ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 5, 1975 Математика

А. А. ЧУБАРЯН

О НЕКОТОРОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ И СЛОЖНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВЫВОДОВ В КЛАССИЧЕСКОМ ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В работе предлагается схема построения вывода некоторой „нормальной" формы в классическом исчислении высказываний гильбертовского типа для произвольной тождественно истинной формулы (т. и. ф.). Преимущество предлагаемых выводов заключается в том, что они могут быть „собраны из стандартных блоков" и обладают в некотором смысле свойством „подформульности", что позволяет оценить некоторые сложностные характеристики выводов произвольной т. и. ф. фиксированной длины.

Для построения вывода используется метод Кальмара доказатель ства полноты классического исчисления высказываний.

1°. Зафиксируем некоторую систему гильбертовского типа классического исчисления высказываний, которую мы впредь будем обозначать через $\sum$. Пропозициональные переменные (п. п.) введем как символы $x_1, x_2, x_3, \cdots$. Под пропозициональной формулой будем понимать слово, составленное по обычным правилам из 1) п. п., 2) логических связок &, V, $\supset$, $\urcorner$, 3) скобок. Аксиомами $\sum$ будем считать формулы, задаваемые по аксиомным схемам, приведенным, например, в гл. IV §19 работы [1]. Правилом вывода будет правило Modus ponens. Строчные латинские буквы a, b (возможно с индексами) будут использоваться для обозначения п. п., заглавные латинские буквы A, B, C, F, G (возможно с индексами), а также греческие буквы α, β, γ — для обозначения пропозициональных формул (п. ф.)

В соответствии с обычным пониманием длины слова мы будем понимать *длину формулы*. Длину произвольной формулы F будем обозначать через $l(F)$.

Под *логической длиной* формулы F мы будем понимать количество вхождений логических символов в формулу F и будем обозначать через $l_1(F)$.

Под *пропозициональной длиной* формулы F мы будем понимать количество вхождений пропозициональных переменных в формулу F и будем обозначать через $l_2(F)$.

Мы считаем известным понятие *подформулы*. Подформулу будем называть элементарной только в том случае, если она является пропозициональной переменной.

Нетрудно убедиться в том, что для произвольной формулы

$$l(F) = 3(l_1(F) + l_2(F)) - 2, \qquad (1)$$

$$l_2(F) \leqslant l_1(F) + 1. \qquad (2)$$

Действительно, в формуле, количество логических символов и пропозициональных переменных которой равны соответственно l_1 и l_2, необходимо присутствуют $2l_2$ скобок для каждой элементарной подформулы и $2(l_1 - 1)$ скобок для подформул, образованных всеми логическими символами, кроме самого внешнего. Неравенство (2) очевидно. Из (1) и (2) получаем

$$6l_2(F) - 5 \leqslant l(F). \qquad (3)$$

Если учесть, что количество переменных в формуле любой длины может равняться единице, то получим для произвольной формулы

$$3l_1(F) + 1 \leqslant l(F) = 6l_2(F) + 1. \qquad (4)$$

Напомним индуктивное определение глубины произвольной формулы F (будем обозначать глубину F через $h(F)$):

а) если F — элементарная формула, то $h(F) = 0$;

б) если F имеет вид $(F_1) \& (F_2)$, или $(F_1) \vee (F_2)$, или $(F_1) \supset (F_2)$, и $h(F_1)$ и $h(F_2)$ суть глубины формул F_1 и F_2 соответственно, то $h(F) = \max(h(F_1), h(F_2)) + 1$;

с) если F есть формула вида $\rceil(F_1)$ и $h(F_1)$ — глубина формулы F_1, то $h(F) = h(F_1) + 1$.

Мы будем говорить, что формула G является *сверткой* формулы F в том и только том случае, если существует список попарно различных пропозициональных переменных $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \leqslant l_2(G))$ и соответствующих им попарно различных пропозициональных формул $A_1, A_2, \cdots, A_n$, таких, что формулу F можно получить в результате одновременной подстановки вместо переменных $a_1, a_2, \cdots, a_n$ в формуле G формул $A_1, A_2, \cdots, A_n$ соответственно.

Формулу G назовем *правильной сверткой* т. и. ф. F, если

а) G является сверткой F,

б) G является т. и. формулой.

