_i) - T_p^*(u_i)| = E_p^*(f) \text{ и } |f(u_i) - T_r^*(u_i)| \leq E_r^*(f).$$

Кроме того, имеем

$$|\tilde{T}_r(u_i)| \geq |T_p^*(u_i) - f(u_i)| - |T_r^*(u_i) - f(u_i)| \geq E_p^*(f) - E_r^*(f) \\ (i = 1, 2, \dots, 2r).$$

Так как

$$\|\tilde{T}_r\| = \|T_p^* - T_r^*\| \leq \|T_p^* - f\| + \|f - T_r^*\| \leq E_p^*(f) + E_r^*(f),$$

то

$$\frac{|\tilde{T}_r(u_i)|}{\|\tilde{T}_r\|_{C_{2r}}} \geq \frac{E_p^*(f) - E_r^*(f)}{E_p^*(f) + E_r^*(f)} = h.$$

Отсюда вытекает утверждение в). Теорема 2 доказана.

Введем в рассмотрение класс $W_n(h)$ всех тригонометрических многочленов τ порядка n , обладающих следующими свойствами: многочлен $T(t) \in W_n(h)$, если

1) в $[0, 2\pi]$ он имеет $2n$ простых нулей $z_1 < z_2 < \dots < z_{2n}$;

2) $\min_{0 < t = 2\pi} \|T\|_{[z_l, z_{l+1}]} > h \|T\|_{[0, 2\pi]}$, где $0 < h \leq 1$;

$$z_0 = 0, z_{2n+1} = 2\pi.$$

Обозначим через $\tau(t, i)$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) многочлен из класса $W_n(h)$ такой, что $\tau(\tau_j^{(i)}, i) = \{(-1)^{2n-l} h$ при $l = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, 2n$; $(-1)^{2n-l}$ при $l = i\}$ и $\tau'(\tau_j^{(i)}, i) = 0$ при $j = 1, 2, \dots, 2n$, где $\tau_j^{(i)} \in [0, 2\pi]$ и $\tau_j^{(i)} = 0$. Существование и единственность таких многочленов вытекает из результатов работы [3].

Лемма 1. Для многочленов $\tau(t, i)$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) справедливы соотношения

$$\tau(t, i) = (-1)^{n-l} \tau(t + \alpha_i, n), \quad (12)$$

где α_i — постоянная, зависящая от i .

Доказательство. Заметим, что многочлен $\tau(t, i)$ имеет в промежутках $[0, \tau_j^{(i)})$ и $(\tau_j^{(i)}, 2\pi)$ соответственно i и $2n - i$ экстремумов. Выберем число α_i так, чтобы многочлен $\tau(t + \alpha_i, n)$ имел в $[0, \tau_j^{(i)})$ и $(\tau_j^{(i)}, 2\pi)$ соответственно i и $2n - i$ экстремумов и так, чтобы $\tau(2\pi, i) = (-1)^{n-l} \tau(2\pi + \alpha_i, n)$. Тогда многочлены $\tau(t, i)$ и $(-1)^{n-l} \tau(t + \alpha_i, n)$ при $i = 1, 2, \dots, 2n$ удовлетворяют условиям теоремы 3 из [3]. Поэтому они тождественны. Лемма доказана.

При $i = n$ многочлен $\tau(t, n)$ может быть записан в явном виде (см., например, [5] и [6]):

$$\tau(t, n) = h \cos 2 \operatorname{arccos} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\omega_n}{2}} = \frac{h}{2} \left[\left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\omega_n}{2}} + \right. \right.$$

$$+ \left[\sqrt{\left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\omega_n}{2}} - 1 \right)^2} + \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\omega_n}{2}} - \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\omega_n}{2}} - 1 \right)^2} \right) \right], \quad (13)$$

где $\omega_n \in (0, \pi)$ выбрано так, чтобы $\tau(\pi, n) = 1$, то есть из условия

$$\operatorname{tg}^{2n} \frac{\omega_n}{4} + \operatorname{ctg}^{2n} \frac{\omega_n}{4} = \frac{2}{h}. \quad (14)$$

Положим $d_n(T, h) = \max_{0 < t < 2\pi} |z_t - z_{t+1}|$ и $D_n(h) = \sup_{T(t) \in \mathcal{W}_n(h)} d_n(T, h)$,

где $z_1, z_2, \dots, z_{2n}$ — нули многочлена $T(t) \in \mathcal{W}_n(h)$ и $z_0 = 0, z_{2n+1} = 2\pi$.

