ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 5, 1975 Математика

Р. Р. БЕДЖАНЯН

О БЫСТРОМ ПЕРЕМЕШИВАНИИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Согласно бескоординатной концепции А. Н. Колмогорова мы будем рассматривать бесконечномерный случайный стационарный процесс как пару $\{\mathrm{H}, U^t\}$, где H—сепарабельное подпространство некоторого гильбертова пространства с группой унитарных операторов U^t, ограничиваясь случаем дискретного времени $t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ [3]. Пусть $H_a^b(\mathrm{H})$ означает замкнутую в гильбертовом пространстве оболочку элементов $U^t x$, $x \in \mathrm{H}$, $a \leqslant t \leqslant b$. Процесс $\{\mathrm{H}, U^t\}$ называется вполне регулярным, если его коэффициент регулярности

$$\rho(\tau, \mathrm{H}) = \rho(\tau) = \sup_{\xi, \eta} |(\xi, \eta)| \underset{\tau \to \infty}{\to} 0, \tag{1}$$

где sup берется по всем $\xi \in H_{-\infty}^0(\mathrm{H})$, $\eta \in H_\tau^\infty(\mathrm{H})$, таким, что $\|\xi\| = 1$, $\|\eta\| = 1$. Мы допустим, что имеется так называемая спектральная плотность, т. е. измеримая положительная операторнозначная функция $f(\lambda)$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$, такая, что равенство

$$(U^t x_1, x_2) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} (f(\lambda)\, x_1, x_2)\, d\lambda$$

выполняется для всех x_1, x_2 из H и $t \in (-\infty, \infty)$. Обозначим через $\mathrm{L}^2(\mathrm{H})$ гильбертово пространство всех измеримых вектор-функций $x(\lambda)$, определенных на отрезке $[-\pi, \pi]$ с отождествленными концами и $\int_{-\pi}^{\pi} \|x(\lambda)\|^2 d\lambda \leqslant \infty$, со скалярным произведением

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (x_1(\lambda), x_2(\lambda))\, d\lambda,$$

$f^{1/2}\mathrm{H}$ — подпространство в $\mathrm{L}^2(\mathrm{H})$, образованное функциями $x(\lambda) \in \in f^{1/2}(\lambda)\, x$, $x \in \mathrm{H}$, а $f^{1/2}(\lambda)$ — положительный квадратный корень от $f(\lambda)$. Пара $\{f^{1/2}\mathrm{H}, e^{i\lambda t}\}$, где $e^{i\lambda t}$ означает унитарный оператор умножения, образует стационарный процесс, изометричный процессу $\{\mathrm{H}, U^t\}$. Обозначим далее $H^2(\mathrm{H})$ подпространство $\mathrm{L}^2(\mathrm{H})$, порожденное элементами $\{e^{i\lambda t} x \colon x \in \mathrm{H},\ t = 0, 1, 2, \cdots\}$, и $K^2(\mathrm{H})$—подпространство $\mathrm{L}^2(\mathrm{H})$, порожденное элементами $\{e^{i\lambda t} x \colon x \in \mathrm{H},\ t = 0, -1, -2, \cdots\}$. Легко получить следующий вид коэффициента регулярности:

$$\rho(\tau)=\rho(\tau, f) = \sup \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} (f(\lambda)\varphi(\lambda), \psi(\lambda))\, d\lambda \right|, \tag{2}$$

где $\varphi(\lambda) \in H^2(\mathrm{H})$, $\psi(\lambda) \in K^2(\mathrm{H})$ и удовлетворяют условиям нормировки

$$\langle \varphi, \varphi \rangle_f = \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda)\varphi(\lambda), \varphi(\lambda))\, d\lambda = 1,$$

$$\langle \psi, \psi \rangle_f = \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda)\psi(\lambda), \psi(\lambda))\, d\lambda = 1, \tag{3}$$

$\rho(\tau)$ не изменится, если sup взять по каким-либо плотным в $H^2(\mathrm{H})$ и $K^2(\mathrm{H})$ подмножествам, в частности, по всем полиномам

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} e^{i\lambda k} x_k \quad \text{и} \quad \psi(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} e^{i\lambda k} z_k, \ x_k \text{ и } z_k \in \mathrm{H}.$$

В настоящей статье мы дадим описание некоторых вполне регулярных процессов, коэффициенты регулярности которых убывают с различной скоростью. К сожалению, существует разрыв между необходимыми и достаточными условиями. Исчерпывающие характеристики спектральных плотностей конечномерных случайных процессов, имеющих различную скорость убывания, получены И. А. Ибрагимовым [1], [2].