Будем говорить, что формула G является логическим ядром формулы F, если G является правильной сверткой формулы F, и не существует правильной свертки формулы F, имеющей глубину, меньшую чем G.

Следуя Черчу [2], мы будем называть *вариантами* формулы, получающиеся друг из друга переименованием переменных (при этом одинаковые переменные переименовываются в одинаковые).

Формулы мы будем называть одинаковыми, если они совпадают графически как слова или являются вариантами. В противном случае формулы называются различными.

Для каждой формулы A под εA (ε может быть также с индексом) будем понимать или саму формулу A, или $\rceil A$. Каждой формуле εA будем сопоставлять символ $\bar{\varepsilon}_A$, который определяется по правилу:

$$\bar{\varepsilon}_A = \begin{cases} \text{И тогда и только тогда, когда } \varepsilon A \text{ есть } A \\ \Lambda \text{ тогда и только тогда, когда } \varepsilon A \text{ есть } \rceil A. \end{cases}$$

2°. Используя метод Кальмара (см. стр. 121 — 124 русск. перев. работы [1]) доказательства полноты классического исчисления высказываний можно дать следующую схему выводов произвольной т. и. ф. F в системе $\sum$.

Пусть $a_1, a_2, \cdots, a_k$ — все различные пропозициональные переменные формулы F. Составим 2^k комбинаций вида $\varepsilon_{j1} a_1, \varepsilon_{j2} a_2, \cdots, \varepsilon_{jk} a_k$ $(j = 1, 2, \cdots, 2^k)$. Через A_j^p $(p \leqslant k, j = 1, 2, \cdots, 2^p)$ будем обозначать формулу $\varepsilon_{j_{k-p+1}} a_{l_{k-p+1}} \& (\varepsilon_{jk-p} a_{k-p} \& (\cdots \& (\varepsilon_{j_{k-1}} a_k + \& \varepsilon_{jk} a_k) \cdots))$.

Для каждой из формул A_j^k поступаем следующим образом:

а) выводим формулы $A_j^k \supset \varepsilon_{ji} a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$; таким образом, для всех различных элементарных подформул α формулы F будут выведены все формулы вида $A_j^k \supset \varepsilon_\alpha \alpha$.

б) допустим для некоторой подформулы γ, имеющей вид $\alpha * \beta$ (под $*$ мы понимаем $\&$, V, $\supset$), уже выведены формулы $A_j^k \supset \varepsilon_\alpha \alpha$ и $A_j^k \supset \varepsilon_\beta \beta$; возьмем $\bar{\varepsilon}_\gamma = \bar{\varepsilon}_\alpha * \bar{\varepsilon}_\beta$ и соответствующим образом возьмем $\varepsilon_\gamma \gamma$; для получения вывода формулы $A_j^k \supset \varepsilon_\gamma \gamma$ выведем еще формулу $(A_j^k \supset \supset \varepsilon_\alpha \alpha) \supset ((A_j^k \supset \varepsilon_\beta \beta) \supset (A_j^k \supset \varepsilon_\gamma \gamma))$, которая выводима в силу выбора $\bar{\varepsilon}_\gamma$, и дважды применим правило $M.\ p.$;

с) допустим, что для некоторой подформулы γ, имеющей вид $\rceil \alpha$, уже выведена формула $A_j^k \supset \varepsilon_\alpha \alpha$; возьмем $\bar{\varepsilon}_\gamma = \rceil \bar{\varepsilon}_\alpha$ и соответствующим образом возьмем $\varepsilon_\gamma \gamma$, тогда для вывода формулы $A_j^k \supset \varepsilon_\gamma \gamma$ достаточно вывести еще формулу $(A_j^k \supset \varepsilon_\alpha \alpha) \supset (A_j^k \supset \varepsilon_\gamma \gamma)$ и применить правило М. р.

Поступая согласно пунктам а), б), с) для всех подформул формулы F (по мере возрастания их глубин), мы получим для каждого A_j^k вывод формулы $A_j^k \supset F$. Далее необходимо освободиться от посылок в выведенных импликациях. Для этого достаточно вывести еще формулы вида $((a_i \& A_j^{k-i}) \supset F) \supset (((\rceil a_i \& A_j^{k-i}) \supset F) \supset (A_j^{k-i} \supset F))$ $(i = = 1, 2, \cdots, k-1; j = 1, 2, \cdots, 2^{k-i})$ и $(a_k \supset F) \supset ((\rceil a_k \supset F) \supset F)$ и каждый раз дважды применять правило М. р.

