

Б. В. ГРИГОРЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
В ОБЛАСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

В настоящей работе доказывается теорема единственности для гармонических функций трех переменных, определенных в области вращения. Пусть эта область получена в результате вращения кривой Γ с непрерывно меняющейся касательной, уравнение которой в плоскости xoz задается формулой $z = \psi(x)$, где $0 \leq x \leq a$, $\psi(0) = \psi(a) = 0$ и $\psi(x) > 0$ при $0 < x < a$. Для удобства будем предполагать, что кривая Γ в окрестности $x = 0$ задается в полярных координатах уравнением вида $\varphi = \Phi(\rho)$, где $0 \leq \rho \leq \rho_0$ и функция $\Phi(\rho)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) существует непрерывная и ограниченная производная $\Phi'(\rho)$ при

$$\rho \in (0, \rho_0),$$

$$\text{б) } \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \Phi'(\rho) = \operatorname{tg} \gamma, \quad 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2},$$

в) при $\gamma = 0$ предположим, что

$$\int_0^{\rho_0} t \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \frac{dt}{\theta(t)} < +\infty,$$

где $\theta(t) = 2\Phi(t)$.

Введем следующие обозначения.

Тело, получаемое вращением кривой Γ вокруг оси ox , обозначим через Ω , а ее сечение плоскостью $y = 0$ — через G . Далее через $D(0, \rho)$ обозначим шар с центром в начале координат и радиусом ρ и пусть $\Omega_\rho = \Omega \cap D(0, \rho)$.

Пусть функция $H(P) = H(x, y, z)$ гармонична в Ω .

Обозначим

$$\sup_{\rho \in \Omega_\rho} |H(\rho)| = m(\rho).$$

Пусть $m(\rho) \downarrow 0$ при $\rho \downarrow 0$.

Теорема А. Если

$$J = \int_0^{\rho_0} \log m(t) \exp \left\{ -\pi \int_\rho^{\rho_0} \frac{d\rho}{\theta(\rho)} \right\} \frac{dt}{t\theta(t)} = -\infty, \quad (1)$$

то $H(P) \equiv 0$ в Ω .

Доказательство. Для доказательства теоремы заметим, что граница области G в окрестности точки $P = (0, 0, 0)$ имеет уравнение

$\varphi = \pm \Phi(\rho)$. Возьмем в области G подобласть G^* так, что уравнение границы в окрестности точки $P = (0, 0, 0)$ определяется уравнением $\varphi = \pm [\Phi(\rho) - \rho^3 \Phi^3(\rho)] = \pm \Phi_1(\rho)$. Тело, получаемое вращением области G^* вокруг оси ox , обозначим Ω^* .

Очевидно, что $\Omega^* \subset \Omega$.

Возьмем произвольное значение $\rho_0 \in (0, \delta_0]$ и шар с центром в точке $P_0 \in \partial\Omega^*$ и радиуса $R = R(\rho_0) = \lambda \rho_0^3 \Phi^3(\rho_0)$, где число $\lambda \in (0, 1)$ выбрано (независимо от ρ_0) так, чтобы шар $D[P_0, R(\rho_0)]$ целиком содержался в Ω .

В возможности такого выбора λ можно убедиться следующим образом. Если в точке $Q_0 = \rho_0 e^{i\Phi(\rho_0)} \in \partial G$ проведем касательную и прямую, угловой коэффициент которой по знаку противоположен угловому коэффициенту касательной, то расстояние точки P_0 от этих прямых имеет порядок $\rho_0^3 \Phi^3(\rho_0)$. Легко видеть, что $D(P_0, R(\rho_0)) \subset \Omega_{\rho_0 + R(\rho_0)}$, следовательно

$$\sup_{P \in D[P_0, R(\rho_0)]} |H(P)| \leq m(\rho_0 + R(\rho_0)). \quad (2)$$

Используя теорему об оценке градиента (см., например, [1] стр. 126), получим

$$|\text{grad } H(P_0)| \leq \frac{cm[\rho_0 + R(\rho_0)]}{P(\rho_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon(\rho_0), \quad (3)$$

где c не зависит от ρ_0 . Если учесть, что ρ_0 — произвольное значение из $(0, \delta_0)$, то в неравенствах (2) и (3) индекс можно опустить. Таким образом, функция $H(P)$ гармонична в Ω^* и удовлетворяет условию

$$\sup_{P \in \Omega^*} \{|H(P)|, |\text{grad } H(P)|\} \leq \varepsilon(\rho).$$

где $0 < \rho \leq \delta_0$.