Прежде чем сформулировать первую теорему, заметим, что операторная функция $W(\lambda)$ называется аналитической в области D, если для произвольных x и z из Н скалярная функция $(W(\lambda)x, z)$ является аналитической в D. Пусть $B(\mathrm{H})$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов в Н. Операторными полиномами будем называть полиномы $P_{nm}(\lambda) = \sum_{k=-n}^{m} A_k e^{i\lambda k}$, где $A_k \in B(\mathrm{H})$.

Теорема 1. *Пусть* $\{\mathrm{H}, U^t\}$ *— стационарный случайный процесс со спектральной плотностью* $f(\lambda)$. *Для того чтобы*

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} [\rho(\tau)]^{1/\tau} \leqslant e^{-\delta}, \ \delta>0, \tag{4}$$

необходимо, чтобы $f(\lambda)$ *допускала аналитическое продолжение в полосу значений* $-\delta < \mathrm{Im}\, z < \delta$ *комплексного переменного* $z = \lambda + i\mu$. *Если* $(f(\lambda)x, x) \geqslant m(x, x)$, $m>0$, *для произвольного* $x \in \mathrm{H}$, *то это условие является также достаточным.*

Необходимость. Из представления бесконечномерного процесса следует, что вместе с процессом $\{\mathrm{H}, U^t\}$ вполне регулярен процесс $\{\mathrm{H}', V^t\}$, где H' — произвольное подпространство Н, а V^t — ограничение оператора U^t на H', причем H' является инвариантным подпространством оператора U^t (см. [3]). Очевидно, что удовлетворяется неравенство $\rho(\tau, H') \leqslant \rho(\tau, H)$. Выбрав, в частности, за H' подпространство, образованное элементами x и $z \in H$, мы получим согласно конечномерным результатам И. А. Ибрагимова [2], что $(f(\lambda)x, z)$ аналитически продолжается в полосу $-\delta < \operatorname{Im} z < \delta$.

Достаточность. Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть для каждого* $\lambda \in [-\pi, \pi]$ $\varphi_\lambda(x, z)$ *является билинейным непрерывным функционалом в гильбертовом пространстве* H. *Если для произвольных* x *и* z, *принадлежащих* H, $\sup\limits_{\lambda} |\varphi_\lambda(x, z)|$ *ограничен, то норма функционала* $\|\varphi_\lambda\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ \|z\|=1}} |\varphi_\lambda(x, z)|$ *ограничена равномерно относительно* λ.

В самом деле, $\psi_\lambda(x) = |\varphi_\lambda(x, z)|$ при фиксированном $z = y$ является непрерывным положительно-определенным полуаддитивным функционалом, т. е. удовлетворяет условиям

$$\psi_\lambda(x + y) \leqslant \psi_\lambda(x) + \psi_\lambda(y),$$

$$\psi_\lambda(\alpha x) = \alpha\, \psi_\lambda(x), \quad \alpha \geqslant 0.$$

Согласно принципу равномерной ограниченности ([4], стр. 65) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|\varphi_\lambda(x, y)| < \varepsilon$ лишь $\|x\| < \delta$. Следовательно, для каждого z $|\varphi_\lambda(x, z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$ для всех $\|x\| \leqslant \delta$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$. Повторно применив этот принцип, получим $|\varphi_\lambda(x, z)| \leqslant M$ для произвольных $\|x\| \leqslant 1$, $\|z\| \leqslant 1$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$.