Итак, вывод произвольной т. и. ф. F может быть построен из выводов формул, задаваемых по схемам:

I. I. $B_1 \& (B_2 \& \cdots \& (B_{k-1} \& B_k) \cdots)) \supset B_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$.

II.
1. $(A \supset \alpha) \supset ((A \supset \beta) \supset (A \supset (\alpha \& \beta)))$,
2. $(A \supset \alpha) \supset ((A \supset \rceil \beta) \supset (A \supset \rceil (\alpha \& \beta)))$,
3. $(A \supset \rceil \alpha) \supset ((A \supset \beta) \supset (A \supset \rceil (\alpha \& \beta)))$,
4. $(A \supset \rceil \alpha) \supset ((A \supset \rceil \beta)) \supset (A \supset \rceil (\alpha \& \beta)))$,
5. $(A \supset \alpha) \supset ((A \supset \beta) \supset (A \supset (\alpha V \beta)))$,
6. $(A \supset \alpha) \supset ((A \supset \rceil \beta) \supset (A \supset (\alpha V \beta)))$,
7. $(A \supset \rceil \alpha) \supset ((A \supset \beta) \supset (A \supset (\alpha V \beta)))$,
8. $(A \supset \rceil \alpha) \supset ((A \subset \rceil \beta) \supset (A \supset \rceil (\alpha V \beta)))$,
9. $(A \supset \alpha) \supset ((A \supset \beta) \supset (A \supset (\alpha \supset \beta)))$,

10. $(A\supset\alpha)\supset((A\supset\neg\beta)\supset(A\supset\neg(\alpha\supset\beta)))$,
11. $(A\supset\neg\alpha)\supset((A\supset\beta)\supset(A\supset(\alpha\supset\beta)))$,
12. $(A\supset\neg\alpha)\supset((A\supset\neg\beta)\supset(A\supset(\alpha\supset\beta)))$,
13. $(A\supset\alpha)\supset(A\supset\neg\neg\alpha)$,
14. $(A\supset\neg\alpha)\supset(A\supset\neg\alpha)$.

III. 1. $((\alpha\&\gamma)\supset F)\supset(((\neg\alpha\&\gamma)\supset F)\supset(\gamma\supset F))$,
2. $(\alpha\supset F)\supset((\neg\alpha\supset F)\supset F)$.

Стандартные блоки выводов формул, получаемых по этим схемам для формулы F, „склеиваются" правилами М. р., образуя вывод F.

3°. *Сложностные характеристики выводов.* Условимся букву W использовать в роли переменной, допустимыми значениями которой являются всевозможные выводы в системе $\sum$. Утверждение о том, что W является выводом формулы F будем обозначать через $W\rightarrow F$.

Для каждой выводимой формулы F можно поставить вопросы о „простой выводимости" этой формулы в том или ином смысле. Например, естественно напрашиваются вопросы: а) какое количество формул достаточно для вывода данной формулы? б) насколько „длинные" формулы необходимы для вывода данной формулы?

В связи с этим определим следующие сложностные характеристики выводов. Пусть W — вывод, состоящий из формул $F_1, F_2, \cdots F_n$.

Линейной сложностью вывода W назовем количество формул n в нем и будем обозначать через $T(W)$.

Емкостную сложность вывода W определим как максимум длин формул, входящих в этот вывод. Емкостную сложность будем обозначать через $S(W)$:

$$S(W)=\max(l(F_1), l(F_2),\cdots,l(F_n)).$$

Иногда оказывается полезной такая сложностная характеристика вывода, как сумма длин всех формул этого вывода. Эту характеристику вывода W будем обозначать через $L(W)$ и называть *полной сложностью вывода*:

$$L(W)=l(F_1)+l(F_2)+\cdots+l(F_n).$$

Исходя из вышеназванных сложностных характеристик выводов, определим соответствующие сложностные характеристики для произвольной т. и. ф. F.

