ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 5, 1975 Математика

М. Б. БАЛК

# О ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ ЕЕ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

1°. В статье [1] с помощью аппарата мероморфных кривых был установлен следующий результат:

Утверждение 1. Целая полианалитическая* функция $f(z)$ произвольного порядка $n$, имеющая ограниченное множество нулей, представима в виде

$$f(z) \equiv P(z, \bar{z}) \exp E(z), \tag{1}$$

где $E(z)$ — целая аналитическая функция, а $P(z, \bar{z})$ — полином относительно $z$ и $\bar{z}$.

Это утверждение позволило получить ряд теорем пикаровского типа (см. [2], [3], [4]). Оригинальное доказательство утверждения 1, также использующее некоторые сведения о мероморфных кривых, принадлежит И. В. Островскому [5].

Недавно американский математик П. Крайкевич [6], привлекая аппарат квазинормальных семейств аналитических функций, получил для функции, полианалитической порядка $n = 2$ в окрестности своей изолированной особой точки, естественный аналог утверждения 1. Однако это доказательство не переносится на случай п. а. функций произвольного порядка $n$.

В данной заметке мы намерены показать, что накопленные в [1]—[6] методы и факты в сочетании с некоторыми ранними результатами Р. Неванлинны [7]—[8] позволяют обобщить утверждение 1 на случай функций, являющихся полианалитическими *произвольного* порядка $n$ в проколотой окрестности какой-либо точки $z_0$. В частности, получим результат П. Крайкевича.

В основу заметки положен доклад, прочитанный 10 декабря 1973 года на семинаре по теории функций при МГУ.

Пусть каждая функция $a_k(z)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ голоморфна в некоторой проколотой окрестности $D$ точки $z_0$ $(|z_0| \leqslant \infty)$, причем хотя бы для одной из функций $a_k(z)$ точка $z_0$ — особая. Тогда точка $z_0$ называется (см. [9], [5]) изолированной особенностью п. а. функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) \bar{z}^k,$$

* Ниже будем часто писать ради краткости „п. а." вместо „полианалитическая". Относительно используемых в данной статье понятий см. обзорную статью [10].

и притом существенно особой, если $z_0$ является таковой хотя бы для одной из функций $a_k(z)$ $(k=0, 1, \cdots, n-1)$.

Теорема 1. *Пусть $\delta$ — замкнутая круговая окрестность точки $z_0$ $(|z_0| \leqslant \infty)$. Если функция $f(z)$ — однозначная полианалитическая в $D = \delta - \{z_0\}$ и точка $z_0$ не является предельной для множества всех нулей функции $f(z)$, то $f(z)$ в $D$ представима в виде*

$$f(z) \equiv \pi(z, \bar{z}) \exp E(z),$$

*где $E(z)$ — целая аналитическая функция относительно $1/(z-z_0)$ при $z_0 \neq \infty$ и относительно $z$ при $z_0 = \infty$, а $\pi(z, \bar{z})$ — однозначная полианалитическая в $D$ функция, не имеющая в точке $z_0$ существенной особенности.*

Учитывая известную связь между п. а. функциями и псевдополиномами ([10], стр. 204), можно, очевидно, теорему 1 перефразировать так:

Теорема 1′. *Если все $a_k(z)$ $(k=0, 1, \cdots, n-1)$ голоморфны в $D = \{z: 0 < |z| \leqslant 1\}$ и псевдополином*

$$f(z, w) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)\, w^k$$

*не имеет нулей в плоскости $w = \bar{z}$ (при $0 < |z| \leqslant 1$), то $f(z, w) \equiv \equiv \pi(z, w) \exp E(z)$, где $\pi(z, w)$ — псевдополином (по $w$) с коэффициентами, мероморфными при $|z| \leqslant 1$, а $E(z)$ — целая функция от $1/z$.*

2°. Нам потребуются некоторые вспомогательные факты.

Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в круговом кольце $D\{1 \leqslant \leqslant |z| < \infty\}$. Будем пользоваться, следуя Р. Неванлинне, такими обозначениями: $n(r, a, f)$ — число $a$-точек (с учетом их кратности) функции $f(z)$ в кольце $1 \leqslant |z| \leqslant r$;

$$N(r, a, f) = \int_1^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt, \quad N(r, f) \equiv N(r, \infty, f),$$

$$m(r, f) \equiv m(r, \infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(r e^{i\vartheta})|\, d\vartheta,$$

$$m(r, a, f) \equiv m\left(r, \frac{1}{f(z) - a}\right).$$

Известная формула Иенсена была перенесена Р. Неванлинной на случай кольца (см. [7], стр. 40, формула (76)). Пусть функция $f(z)$ мероморфна в кольце $G\{\rho_0 \leqslant |z| \leqslant r\}$, $\{a_\lambda\}$ — ее нули в $G$, $\{b_\lambda\}$ — ее полюса. Тогда

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\sum\ln\frac{r}{|a_\mu|}+\sum\ln\frac{r}{|b_\mu|}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho_0 e^{i\theta})|\,d\theta-\ln\frac{r}{\rho_0}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}d\arg f(\rho_0 e^{i\theta}).$$

Нам понадобится следующий частный случай этого утверждения Неванлинны.

Замечание 1. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в кольце

$D\{1\leqslant|z|\leqslant r\}$ и $f(z)\neq 0$ на $\gamma\{|z|=1\}$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta=N(r,0,f)+A\ln r,\tag{2}$$

где $A$ — вращение функции $f(z)$ по контуру $\gamma$:

$$A=\mathrm{Bp}_\gamma f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma d\,[\arg f(z)]=\mathrm{const}.$$

Замечание 2. (Первая основная теорема Р. Неванлинны для функций, мероморфных в окрестности точки $\infty$; см. [8], стр. 86). Каждой непостоянной функции $f(z)$, которая в кольце $D\{\rho_0\leqslant|z|<\infty\}$ однозначна и мероморфна, соответствует такая функция $T(r,f)$, определенная с точностью до аддитивной величины $O(\ln r)$ и (начиная с некоторого $r$) возрастающая, что имеет место зависимость

$$m(r,a,f)+N(r,a,f)=T(r,f)+O(\ln r)$$

при каждом конечном или бесконечном $a$. Если точка $\infty$ является существенно особой для $f(z)$, то

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\ln r}=\infty.\tag{3}$$

Функцию $\pi(z)\not\equiv 0$, голоморфную в $D\{\rho_0\leqslant|z|<\infty\}$ и не имеющую в точке $\infty$ существенной особенности, условимся называть, ради краткости *полиномоидом* (в $D$). В классе функций $\{f(z)\}$, голоморфных в $D$, полиномоиды характеризуются (как это видно из замечания 2) тем, что удовлетворяют условию

$$T(r,f)=O(\ln r)\ \text{при}\ r\to\infty.$$

Полианалитическую (в $D$) функцию, не имеющую в точке $\infty$ существенной особенности, будем называть *полианалитическим* (короче: *п. а.*) *полиномоидом.*

Замечание 3. Каждый полиномоид (в $D$) представим в виде

$$\pi(z)=z^m P(z)\exp B\left(\frac{1}{z}\right),\tag{4}$$

где $m$ — целое (необязательно положительное) число, $P(z)$ — полином, все корни которого (если таковые имеются) принадлежат $D$, а $B(t)$ — голоморфная функция при $|t| \leqslant \frac{1}{\rho_0}$. Доказательство очевидно.

Замечание 4. (см. [8], стр. 78). Если функция $f(z)$ голоморфна и имеет ограниченное множество нулей в $D\{\rho_0 \leqslant |z| < \infty\}$, то она представима в виде

$$f(z) \equiv \pi(z) \exp E(z), \tag{5}$$

где $E(z)$ — целая аналитическая функция, а $\pi(z)$ — полиномоид.