Лемма 2. *Если спектральная функция* $f(\lambda)$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$ *непрерывна в равномерной топологии пространства* B (H) *и удовлетворяет условию* $(f(\lambda)x, x) \geqslant m(x, x)$, $m > 0$, *то существующий стационарный процесс вполне регулярен, причем*

$$\rho(\tau) \leqslant \frac{1}{m} E_{\tau-1}(f), \tag{5}$$

где $E_{\tau-1}(f)$ — *величина наилучшего приближения к* $f(\lambda)$ *операторными полиномами степени* $\tau - 1$.

Действительно, если $P_{\tau-1}(\lambda)$ — полином степени не выше $\tau-1$, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} (P_{\tau-1}(\lambda)\, \varphi(\lambda),\, \psi(\lambda))\, d\lambda = 0.$$

Следовательно

$$\rho(\tau) = \sup_{\substack{<\varphi,\, \varphi>_f < 1 \\ <\psi,\, \psi>_f < 1}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} (f(\lambda)\, \varphi(\lambda),\, \psi(\lambda))\, d\lambda \right| =$$

$$= \sup \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} ([f(\lambda) - P_{\tau-1}(\lambda)]\, \varphi(\lambda),\, \psi(\lambda))\, d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant E_{\lambda-1}(f) \sup_{\substack{\langle\varphi,\,\varphi\rangle_f<1\\ \langle\psi,\,\psi\rangle_f<1}} \left\{ \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(\lambda), \varphi(\lambda))\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\psi(\lambda), \psi(\lambda))\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \tag{6}$$

Но из ограниченности снизу операторов $f(\lambda)$ следует неравенство

$$\int (f(\lambda)\, \varphi(\lambda), \varphi(\lambda)), d\lambda \geqslant m \int (\varphi(\lambda), \varphi(\lambda))\, d\lambda.$$

Подставив его в (6), получим требуемое неравенство (5).

Теперь перейдем к прямому доказательству достаточности. Пусть $f(\lambda)$ аналитически продолжима в полосу $-\delta < \operatorname{Im} z < \delta$. Очевидно, что периодическая функция $(f(\lambda)\, x, z)$ ограничена в любой полосе $-\delta' < \operatorname{Im} z < \delta'$, $\delta' < \delta$. Следовательно, по лемме 1 $\|f(\lambda)\| \leqslant M$ для произвольного $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Пусть

$$f_k(x, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} (f(\lambda)\, x, z)\, d\lambda$$

будет k-ым коэффициентом Фурье для функции $(f(\lambda)\, x, z)$. Очевидно, что $f_k(x, z)$ является ограниченным билинейным функционалом, поэтому представима в виде $f_k(x, z) = (F_k\, x, z)$, где $F_k \in B(H)$. По теореме Лебега ([5], стр. 279) конечная сумма ряда Фурье $S_\tau(x, z) = \sum_{k=-\tau}^{\tau} e^{i\lambda k} f_k, (x, z)$ удовлетворяет неравенству

$$|(f(\lambda)\, x, z) - S_\tau(x, z)| < C E_\tau \{(f(\lambda)\, x, z)\} \ln \tau,$$

где C — абсолютная постоянная, не зависящая от функции. По теореме Бернштейна [6] $E_\tau \{(f(\lambda)\, x, z)\} \leqslant e^{-\delta(1-\varepsilon)\tau}$ для произвольного $0 < \varepsilon < 1$ и достаточно больших τ. Следовательно, билинейный функционал

$$\ln^{-1}\tau \cdot e^{\delta(1-\varepsilon)\tau} \left(\left[f(\lambda) - \sum_{k=-\tau}^{\tau} e^{i\lambda k} F_k \right] x, z \right) =$$

$$= \frac{(f(\lambda)\, x, z) - \sum_{k=-\tau}^{\tau} e^{i\lambda k} f_k(x, z)}{\ln \tau \cdot e^{-\delta(1-\varepsilon)\tau}}$$

удовлетворяет условию леммы 1. Отсюда вытекает неравенство

$$E_\tau(f) \leqslant \left\| f(\lambda) - \sum_{k=-\tau}^{\tau} e^{i\lambda k} F_k \right\| \leqslant M e^{-\delta(1-\varepsilon)\tau} \ln \tau. \tag{7}$$

Из неравенств (5) и (7) ввиду произвольности ε следует неравенство (4). Что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть* $\{H, U^t\}$ — *стационарный процесс со спектральной плотностью* $f(\lambda)$. *Для того чтобы*

$$\rho(\tau) = O(\tau^{-r-\beta}), \ 0 < \beta < 1$$

необходимо, чтобы спектральная плотность была r раза дифференцируема и r-ая производная удовлетворяла условию Гёльдера порядка β. Это и достаточно, если $f(\lambda)$ удовлетворяет еще условию $(f(\lambda)\,x, x) \geqslant m\,(x, x)$, $m > 0$.