1. $\overline{T}(F)=\min\limits_{W\rightarrow F} T(W)$ — линейная сложность формулы F по выводимости.
2. $\overline{S}(F)=\min\limits_{W\rightarrow F} S(W)$ — емкостная сложность формулы F по выводимости.
3. $\overline{L}(F)=\min\limits_{W\rightarrow F} L(W)$ — полная сложность формулы F по выводимости.

Определим следующие функции Шеннона:

$$Ш^T(n) = \max_{l(F) < n} \overline{T}(F),$$

$$Ш^S(n) = \max_{l(F) < n} \overline{S}(F),$$

$$Ш^L(n) = \max_{l(F) < n} \overline{L}(F).$$

В настоящей работе получены следующие оценки для этих функций Шеннона.

Теорема 1. *Существует такая константа* c_S, *что*

$$n \leqslant Ш^S(n) \leqslant c_S\, n^*.$$

Теорема 2. *Существует такая константа* c_T, *что*

$$Ш^T(n) \leqslant c_T \cdot 2^{n/6}(n+1).$$

Теорема 3. *Существует такая константа* c_L, *что*

$$Ш^L(n) \leqslant c_L \cdot 2^{n/6}(n+1)^2.$$

Отметим, что аналогичным образом могут быть определены еще три функции Шеннона вида

$$Ш_1^\Pi(n) = \max_{l_1(F) < n} \overline{\Pi}(F), \text{ где } \Pi \text{ есть } T,\ S \text{ или } L,$$

которые оценивают соответствующие сложностные характеристики выводов для множеств формул, логические длины которых не превышают n. Оценки для функций Шеннона $Ш_1^\Pi$ могут быть получены соответственно из оценок для трех предыдущих функций с учетом (1)—(4) пункта 1.

Отметим, что аналогичные функции Шеннона типа $Ш_2^\Pi$, по существу, невозможны, так как имеется бесконечно много формул с данным количеством вхождений переменных, причем среди них есть сколь угодно длинно выводимые.

Действительно, можно показать, например, что для произвольного m линейная сложность формулы

$$\underbrace{\rceil(\rceil(\cdots\rceil}_{2m \text{ раз}}((x_1)\supset(x_1))\cdots))$$

(впредь будем обозначать ее через G_m) не менее, чем $\frac{2m-1}{3}$.

Предварительно напомним несколько определений.

В работе [3] для каждой формулы F исчисления высказываний определено множество формул $\tau(F)$ такое, что $\tau(F) = \{F\}\, U\, \tau_1(F)$**, где $\tau_1(F) = \Lambda$ для элементарных формул F;

---

* Посредством часто встречающегося в литературе обозначения $\asymp$, это утверждение может быть записано в виде $Ш^S(n) \asymp n$.

** $\{F\}$ — означает множество, состоящее из одной формулы F.

$$\tau_1(F_1 \& F_2) = \tau(F_1) \cup \tau(F_2);$$
$$\tau_1(F_1 \vee F_2) = \tau(F_1) \cap \tau(F_2);$$
$$\tau_1(F_1 \supset F_2) = \tau(F_2) \setminus \tau(F_1);$$

$\tau_1(\rceil(F_1)) = \overline{\tau(F_1)}$ — дополнение к множеству $\tau(F_1)$.

Очевидно, для каждой аксиомы A системы $\sum$ мощность $\tau(A)$ не превышает 3. В работе [3] показано, что τ-множество формулы F, получаемой из формул G и $G \supset F$ по правилу М. р. содержит лишь формулы, входящие в множество $\tau(G) \cup \tau(G \supset F)$, в силу чего можно заключить, что в выводе произвольной формулы, мощность τ-множества которого равна p, содержится не менее $\frac{p}{3}$ аксиом.

Докажем индукцией по m, что
$$\tau(G_m) = \{G_m\} \cup \{G_{m-1}\} \cup \cdots \cup \{G_0\}.$$
По определению
$$\tau(G_0) = \tau((x_1) \supset (x_1)) = \{(x_1) \supset (x_1)\} = \{G_0\}.$$
Допустим утверждение верно для всех m', не превышающих $m-1$ Тогда имеем
$$\tau(G_m) = \{G_m\} \cup \tau(\rceil(G_{m-1})) = \{G_m\} \cup \overline{\{\rceil(G_{m-1})\} \cup \tau(G_{m-1})} =$$
$$= \{G_m\} \cup \tau(G_{m-1}) = \{G_m\} \cup \tau(G_{m-1}) =$$
$$= \{G_m\} \cup \{G_{m-1}\} \cup \cdots \cup \{G_0\}, \text{ что и требовалось.}$$

Итак, для произвольного m мощность множества $\tau(G_m)$ равна $m+1$, а значит, количество аксиом в произвольном выводе формулы G_m не менее, чем $\frac{m+1}{3}$.