3°. Рассмотрим голоморфную в $D\{1 \leqslant |z| < \infty\}$ кривую

$$g \equiv g(z) = \{g_1(z), \cdots, g_S(z)\}. \tag{6}$$

Всюду в дальнейшем будем подразумевать (не оговаривая это каждый раз особо), что функции $g_1(z), \cdots, g_S(z)$ линейно независимы и не имеют в $D$ общего нуля, а $g_S(z) \neq 0$ на $\gamma\{|z| = 1\}$.

Пусть, далее, задана полиномиальная кривая

$$P \equiv p(c) = \{p_1(c), \cdots, p_S(c)\}, \tag{7}$$

где $c \in [1, \infty)$, причем полиномы $p_1(c), \cdots, p_S(c)$ будем предполагать линейно независимыми и, более того, монотонно возрастающих точных степеней $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$:

$$0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_S.$$

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\|g\| = \sqrt{|g_1(z)|^2 + \cdots + |g_S(z)|^2}, \quad \|p\| = \sqrt{|p_1(c)|^2 + \cdots + |p_S(c)|^2}, \tag{8}$$

$$F_c(z) \equiv F(z; c) \equiv g \cdot p \equiv g_1(z) \cdot p_1(c) + \cdots + g_S(z) \cdot p_S(c). \tag{9}$$

(„свертка кривых (6) и (7)“), $n(t, c)$ — число нулей функции $F(z; c)$, расположенных в кольце $1 \leqslant |z| \leqslant t$ (с учетом их кратности),

$$N(r, c) = \int_1^r \frac{n(t, c)}{t} dt, \tag{10}$$

$$m(r, c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\|g(re^{i\theta})\| \, |g(e^{i\theta}) \cdot p(c)|}{\|g(e^{i\theta})\| \, |g(re^{i\theta}) \cdot p(c)|} d\theta, \tag{11}$$

$$T(r, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\|g(re^{i\theta})\|}{\|g(e^{i\theta})\|} d\theta. \tag{12}$$

Замечание 5.

$$m(r, c) + N(r, c) = T(r, g) + A \ln r, \tag{13}$$

где $A = Bp_\gamma F(z; c)$.

Доказательство следует из (10) — (12) и (2).

Замечание 6. Если свертка (9) кривых (6) и (7) имеет на всех окружностях $\Gamma\{|z|=c>c_1\}$ ($c_1=\mathrm{const}$) одно и то же вращение $q$, то число $n(c,c)$ нулей (с учетом их кратности) свертки (9) в кольце $1\leqslant|z|\leqslant c$ при достаточно большом $c$ ($c>c_0=\mathrm{const}$) не зависит от выбора $c$:

$$n(c,c)=h=\mathrm{const}\ \ (c>c_0).$$

Действительно, пусть $Bp_\gamma g_S(z)=l$. При $z\in\gamma$ имеем

$$\lim_{c\to\infty}\frac{F(z;c)}{c^{a_s}}-g_S(z)$$

(сходимость равномерная по $z$ на $\gamma$). Отсюда и из теоремы Руше следует существование такого $c_0$, что при $c>c_0$

$$A=Bp_\gamma F(z;c)=Bp_\gamma[F(z;c)/c^{a_s}]=Bp_\gamma g_S(z)=l.$$

Но тогда $n(c,c)=q-l=\mathrm{const}$ при любом $c>c_0$.

Замечание 7. Если голоморфная кривая (9) такова, что $g_S(z)$ — полином и $T(r,g)=O(\ln r)$ при $r\to\infty$, то все функции $g_1(z),\cdots,g_{S-1}(z)$ — полиномоиды.