Необходимость. Пусть x — произвольный элемент H, тогда функция $(f(\lambda)\,x, x)$ является спектральной плотностью одномерного процесса и согласно результатам И. А. Ибрагимова ограничена [2]. А так как $|f(\lambda)\,x, z)| \leqslant (f(\lambda)\,x, x)^{1/2}\,(f(\lambda)\,z, z)^{1/2}$, то из леммы 1 следует, что $\|f(\lambda)\| \leqslant M$ для произвольного λ. Обозначим через

$$\sigma_N(f(\lambda, x, z); [N\theta]; \lambda) = \frac{1}{[N\theta]+1}\sum_{\nu=0}^{[N\theta]} S_{N-\nu}(\lambda), \ 0 < \theta < 1,$$

усеченную сумму Фейера для функции $f(\lambda, x, z) = (f(\lambda)\,x, z)$, где $S_n(\lambda)$ уже введенная в предыдущей теореме конечная сумма ряда Фурье. Тогда имеет место неравенство ([1], стр. 256):

$$\max_\lambda |(f(\lambda)\,x, x) - \sigma_\tau(f(\lambda, x, x); [\tau\theta]; \lambda)| \leqslant \frac{33\,M}{\theta^2}\sum_{k=0}^{\infty} \rho(2^k[\tau(1-\theta)]).$$

Но так как по условию теоремы $\rho(\tau) = O(\tau^{-r-\beta})$, то имеет место неравенство

$$\max_\lambda |(f(\lambda)\,x, x) - \sigma_\tau(f(\lambda, x, x); [\tau\theta]; \lambda)| < \mathrm{const}\cdot\tau^{-r-\beta}.$$

Заметив, что σ_τ — билинейный ограниченный функционал, легко получить

$$E_\tau(f) \leqslant \left\| f(\lambda) - \frac{1}{[\tau\theta]+1}\sum_{\nu=0}^{[\tau\theta]}\sum_{k=0}^{\tau-\nu} e^{i\lambda k} F_k \right\| = O(\tau^{-r-\beta}). \tag{8}$$

Пусть теперь $P_{2^n}(\lambda)$ — операторные полиномы наилучшего приближения или введенные выше конечные суммы Фейера. Легко проверить, что операторные полиномы имеют производные любого порядка p и удовлетворяют неравенству Бернштейна

$$\|P_{2^k}^{(p)}(\lambda)\| \leqslant 2^k \|P_{2^k}^{(p-1)}(\lambda)\|. \tag{9}$$

Составим ряд

$$P_1^{(p)}(\lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} P_{2^{k+1}}^{(p)}(\lambda) - P_{2^k}^{(p)}(\lambda) \ (p = 0, 1, \cdots, r)$$

и, применяя последовательно неравенства (9) и (8), оценим k-ый член этого ряда

$$\|P_{2^k}^{(p)}(\lambda) - P_{2^{k-1}}^{(p)}(\lambda)\| < \|P_{2^k}(\lambda) - P_{2^{k-1}}(\lambda)\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\cdot 2^{kp}\cdot E_{2^{k-1}}(f) \leqslant C\cdot 2^{-k(r+\beta-p)}, \tag{10}$$

где C — некоторая постоянная величина. Теперь ясно, что для любого $p \leqslant r$ выше приведенный ряд сходится равномерно к некоторой непрерывной функции $S_p(\lambda)$, причем $S_0(\lambda)$ почти всюду равен $f(\lambda)$. С другой стороны из равномерной сходимости следует, что

$$\int S_p(\lambda)\,d\lambda = \int P_1^{(p)}(\lambda)\,d\lambda + \sum_{k=0}^{\infty}\int \left(P_{2^k+1}^{(p)}(\lambda) - P_{2^k}^{(p)}(\lambda)\right)d\lambda = S_{p-1}(\lambda).$$