В работе [3] определяется понятие приведенного вывода произвольной т. и. ф., т. е. вывода, вычеркивание любой формулы, кроме последней, из которого дает последовательность формул, не являющуюся выводом данной т. и. ф. Там же доказано, что количество аксиом в приведенном выводе, состоящем из t формул, не превышает $\frac{t+1}{2}$, в силу чего для произвольного m и количества шагов t_m произвольного приведенного вывода формулы G_m имеем $\frac{m+1}{3} < \frac{t_m+1}{2}$, откуда $t_m \geqslant \frac{2m-1}{3}$, что и требовалось показать.

Если учесть еще, что при любом m $l_2(G_m) = 2$, а $l\,(G_m) = 6m+7$, то замечание относительно функций Ш_2^T и Ш_2^S, а следовательно, и относительно Ш_2^l оказывается справедливым.

4°. Чтобы оценить емкостную и линейную сложности для вывода произвольной т. и. ф. F длины, не превышающей n, оценим эти сложностные характеристики для формул, получаемых для F по схемам I — III.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть последовательность формул $C_1, C_2, \cdots, C_m$ является приведенным выводом формулы C_m из посылок $A_1, A_2, \cdots, A_k$, и пусть $max(l(C_1), \cdots, l(C_m), l(A_1), \cdots, l(A_k)) = s$. Тогда существует вывод формулы $(A_k) \supset (C_m)$ из посылок $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$, количество шагов которого может не превышать $3m+2$, а длина формул, участвующих в этом выводе, может не превышать $9s+40$.*

Доказательство. Воспользуемся кратким доказательством теоремы дедукции, изложенным в [1] (русск. перев., стр. 87), согласно которому, для получения выводов $(A_k) \supset (C_m)$ из $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$, достаточно приписать ко всем словам $(C_1), (C_2), \cdots, (C_m)$ слово $(A_k) \supset$ и превратить полученную последовательность формул в вывод формулы $(A_k) \supset (C_m)$ путем вставления добавочных формул:

а) если C_i является аксиомой или одной из формул $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$, то вставляются формулы

$$C_i$$

$$C_i \supset (A_k \supset C_i),$$

б) если C_i совпадает с A_k, то вставляем

$$A_k \supset (A_k \supset A_k)$$

$$(A_k \supset (A_k \supset A_k)) \supset ((A_k \supset ((A_k \supset A_k) \supset A_k)) \supset (A_k \supset A_k)) \qquad (+)$$

$$(A_k \supset ((A_k \supset A_k) \supset A_k)) \supset (A_k \supset A_k)$$

$$A_k \supset ((A_k \supset A_k) \supset A_k),$$

с) если C_i получена по правилу М. р., то существуют формулы C_l и C_j $(l, j < i)$, причем C_j имеет вид $C_l \supset C_i$, тогда вставляем формулы

$$(A_k \supset C_l) \supset ((A_k \supset (C_l \supset C_i)) \supset (A_k \supset C_i))$$

$$(A_k \supset C_j) \supset (A_k \supset C_i).$$

Из вышесказанного следует, что количество шагов в выводе $(A_k) \supset (C_m)$ из $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$, не превышает $m + 2(m-1) + 4 = 3m+2$, а длина формул не превышает $9s + 40$. Такую длину может иметь формула, отмеченная символом $(+)$, в случае, если длина A_k равна максимальной длине s (нужно учесть все скобки, некоторые из которых опущены для удобства).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть G—произвольная т. и. ф., $b_1, b_2, \cdots, b_k$ суть все различные пропозициональные переменные формулы G и $B_1, B_2, \cdots, B_k$— произвольныг фор мулы, причем:*