Теорема 3. Для тригонометрических многочленов из класса $\mathcal{W}_n(h)$ $D_n(h)$ достигается на многочленах $|\tau(t, i)|_{i=1}^{2n}$ и равна

$$D_n(h) = 2 \left(\pi - \arccos \left(\cos^2 \frac{\omega_n}{2} + \sin^2 \frac{\omega_n}{2} \cos \frac{2n-1}{2n} \pi \right) \right). \quad (15)$$

Доказательство. Заметим, что верхняя грань $D_n(h)$ действительно достигается на некотором многочлене из класса $\mathcal{W}_n(h)$, так как коэффициенты многочленов, принадлежащих $\mathcal{W}_n(h)$ ограничены в совокупности, а корни этих многочленов — суть непрерывные функции их коэффициентов.

Покажем, что $D_n(h)$ не может достигаться на многочлене $T(t) \in \mathcal{W}_n(h)$, для которого $\|T\|_{C_{2\pi}} < 1$. Допустим от противного, что $D_n(h) = |z_i^T - z_{i+1}^T|$, где z_i^T и z_{i+1}^T — соседние нули многочлена $T(t)$. Пусть $(0 \leq) t_1 < t_2 < \dots < t_{2n} (< 2\pi)$ — нули производной $T'(t)$ многочлена $T(t)$ и пусть, для определенности, $T(t_{i+1}) > 0$, где $z_i^T < t_{i+1} < z_{i+1}^T$. Рассмотрим многочлен $S(t) \in \mathcal{W}_n(h)$ такой, что $S(s_j) = T(t_j)$ при $j = 1, 2, \dots, i, i+2, \dots, 2n$; $S(s_{i+1}) = 1$, где s_l — нули производной $S'(t)$, лежащие в промежутке $[0, 2\pi)$, и $s_1 = t_1$. Пусть z_i^S и $z_{i+1}^S \in [0, 2\pi)$ — соседние нули многочлена $S(t)$. Тогда из теоремы 1 имеем $z_i^S < z_i^T$ и $z_{i+1}^T < z_{i+1}^S$ или $D_n(h) = |z_i^T - z_{i+1}^T| < |z_i^S - z_{i+1}^S|$. Покажем, что $D_n(h)$ не может достигаться и на многочлене $Q(t) \equiv \tau(t, i)$ из $\mathcal{W}_n(h)$. Допустим от противного, что $D_n(h)$ достигается на многочлене $Q(t) \equiv \tau(t, i)$, для нулей z_l^Q и z_{l+1}^Q , то есть $D_n(h) = |z_l^Q - z_{l+1}^Q|$. Раз $Q(t) \equiv \tau(t, i)$, то справедливо хотя бы одно из неравенств $Q(q_l) \geq \tau(\tau_l^i, i)$ ($l = 1, 2, \dots, 2n$), где $q_l \in [0, 2\pi)$ и $\tau_l^i \in [0, 2\pi)$ — соответственно точки экстремумов многочлена $Q(t)$ и $\tau(t, i)$.

Для определенности пусть $Q(q_l) > \tau(\tau_l^i, i) > 0$. Тогда из теоремы 1 в силу неравенств (3) имеем $z_i^Q < z_l^Q < z_{l+1}^Q < z_{i+1}^Q$ или $|z_l^Q - z_{l+1}^Q| < |z_l^Q - z_{i+1}^Q|$, где z_i^Q и z_{i+1}^Q — i и $(i+1)$ — нули многочлена $\tau(t, i)$ из $[0, 2\pi)$. Величина $D_n(h)$ определяется непосредственными вычислениями. Теорема 3 доказана.

4°. Пусть последовательность чисел $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($h_n \in (0, 1)$ при $n = 1, 2, \dots$) такова, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{h_n} = 1. \quad (16)$$

Далее, пусть $\{W_n(h_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность классов тригонометрических многочленов, соответствующая последовательности чисел $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, и $\{T_n(t)\}_{n=1}^{\infty} = \tau$ — последовательность многочленов таких, что при любом $n = 1, 2, \dots$, $T_n(t) \in W_n(h_n)$. Множество нулей многочлена $T_n(t) \in W_n(h_n)$, расположенных в промежутке $[0, 2\pi)$, обозначим через Z_n и положим $Z_\tau = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Назовем Z_τ множеством нулей последовательности многочленов $\tau = \{T_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 4. *Множество нулей Z_τ последовательности тригонометрических многочленов τ всюду плотно на отрезке $[0, 2\pi]$.*

Доказательство. По определению $D_n(h_n)$ для нулей $(0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{2n} < 2\pi)$ многочлена $T_n(t) \in \tau$ имеем $|z_i - z_{i+1}| \leq D_n(h_n)$ ($i = 0, 1, \dots, 2n$), где $z_0 = 0$, $z_{2n+1} = 2\pi$. Далее из (13) и (16) вытекает, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \pi$. Отсюда и из равенства (15) следует, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} D_n(h_n) = 0$.

Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_i - z_{i+1}| = 0$ ($i = 0, 1, \dots, 2n$). Теорема 4 доказана.