Доказательство. Учитывая замечания 2 и 1 и условие замечания 7, получаем при любом $k$, $1\leqslant k\leqslant s-1$

$$T\left(r,\frac{g_k}{g_s}\right)=m\left(r,\infty,\frac{g_k}{g_s}\right)+N\left(r,\infty,\frac{g_k}{g_s}\right)+O(\ln r)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\|g(re^{i\theta})\|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g_s(e^{i\theta})|d\theta+N(r,0,g_s)+$$

$$+O(\ln r)\leqslant T(r,g)+O(\ln r)=O(\ln r).$$

В силу заключительной части замечания 2 функция $g_k(z)/g_s(z)$, а вместе с ней и $g_k(z)$, не может иметь в точке $\infty$ существенной особенности, так что $g_k(z)$ — полиномоид.

Замечание 8. Пусть кривые (6) и (7) таковы, что

1) число нулей $n(c,c)$ их свертки (9) в кольце $1\leqslant|z|\leqslant c$ ограничено сверху при $c>c_0$:

$$n(c,c)\leqslant h=\mathrm{const}\ \text{при}\ c>c_0=\mathrm{const};$$

2) $g_s(z)$ является полиномом. Тогда все функции $g_1(z),\cdots,g_{s-1}(z)$ являются полиномоидами в $D\{1\leqslant|z|<\infty\}$.

Доказательство будет опираться на некоторые соображения И. В. Островского, использованные им в аналогичной ситуации в случае целых кривых (см. [5], стр. 196—201). Из тождества (13) следует, что

$$T(r,g)=I_1(r)+I_2(r)+O(\ln r),$$

где

$$I_1(r)=r\int_r^\infty N(r,c)\frac{dc}{c^2},\quad I_2(r)=r\int_r^\infty m(r,c)\frac{dc}{c^2}.$$

Так как (см. замечание 6) $n(t,c)\leqslant n(c,c)=h=\mathrm{const}$ ($c_0<r<c$), то

$N(r,c)=O(\ln r)$, $I_1(r)=O(\ln r)$. Полагая

$$L(r)=\sup_{|w_1|^2+\cdots+|w_s|^2=1}\left| r\int_r^{\infty}\frac{1}{|w_1p_1(c)+\cdots+w_sp_s(c)|}\frac{dc}{c^2}\right|,$$

легко проверить, что $I_2(r)\leqslant 2L(r)$.

Функция $L(r)$, как показал И. В. Островский ([5], стр. 198 — 200), удовлетворяет соотношению

$$L(r)=O(\ln r)\ (\text{при } r\to\infty).$$

В итоге получаем

$$T(r,g)=O(\ln r).$$

Учитывая замечание 7, видим что все $g_k(z)$ $(k=1,\cdots, s-1)$ — полиномоиды.

Замечание 9. (см. [1] или [5]). Всякую *приведенную* в некоторой области $D$ п. а. функцию, т. е. функцию вида

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{n-1}|z|^{2\nu}\varphi_\nu(z),$$

где все $\varphi_\nu(z)$ голоморфны в $D$, можно представить в виде

$$F(z)=\sum_{k=1}^{s}p_k(|z|^2)\psi_k(z),$$

где $\psi_1(z),\cdots,\psi_s(z)$ — линейно независимые голоморфные в $D$ функции, каждая из которых совпадает с одной из функций $\varphi_1(z),\cdots$ $\cdots,\varphi_{n-1}(z)$, а $p_1(t),\cdots,p_s(t)$ — полиномы, точные степени которых $\alpha_1,\cdots$ $\cdots,\alpha_s$ удовлетворяют условию

$$0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_s=n-1.$$

Замечание 10. (см. [6], [1]). Если функция

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k(z)\bar z^k$$

является полианалитической порядка $n$ в $D\{\rho_0\leqslant|z|<\infty\}$ имеет там ограниченное множество нулей и если $a_{n-1}(z)\not\equiv 0$, то $a_{n-1}(z)$ имеет в $D$ лишь конечное множество нулей.