а) для некоторого вывода W формулы G

$$T(W) = m \text{ и } S(W) = s,$$

б) $\max\,(l(B_1),\ l(B_2), \cdots,\ l(B_k)) = n.$

Тогда, если F является результатом подстановки формул $B_1, B_2, \cdots, B_k$ вместо переменных $b_1, b_2, \cdots,\ b_k$ в G, то

$$\overline{T}(F) \leqslant m \text{ и } \overline{S}(F) \leqslant \frac{1}{6}\,(s+5)\cdot n + \frac{5}{6}\,(s-1).$$

Доказательство. Вывод формулы F можно получить из вывода формулы G, предварительно заменив в аксиомах этого вывода переменные $b_1,\ b_2, \cdots,\ b_k$ на соответствующие формулы $B_1, B_2, \cdots,\ B_k$. При этом количество формул в выводах обоих формул F и G одинаково, и каждая из формул вывода F является результатом подстановки в соответствующую формулу вывода G вместо переменных $b_1,\ b_2, \cdots$ $\cdots,\ b_k$, соответствующих формул $B_1,\ B_2, \cdots, B_k$. Учитывая, что количество переменных в формуле длины s не превышает $\frac{s+5}{6}$ (см. (3) пункта 1), получим, что емкостная сложность вывода формулы F не превышает $s - \frac{s+5}{6} + n\cdot\ \frac{s+5}{6} = \frac{1}{6}\ (s+5)\ \cdot\ n + \frac{5}{6}\,(s-1)$, что и требовалось.

Следствие: Пусть формула G является логическим ядром формулы F и

а) существует вывод W формулы G такой, что

$$T(W) = m \text{ и } S(W) = s,$$

б) $l(F) \leqslant n$,

тогда

$$\overline{T}(F) \leqslant m \text{ и } \overline{S}(F) \leqslant \frac{1}{6}\,(s+5)\cdot n + \frac{5}{6}\,(s-1).$$

Доказательство очевидно.

Теперь оценим линейную и емкостную сложности по выводимости формул, получаемых по схемам I — III для произвольной т. и. ф. F с $l(F) \leqslant n$. Обозначим количество различных переменных и число логических символов некоторой фиксированной формулы F с $l(F) \leqslant n$ через k и l соответственно.

Обозначим формулу $B_{k-q+1}\ \&\ (B_{k-q+2}\ \&\ \cdots\ \&\ (B_{k-1}\ \ \&\ B_k)\cdots)$, где каждое B_l или пропозициональная переменная или отрицание пропозициональной переменной, входящей в F, через B^q $(q = 1, 2, \cdots,\ k)$.

Рассмотрим следующий вывод:

$$\frac{B_1 \& (B_2 \& \cdots \& (B_{k-1} \& B_k) \cdots) \vdash B^k}{B^k} \qquad \left.\begin{array}{ll} B^k \vdash B^k \supset B_1 & \\ B^k \vdash B_1 & \\ B^k \vdash B^k \supset B^{k-1} & (+) \\ B^k \vdash B^{k-1} & \\ B^k \vdash B^{k-1} \supset B_2 & \\ B^k \vdash B_2 & \\ \vdots & \\ B^k \vdash B_{k-1} \& B_k & \\ B^k \vdash B_{k-1} \& B_k \supset B_{k-1} & \\ B^k \vdash B_{k-1} & \\ B^k \vdash B_{k-1} \& B_k \supset B_k & \\ B^k \vdash B_k & \end{array}\right| \begin{array}{c} 4k-3 \\ \text{формулы} \end{array}$$

(символом (+) отмечена формула максимальной длины $\leqslant 2k-11$).

Если провести преобразования, описанные в лемме 1, получим вывод формулы $B^k \supset B_k$, содержащий также в качестве подвыводов выводы всех формул вида $B^k \supset B_i$ $(i = 1,2, \cdots, k)$. Ввиду результатов леммы 1, линейная и емкостная сложности этого вывода не превышают $3 \cdot (4k-3) + 2 = 12k - 7$ и $9(12k-11) + 40 = 108k - 59$ соответственно. Таким образом, оценены сложностные характеристики для вывода, содержащего выводы всех формул типа 1 формулы F.