Лемма 2. *Для последовательности $\{E_n^*(f)\}_{n=0}^{\infty}$ наилучших приближений непрерывной 2π -периодической функции $f(t)$ тригонометрическими многочленами, верно следующее предельное равенство:*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{E_{n-1}^*(f) - E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f) + E_n^*(f)}} = 1. \quad (17)$$

Доказательство. Ясно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{n-1}^*(f) - E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f) + E_n^*(f)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{n-1}^*(f) - E_n^*(f)}{2E_{n-1}^*(f)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f)}\right). \quad (18)$$

Воспользуемся следующей теоремой из анализа (см., например, [7]): если $\{u_n\}$ — положительная монотонно возрастающая последователь-

ность, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ сходится при условии ограниченности

этой последовательности и расходится — в противном случае. Из нее следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f)}\right)$ расходится. Отсюда и из (18) вы-

текает, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{E_{n-1}^*(f) - E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f) + E_n^*(f)}} \geq 1. \quad (19)$$

С другой стороны, так как $\frac{E_{n-1}^*(f) - E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f) + E_n^*(f)} < 1$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{E_{n-1}^*(f) - E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f) + E_n^*(f)}} \leq 1. \quad (20)$$

Из сопоставления неравенств (19) и (20) получим (17). Лемма доказана.

Теорема 5. Если $f(t) \in C_{2\pi}$, то множество точек максимального отклонения $M^*(f)$ функции $f(t)$ всюду плотно на отрезке $[0, 2\pi]$.

Доказательство. Заметим, что многочлен $\bar{T}_{n_{k+1}}(t) = T_{n_k}^*(t) - T_{n_{k+1}}^*(t)$ принадлежит классу $W_{n_{k+1}}(h_{n_{k+1}})$, где

$$h_{n_{k+1}} = \frac{E_{n_k}^*(f) - E_{n_{k+1}}^*(f)}{E_{n_k}^*(f) + E_{n_{k+1}}^*(f)}$$

при $k = 0, 1, \dots$; $E_{n_0}^*(f) = E_0^*(f)$. Так как $f(t) \in C_{2\pi}$, то по лемме 2 $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_{k+1}]{h_{n_{k+1}}} = 1$. Следовательно, по теореме 4 множество нулей Z_k

последовательности многочленов $\{\bar{T}_{n_{k+1}}(t)\}_{k=0}^\infty$ всюду плотно на отрезке $[0, 2\pi]$. В силу п. б) теоремы 2 нули многочленов $\bar{T}_{n_{k+1}}(t)$ перемежаются с точками максимального отклонения от нуля разностей $f(t) - T_{n_k}^*(t)$ при любом $k=1, 2, \dots$, и так как множество нулей Z

последовательности $\{\bar{T}_{n_{k+1}}(t)\}_{k=0}^\infty$ всюду плотно на отрезке $[0, 2\pi]$, то отсюда следует, что на отрезке $[0, 2\pi]$ всюду плотно множество точек максимального отклонения $M^*(f)$ функции $f(t) \in C_{2\pi}$. Теорема доказана.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую признательность В. С. Виденскому за внимание к этой работе.

Чечено-ингушский

государственный университет

Поступила 4.VI.1973

Վ. Գ. Վերնիսկի. Անընդհատ ֆունկցիաների լավագույն մոտարկման դեպքում կետերի մաքսիմալ շեղման խտության մասին (ամփոփում)

Տվյալ աշխատանքում դիտարկվում են անընդհատ 2π -պարբերական ֆունկցիայի նոսնակյունայափական բազմանդամներով լավագույն մոտարկման ժամանակ մաքսիմալ շեղման կետերի բաշխման հարցեր:

Մասնավորապես ապացուցված է, որ անընդհատ 2π -պարբերական $f(t)$ ֆունկցիայի մաքսիմալ շեղման կետերի $M^*(f)$ բազմությունը ամենուրեք խիտ է $[0, 2\pi]$ հատվածում:

V. G. VERDIEV. *On the density of points of maximal deviation under best approximation of the continuous functions* (summary)

In this work some questions connected with distribution of the points of maximal deviation under best Chebyshev approximation of a continuous periodic function by trigonometrical polynomials are examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Кадец. О расположении точек максимального отклонения при аппроксимации непрерывных функций многочленами, УМН, XV, 1 (91), 1960.
2. В. Г. Вердиев. О расположении точек максимального отклонения при чебышевском приближении непрерывных функций, ДАН СССР, 186, № 4, 1969, 747—749.
3. В. С. Виденский. Существование и единственность решения одной интерполяционной задачи, Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций, Сборник научных трудов Ленингр. Механ. ин-та, № 50, 1966, 29—41.
4. С. Ф. Пашковский. О расположении (ϵ) -точек полиномов наилучшего приближения, ДАН СССР, 117, № 4, 1957, 576—577.
5. В. С. Виденский. Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем, чем период, ДАН СССР, 130, № 1, 1960.
6. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1954.
7. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, М., Изд. „Наука“, 1966.