Независимая постоянная интегрирования выбирается равной 0 для $p = 2, 3, \cdots, r$. Следовательно $f(\lambda)$ почти везде совпадает с функцией $S_0(\lambda)$, имеющей r производных. Остается проверить, что $S_r(\lambda)$ удовлетворяет условию Гельдера порядка β, а это легко следует из цепи неравенств

$$\left\| S_r(\lambda) - S_r\left(\lambda + \frac{1}{n}\right)\right\| \leqslant \| S_r(\lambda) - P_{2^m}^{(r)}(\lambda)\| + \left\| P_{2^m}^{(r)}(\lambda) - P_{2^m}^{(r)}\left(\lambda + \frac{1}{n}\right)\right\| +$$
$$+ \left\| P_{2^m}^{(r)}\left(\lambda + \frac{1}{n}\right) - S_r\left(\lambda + \frac{1}{n}\right)\right\| \leqslant C_1 2^{-m\beta} + C_2\frac{1}{n} + C_3 2^{-m\beta},$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые постоянные. Выбрав m так, чтобы $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, мы получим требуемое неравенство.

Достаточность. Пусть $g(\lambda)$ является непрерывной периодической операторной функцией на отрезке $[-\pi, \pi]$. Возьмем ядро Джексона $F_m(u) = \left[\dfrac{\sin mu}{m \sin u}\right]^4$ и построим интеграл

$$J_m(\lambda, x, z) = h_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g(\lambda + 2u)\,x, z)\,F_m(u)\,du =$$

$$= h_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g(\nu)\,x, z)\,F_m\left(\frac{1}{2}(\nu - \lambda)\right)d\lambda, \tag{11}$$

где $h_m^{-1} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F_m(u)\,du$. Так как $\|g(\lambda)\|$ равномерно ограничена, то нетрудно заметить, что $J_m(\lambda, x, z)$ является ограниченным билинейным функционалом в H. А оператор $J_m(\lambda)$, соответствующий этому билинейному функционалу в представлении $J_m(\lambda, x, z) = (J_m(\lambda)\,x, z)$, является операторным полиномом степени $2m-2$, то есть имеет вид $J_m(\lambda) = \sum\limits_{k=-2m+2}^{2m-2} A_k e^{i\lambda k}$. Допустим сначала, что $g(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\lambda} \| g(\lambda + u) - g(\lambda) \| \leqslant K |u|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{12}$$

Тогда

$$\| J_m(\lambda) - g(\lambda) \| \leqslant \left| h_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \| g(\lambda + 2u) - g(\lambda) \| \, F_m(2u)\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2h_m K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |u|^{\alpha} F_m(u)\, du = 4K h_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{\alpha} F_m(u)\, du. \tag{13}$$

Используя неравенства $0 < \sin u < u$ и $\frac{1}{\sin u} < \frac{\pi}{2u}$, при $0 < u < \frac{\pi}{2}$ и обозначив значения интегралов через

$$c_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 t}{t^4}\, dt, \quad c_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3}\, dt, \quad c_3 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4}\, dt, \tag{14}$$

мы можем получить следующие оценки:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F_m(u)\, du \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin mu}{mu} \right)^4 du = \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}m} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt \geqslant \frac{c_1}{m}, \tag{15}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{\alpha} F_m(u)\, du \leqslant \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin mu}{mu} \right)^4 u^{\alpha} du = \frac{1}{m^{1+\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}m} \frac{\sin^4 t}{t^{4-\alpha}}\, dt <$$

$$< \frac{1}{m^{1+\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^{4-\alpha}} dt \leqslant \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{c_1 + c_2}{m^{1+\alpha}}. \tag{16}$$

Подставляя (15) и (16) в (13), получим

$$\| J_m(\lambda) - g(\lambda) \| \leqslant \frac{\pi^4}{8} \frac{c_1 + c_2}{c_1} \frac{K}{m^{\alpha}} \leqslant C \frac{K}{m^{\alpha}}. \tag{17}$$