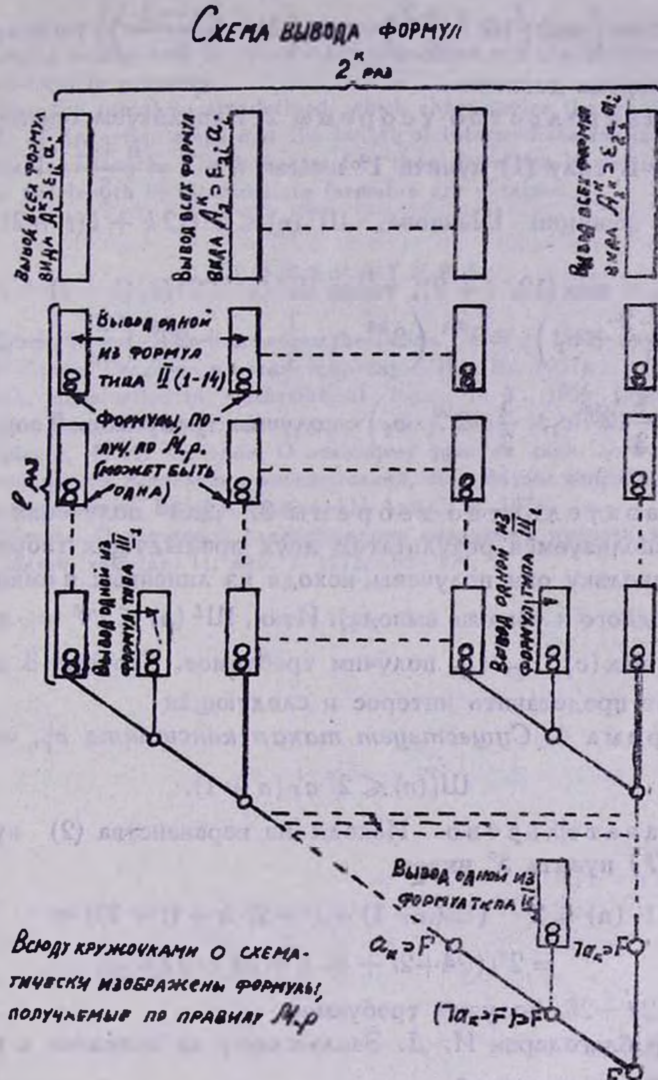
Для формул, получаемых по схемам II, III, выпишем соответствующие логические ядра, построим их выводы, оценим линейные и емкостные сложности этих выводов. Максимальную из линейных сложностей обозначим через t, максимальную из емкостных сложностей—через s. Воспользовавшись результатами следствия леммы 2, мы можем утверждать, что линейные и емкостные сложности по выводимости формул, получаемых по схемам II и III для формулы F, не превышают t и $\frac{1}{6}(s+5) \cdot n + \frac{5}{6}(s-1)$ соответственно. Действительно, в формулах, получаемых по схемам II, III для формулы F, вместо A и γ подставляются соответственно k-членные и $(k-i)$-членные $i \leqslant k-1$ конъюнкции, состоящие из пропозициональных переменных формулы F или их отрицаний, а вместо α и β — произвольные подформулы F, следовательно, длины подставляемых формул не превышают n.

5°. Для нашей фиксированной формулы F построим вывод по схеме, описанной в пункте 2° и оценим сложностные характеристики этого вывода, используя результаты пункта 4°.

Отметим, что количество неэлементарных подформул произвольной формулы равно количеству логических символов.

Вывод формулы F схематически приводится ниже.

Линейная сложность формулы F по выводимости оценивается следующим образом (см. схему и оценки пункта 4):



$$\overline{T}(F) \leqslant 2^k(12k-7+l(t+2)) + 2^{k-1}(t+2)+2^{k-2}(t+2)+\cdots+$$

$$+2(t+2)+(t+2) < 2^k(12k+l(t+2))+2^k(t+2) = 2^k(12k+(t+2)(l+1)).$$

Для емкостной сложности имеем

$$\overline{S}(F) \leqslant \max\left[108k-59,\ \frac{1}{6}(s+5)\cdot n+\frac{5}{6}(s-1)\right].$$

6°. В этом пункте будут доказаны основные теоремы.

Доказательство теоремы 1. Поскольку сама формула длины n участвует в выводе, то $Ш^s(n) \geqslant n$.