Доказательство теоремы 1. Достаточно ограничиться случаем $z_0=\infty$; к нему сводится и случай $z_0\neq\infty$ путем замены $\zeta=1/(z-z_0)$. Пусть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k(z)\bar z^k,$$

где все $a_k(z)$ $(k=0,1,\cdots, n-1)$ голоморфны в $D$ и $a_{n-1}(z)\not\equiv 0$. Без потери общности можно считать, что $a_{n-1}(z)$ не имеет нулей на

$\gamma\,\{|z|=\rho_0\}$ и что $\rho_0=1$. Рассмотрим вспомогательную п. а. функцию

$$\Phi(z)=z^{n-1}f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}|z|^{2k}\varphi_k(z),$$

где

$$\varphi_k(z)=z^{n-1-k}\,a_k(z).$$

Она имеет в $D$ те же нули (с учетом их кратности), что и $f(z)$. Можно $\Phi(z)$ представить в виде (см. замечание 9)

$$\Phi(z)=\sum_{k=1}^{s}p_k(|z|^2)\,\psi_k(z),$$

где $\psi_k(z)$ и $p_k(t)$ $(k=1,\cdots,s)$ удовлетворяют условиям замечания 9, причем

$$\psi_s(z)\equiv\varphi_{n-1}(z)\equiv a_{n-1}(z).$$

Из условия теоремы 1 следует, что $\psi_s(z)$ имеет в $D$ лишь конечное число нулей (см. замечание 10); поэтому (см. замечание 4 и 3) $\psi_s(z)$ представима в виде

$$\psi_s(z)=\exp E(z)\cdot z^m\,Q(z)\cdot g_s(z)\,\exp B\left(\frac{1}{z}\right),$$

где $E(z)$ — целая функция, $Q(z)$ — полином, корнями которого служат все расположенные в $D$ общие нули функций $\psi_1(z),\cdots,\psi_s(z)$; $m$ — целое число; $B(t)$ — голоморфная функция при $|t|\leqslant 1$; $g_s(z)$ — полином с корнями в $D$.

Представим $\Phi(z)$ так:

$$\Phi(z)=\exp E(z)\cdot\exp B\left(\frac{1}{z}\right)\cdot Q(z)\,z^m\,F(z),$$

где

$$F(z)=\sum_{k=1}^{s}p_k(|z|^2)\,g_k(z),$$

причем функции $g_k(z)$ $(k=1,\cdots,s)$ — голоморфные линейно независимые функции без общих нулей. Ясно, что множество нулей функции $F(z)$ в $D$ ограничено. Рассматривая кривые

$$g(z)=\{g_1(z),\cdots,g_s(z)\}\quad(z\in D),$$
$$p(c)=\{p_1(c^2),\cdots,p_s(c^2)\}\quad(c\in[1,\infty)),$$

видим, что их свертка $F(z;c)\equiv g(z)\cdot p(c)$ имеет на всех достаточно больших окружностях $\Gamma\,\{|z|=c>c_1=\mathrm{const}\}$ одно и то же вращение. В силу замечания 6 имеем $n(c,c)=h=\mathrm{const}$ при $c>c_0=\mathrm{const}$. Согласно замечанию 8 функции $g_1(z),\cdots,g_{s-1}(z)$ — полиномоиды. Но тогда ясно, что функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z)\equiv e^{E(z)}\cdot\pi(z,\bar{z}),$$

где

$$\pi(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(z) \bar{z}^k,$$

а $\pi_k(z)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ — полиномоиды в $D$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает справедливость большой теоремы Пикара для п. а. функций, имеющих существенную особенность (ранее эта теорема была установлена другими средствами в работах В. Боша и П. Крайкевича [12], [6], а в случае целых п. а. функций — в [11] и [4]).

Примечание. Более, чем через год после того, как настоящая статья поступила в редакцию, мне стало известно, что результат, аналогичный теореме 1 данной статьи, был недавно опубликован П. Крайкевичем (P. Krajkiewicz. Polyanalytic functions with exceptional values. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 197, October 1974, p.p 181—210). Однако доказательство, приведенное П. Крайкевичем, значительно сложнее нашего и использует другую идею.