Теперь заметим, что если $g(\lambda)$ является непрерывной производной от некоторой периодической функции $G(\lambda)$, то свободный член A_0 в разложении $J_m(\lambda) = \sum_{k=-2m+2}^{2m-2} A_k e^{i\lambda k}$ равен нулю, так как

$$A_0 = \text{const} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\, d\lambda = \text{const} \cdot (G(\pi) - G(-\pi)) = 0 \quad ([8]).$$

В этом случае неопределенный интеграл от $J_m(\lambda)$ опять является полиномом того же вида и той же степени, если произвольную постоянную интегрирования принять равной нулю.

Теперь $f^{(r)}(\lambda)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем β, поэтому из соотношения (18) следует

$$\sup_{\lambda}\|f^{(r)}(\lambda)-J_m(\lambda, f^{(r)})\|\leqslant C\frac{K}{m^{\beta}}=K'. \tag{18}$$

Обозначим

$$r(\lambda)=f^{(r-1)}(\lambda)-\int J_m(\lambda, f^{(r)})\,d\lambda,$$

тогда $r(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\|r(\lambda+u)-r(\lambda)\|\leqslant\sup_{\lambda}\|r'(\lambda)\|\cdot|u|=K'\cdot|u|.$$

В силу (12) и (17) существует полином $J_m(\lambda, r)$ такой, что

$$\left\|f^{r-1}(\lambda)-\int J_m(\lambda, f^{(r)})\,d\lambda-J_m(\lambda, r)\right\|\leqslant C\frac{K'}{m}=\frac{C^2K}{m^{1+\beta}}. \tag{19}$$

Так как $\int J_m(\lambda, f^{(r)})\,d\lambda$ также является полиномом степени $2m-2$ со свободным членом, равным нулю, то, применив этот процесс r раз, мы получим соотношение

$$\|f(\lambda)-P_{2m-2}(\lambda)\|\leqslant\frac{C^{r+1}K}{m^{r+\beta}}, \tag{20}$$

то есть

$$E_{2m-2}(f)\leqslant\frac{C^{r+1}\cdot K}{m^{r+\beta}}. \tag{21}$$

Поскольку

$$E_{2m-1}(f)\leqslant E_{2m-2}(f)\leqslant\frac{C^{r+1}\cdot K}{m^{r+\beta}},$$

то очевидно, что для любого n имеет место соотношение

$$E_n(f)=O(n^{r+\beta}).$$

Теперь остается применить лемму 2, чтобы завершить доказательство теоремы 2.

Из теоремы 1 вытекает следующее следствие: для того чтобы $\rho(\tau)=O(e^{-\tau\delta})$ при произвольном $\delta>0$, необходимо, чтобы $f(\lambda)$ было целой операторной функцией комплексного переменного, а при условии $(f(\lambda)x, x)\geqslant m\cdot(x, x)$, $m>0$, это условие является и достаточным.

Следует заметить, что нахождение необходимого и достаточного условия в бесконечномерном случае, наверное, будет нелегким делом, ибо даже в конечномерном случае условие полной регулярности получается довольно сложным методом и непосредственному обобщению не поддается. А то, что условие аналитичности недостаточно для вполне непрерывности непосредственно видно из примера, указанного И. А. Ибрагимовым.

Пусть бесконечномерный стационарный случайный процесс $\xi(t) = \{\xi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ состоит из независимых процессов $\xi_n(t)$ со спектральными плотностями $f_n(\lambda) = c_n |1 - e^{-i\lambda}|^{2n}$, $c_n = e^{-n^2}$, и математическими ожиданиями $M\xi_n(t) = 0$. Тогда бесконечномерная матрица

$$f(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & f_2(\lambda) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & f_3(\lambda) & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

является оператором в гильбертовом пространстве $L^2(l_2)$, а процесс $\xi(t)$ изометричен процессу $\{f^{1/2} l_2, e^{i\lambda t}\}$. Если $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $z = \{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ являются произвольными элементами гильбертова пространства l_2, то функция $(f(\lambda)x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_k z_k |1 - e^{i\lambda}|^{2k}$ будет целой аналитической функцией в комплексной плоскости $\zeta = \lambda + i\mu$, так как

$$E_{n-1}(f) \leqslant \left| \sum_{k=n}^{\infty} c_k x_k z_k |1 - e^{i\lambda}|^{2k} \right| \leqslant \|x\|_2 \cdot \|z\|_2 \cdot e^{-n^2 + n \ln 4} = O(e^{-n^2}).$$

Следовательно $f(\lambda)$ является целой операторной функцией.