Верхнюю оценку получаем, используя оценку пункта 5° д

$\overline{S}(F)$. Так как $108\,k-59\leqslant 108\cdot\dfrac{n+5}{6}-59=16\,n+21$, то, взяв в качестве c_S $\max\left(\max\left(16,\ \dfrac{s+5}{6}\right),\ \max\left(21,\ \dfrac{5s-5}{6}\right)\right)$, получим требуемое. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Используем оценку пункта 5° для $\overline{T}(F)$. В силу (1) пункта 1° имеем $k+l=\dfrac{n+2}{3}$. Имеем, по определению функции Шеннона, $Ш^T(n)\leqslant 2^k(12\,k+l\,(t+2)+(t+2))$.

Возьмем $c_1=\max(12,\ t+2)$, тогда $Ш^T(n)\leqslant 2^k(c_1(k+l)+c_1)\leqslant 2^{\frac{n+5}{6}}\times\left(c_1\cdot\dfrac{n+2}{3}+c_1\right)=2^{n/6}\left(2^{5/6}\cdot c_1\cdot\dfrac{1}{3}\cdot n+2^{5/6}\left(\dfrac{2}{3}c_1+c_1\right)\right)$. Взяв $c_T=\max\left(\dfrac{1}{3}\,2^{5/6}c_1,\ \dfrac{5}{3}\cdot 2^{5/6}\cdot c_1\right)$, получим требуемое. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Для получения оценки для $Ш^L(n)$ воспользуемся результатом двух предыдущих теорем (это возможно, поскольку они получены, исходя из линейных и емкостных оценок для одного и того же вывода). Итак, $Ш^L(n)\leqslant 2^{n/6}(c_T\cdot n+\overline{c}_T)\cdot c_s\cdot n$. Взяв $\overline{c}_L=\max(c_T,\ \overline{c}_T,\ c_s)$, получим требуемое. Теорема 3 доказана.

Может представить интерес и следующая

Теорема 4. *Существует такая константа* c_T^1, *что*

$$Ш_1^T(n)\leqslant 2^n\,c_T^1(n+1).$$

Доказательство. Исходя из неравенства (2) пункта 1° и оценки $T(F)$ пункта 5° имеем

$$Ш_1^T(n)\leqslant 2^{n+1}(12(n+1)+(t+2)\cdot n+(t+2))=$$

$$=2^n((24+2t+4)\cdot n+24+2\,t+4).$$

Взяв $c_T^1=2\,t+28$, получим требуемое.

Автор благодарен И. Д. Заславскому за внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 8.IV.1974

Ա. Ա. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ. Ասույթների դասական հաշվում արտածումների որոշ նորմալ տեսքի և բարդության բնութագրերի մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում առաջարկվում է ասույթների դասական հաշվում արտածումների կառուցման որոշ նորմալ եղանակ։ Առաջարկվող եղանակով կառուցված արտածումները օժտված են որոշ իմաստով ենթաբանաձևայնության հատկությամբ։

Սահմանվում են Շեննոնյան ֆունկցիաներ, որոնք բնութագրում են տվյալ երկարություն ունեցող կամայական բանաձևի արտածման միջանկյալ բանաձևերի երկարությունը, արտածման երկարությունը և քայլերի քանակը։ Տրվում են այդ ֆունկցիաների գնահատականները՝ մասնավորապես գծային գնահատականը միջանկյալ բանաձևերի երկարության համար։

A. A. CHUBARIAN. *On a normal form for deductions and the characterization of deduction complexity in propozitional calculus* (summary)

In the paper a normal method for constructing deductions in classical propositional calculus is proposed. So constructed deductions are characterized in a certain sense by sub-formula property.

The Shannon functions are defined, which characterize the length of deduction, the number of deduction steps and the length of intermediate formulae for a given formula of a fixed length. The estimates for these functions in particular a linear estimate for the length of intermediate formulae are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. C. Kleene.* Introduction to metamathematics, N. Y., 1952 (русский перевод С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИИЛ, М., 1957).
2. *A. Church.* Introduction to mathematical logic, N. Y., 1956 (русский перевод: А. Чёрч, Введение в математическую логику, ИИЛ, М., 1960).
3. *Г. С. Цейтин, А. А. Чубарян.* О некоторых оценках длин логических выводов в классическом исчислении высказываний, сб. „Матем. вопросы кибернетики и вычисл. техники", Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1974.
4. *А. С. Аникеев.* О некоторой классификации выводимых пропозициональных формул, Матем. заметки, 11, вып. 2, 1972, 165—174.