Опираясь на теоремы 1 и 2 работы [2], доказательство теоремы завершится, если покажем, что

$$\int_0^{\delta_0} \log \varepsilon(t) \exp \left\{ -\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho \theta_1(\rho)} \right\} \frac{dt}{t \theta_1(t)} = -\infty, \quad (4)$$

где $\theta_1(\rho) = 2\Phi_1(\rho)$.

Действительно, подставляя в левую часть равенства (4) выражение (3) для $\varepsilon(t)$ через функцию $m(t)$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta_0} \log \varepsilon(t) \exp \left\{ -\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho \theta_1(\rho)} \right\} \frac{dt}{t \theta_1(t)} = \\ & = \int_0^{\delta_0} \log m[t + R(t)] \exp \left\{ -\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho \theta_1(\rho)} \right\} \frac{dt}{t \theta_1(t)} - \end{aligned}$$

$$-\int_0^{\delta_0} \log \frac{R(t)}{c} \exp \left\{ -\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho \theta_1(\rho)} \right\} \frac{dt}{t \theta_1(t)} = J_1 - J_2.$$

Покажем, что при условии (1) $J_1 = -\infty$, а J_2 — конечное число.

Действительно, по определению функции $\Phi_1(\rho)$ и по теореме о среднем значении имеем

$$\delta(t) = \int_{t+R(t)}^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho \theta_1(\rho)} - \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho \theta_1(\rho)} = - \int_t^{t+R(t)} \frac{d\rho}{\rho \theta_1(\rho)} = - \frac{Rt}{\xi \theta_1(\xi)} = - \frac{\lambda t^3 \Phi^2(t)}{2 \xi \Phi_1(\xi)}, \quad (5)$$

где

$$t < \xi < t + \lambda t^3 \Phi^2(t).$$

Последнее выражение стремится к нулю при $t \rightarrow 0$, так как легко видеть, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t)}{\Phi_1(t)} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t)}{\Phi(\xi)} = 1.$$

Следовательно, оба интеграла в левой части (5) одновременно сходятся или расходятся.

В силу этих рассуждений, обозначая $t + \lambda t^3 \Phi^2(t) = \mu(t)$, получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\delta_0} \log m[\mu(t)] \exp \left\{ -\pi \int_{\mu(t)}^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho \theta(\rho)} + \delta(t) \right\} \frac{\theta[\mu(t)]}{\theta_1(t)} \cdot \frac{dt}{t \theta[\mu(t)]} < \\ &\leq c \int_0^{\delta_0} \log m[\mu(t)] \exp \left\{ -\pi \int_{\mu(t)}^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho \theta(\rho)} \right\} \frac{dt}{\mu(t) \theta[\mu(t)]} \leq c J = -\infty. \end{aligned}$$

Легко доказывается, что J_2 — конечное число.

Действительно, после интегрирования по частям J_2 примет вид

$$\begin{aligned} J_2 &= \log \frac{\lambda t^3 \Phi^2(t)}{c} \exp \left\{ -\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho \theta_1(\rho)} \right\} \Big|_{t \rightarrow 0} - \\ &- c \int_0^{\delta_0} \frac{3 \Phi(t) + 2 t \Phi'(t)}{t \Phi(t)} \exp \left\{ -\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho \theta_1(\rho)} \right\} dt. \end{aligned}$$

Здесь конечность первого слагаемого можно проверить по правилу Лопиталя, а сходимость второго интеграла очевидна. Этим и завершается доказательство теоремы А.

Можно доказать, что утверждение теоремы А неулучшаемо.

Это показывается аналогично доказательству теоремы 3 работы [2].

Ռ. Վ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Պատմական տիրույթներում հարմոնիկ ֆունկցիաների միակությունը մասին (ամփոփում)

[2] Հողվածում ապացուցված էր պտտման տիրույթներում հարմոնիկ ֆունկցիաների համար միակության թեորեմ հարմոնիկ ֆունկցիաների և նրա գրադիենտի նվազման արագության տերմիններով, երբ մոտենում ենք տիրույթի գագաթին:

Ներկա աշխատանքում, օգտագործելով այդ թեորեման, ցույց է տրվում որ կարելի է աղատվել գրադիենտի վրա դրված սահմանափակումից:

B. V. GRIGORIAN. *On the uniqueness of harmonic functions in the domains of revolution (summary)*

In [2] a uniqueness theorem has been established for harmonic functions in the domains of revolution in terms of the velocity of decrease of the function and its gradient when the point tends to the vertex of the domain. Using this theorems the present note proves that the restrictions on the gradient can be dropped.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов. Введение в теорию гармонических функций, М., Изд. „Наука“, 1968.
2. Б. В. Григорян. Теоремы единственности для гармонических функций трех переменных в области вращения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 2, 1972. 81—89.