С другой стороны, докажем, что условие вполне регулярности не выполняется. С этой целью рассмотрим функции

$$\varphi_n(\lambda) = \{x_{nk}(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}, \quad x_{nk}(\lambda) = \frac{\delta_{nk}}{\sqrt{c_n}\,(1 - e^{i\lambda})^n},$$

$$\psi_n(\lambda) = \{z_{nk}(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}, \quad z_{nk}(\lambda) = \frac{\delta_{nk}}{\sqrt{c_n}\,(1 - e^{i\lambda})^n},$$

где δ_{nk} — символ Кронекера. Очевидно, что $\varphi_n(\lambda) \in H^2(l_2)$, а $\psi(\lambda) \in K^2(l_2)$, причем их нормы не превосходят единицы

$$<\varphi_n, \varphi_n>_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda)\varphi_n(\lambda), \varphi_n(\lambda))\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{c_n |1 - e^{i\lambda}|^{2n}} c_n |1 - e^{i\lambda}|^{2n}\, d\lambda = 1,$$

$$<\psi_n, \psi_n>_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda)\psi_n(\lambda), \psi_n(\lambda))\, d\lambda =$$

$$
=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{c_n\,|1-e^{i\lambda}|^{2n}}\,c_n|1-e^{i\lambda}|^{2n}\,d\lambda=1.
$$

Тогда

$$
\rho(n)\geqslant\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}\left(f(\lambda)\,\varphi_n(\lambda),\ \psi_n(\lambda)\right)d\lambda\right|=
$$

$$
=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}\cdot\frac{1}{c_n\,(1-e^{i\lambda})^{2n}}\cdot c_n\,(1-e^{i\lambda}|^{2n}\,d\lambda\right|=1,
$$

что и требовалось доказать

Автор благодарен профессору И. А. Ибрагимову за предложенную тему и постоянную помощь в работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 18.XII.1973

Ռ. Ռ. ԲԵՋԱՆՅԱՆ. Դիսկրետ ժամանակով անվերջ չափանի պատահական ստացիոնար պրոցեսների արագ խառնման մասին *(ամփոփում)*

Սահմանվում են հայտանիշներ, որոնց բավարարման դեպքում անվերջ չափանի պատահական ստացիոնար պրոցեսի ռեգուլյարության գործակիցը $\rho(\tau)$ *ձգտում է զրոյի երբ* $\tau\to\infty$ $e^{-\delta\tau}$ *կամ* $\tau^{-r-\beta}$ *արագությամբ։*

R. R. BEDJANIAN. *On rapid mixing of infinite dimensional rundom stationary processes with discrete time* (summary)

The analitic criteria are given under which the coefficient of regularity of infinite demensional stationary stochastic process $\rho(\tau)$ tends to zero as $e^{-\delta\tau}$ or $\tau^{-r-\beta}$, when $\tau\to\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. А. Ибрагимов* и *Ю. А. Розанов*. Гауссовские стационарные процессы, Изд. „Наука", М., 1970.
2, *И. А. Ибрагимов*. Вполне рагулярные многомерные процессы с дискретным временем, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, CXI, Теоретические задачи математической статистики.
3. *Ю. А. Розанов*. О линейном интерполировании в стационарных процессах с дискретным временем, ДАН СССР, 116, № 6, 1957.
4. *Н. Данфорд* и *Д. Т. Шварц*. Линейные опэраторы, т. 1, 1966.
5. *Н. К. Бари*. Тригонометрические ряды, М., 1961.
6. *А. Ф. Тиман*. Теория приближений функций действительного переменного, М., 1961.
7. *H. Helson*. Lecture on invariant subspace, 1964.
8. *P. Jackson*. The theory of approximation, 1930.