Смоленский государственный педагогический
институт им. К.Маркса

Поступила 29.1.1974

Մ. Բ. ԲԱԼԿ. *Պոլիանալիտիկ ֆունկցիայի ֆակտորիզացիայի մասին մեկուսացված եզակիության շրջակայքում* (ամփոփում)

*Մերոմորֆ կորերի ապարատի օգնությամբ ապացուցվում է կամայական կարգի պոլիանալիտիկ ֆունկցիայի ներկայացման հնարավորությունը (a) մեկուսացված եզակիությամբ խոցված (D) շրջակայքում՝ հոլոմորֆ, առանց զրոների D-ում և պոլիանալիտիկ, չունեցող (a) կետում էական եզակիության ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով։*

*Այս պնդումը ընդհանրացնում է Ի. Կռայկևիչի կողմից նախապես ստացված (բիանալիտիկ ֆունկցիայի դեպքում) և հեղինակի կողմից (ամբողջ պոլիանալիտիկ ֆունկցիաների դեպքում) արդյունքները։ Այս արդյունքից հետևում է Պիկարի մեծ թեորեմը պոլիանալիտիկ ֆունկցիաների համար։*

M. B. BALK. *Factorization of a polyanalytic function in the vicinity of an isolated singularity* (summary)

By use of the theory of meromorphic curves it is proved that every function which is polyanalytic of order $n$ in the punctured vicinity $(D)$ of its isolated singularity $(a)$ may be presented as a product of two functions: one holomorphic and without zeros in $D$, the other polyanalytic in $D$ and without essential singularity in $a$. This statement generalizes some earlier results obtained by *P.* Krajkiewicz (in the case $n = 2$) and the author (in the case of entire polyanalytic functions) and has the big Picard theorem for polyanalytic functions as its corollary.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Б. Балк.* Целые полианалитические функции с ограниченным множеством нулей. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 1, № 5, 1966, 341—357.
2. *М. Б. Балк.* Некоторые следствия из теоремы о факторизации целых полианалитических функций, Смоленский математический сборник, 2, 1969, 3—7.

3. *М. Б. Балк, М. Ф. Зуев.* О числе значений, принимаемых целой полианалитической функцией неизолированно. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем, 7, № 5, 1972, 313—324.
4. *М. Б. Балк.* Большая теорема Пикара для целых бианалитических функций, УМН, 20, вып. 2, 1965, 159—165.
5. *И. В. Островский.* Об одной теореме М. Б. Балка. Математическая физика, функциональный анализ. (Сб. научных трудов ФТИИНТ АН УССР), 1, 1969, 191—203.
6. *P. Krajkiewicz.* Bianalytic functions with exceptional values, Proc. Amer. Math. Soc., 38, № 1, 1973, 75—79.
7. *R. Nevanlinna.* Untersuchungen über den Picardschen, Satz, Acta Societatis scientiarum Fennicae, 50, № 6, 1924.
8. *R. Nevanlinna.* Neuere Untersuchungen über den Picard'schen Satz, „Den sjette skandinaviske Matematikerkongres, Kobenhaven, 1925", 1926, 77—95.
9. *М. Б. Балк, А. А. Полухин.* Предельное множество бианалитической функции в ее изолированной особой точке, Смоленский матем. сборник, 3, 1970, 3—12.
10. *М. Б. Балк, М. Ф. Зуев.* О полианалитических функциях, УМН, 25, вып. 5, 1970, 203—226.
11. *М. Б. Балк.* О значениях, принимаемых целыми полианалитическими функциями, ДАН СССР, 167, 1966, 12—15.
12. *W. Bosch, P. Krajkiewicz.* The big Picard theorem for polyanalytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 26, 1970, 145—150.