ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 4, 1975 Математика

С. Я. ХАВИНСОН

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ДЛЯ КОМПАКТОВ НУЛЕВОЙ ЁМКОСТИ И ДРУГИЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕДКИХ МНОЖЕСТВ

Введение

Хорошо известен критерий Эванса для компактов нулевой емкости (см. [1]). Он состоит в том, что существует потенциал, обращающийся в ∞ на таком компакте, а вне его имеющий конечные значения. В работе [2] Валлин дал другую характеристику компактов нулевой ёмкости, показав, что на них любую непрерывную функцию можно рассматривать, как сужение на этот компакт потенциала меры, обладающей произвольно малой вариацией. Правда, этот результат был получен при некоторых дополнительных предположениях о ядре, с помощью которого строится теория потециала. В работе автора [3], являющейся изложением доклада на Ереванской международной конференции по теории функций в 1965 году, приведена теорема (теорема 6), усиливающая результат Валлина и объединяющая его с критерием Эванса (теорема об универсальном потенциале). Теорема эта была получена при тех же дополнительных ограничениях, что и результат Валлина. Для произвольного ядра в [3] была приведена близкая к результату Валлина аппроксимационная характеристика (теорема 4), являющаяся, однако, менее точным результатом, чем теорема Валлина. (Все результаты в [3] сообщались без доказательств). В настоящей статье мы даем доказательство теоремы об универсальном потенциале, снимая указанные дополнительные ограничевия на ядро. Обсуждаются некоторые следствия и эквиваленты полученной характеристики нуль-множеств. Все эти результаты можно рассматривать в свете теории усложненной полноты систем, построенной в работах Фань-Цзи и Дейвиса [4] и автора [5] — [8]. В этой теории в расчет принимается не только близость аппроксимирующего полинома к приближаемой функции, но и величины коэффициентов полинома. С помощью таких аппроксимирующих процессов оказалась также возможной характеристика множеств аналитической емкости нуль [9] — [11], областей класса S В. И. Смирнова [7], [8]. Обзор ряда результатов подобного рода дан в [3]. В последнем § настоящей статьи мы приводим некоторые новые простые результаты, связанные с аппроксимационным критерием множеств нулевой аналитической ёмкости.

§ 1. Предварительные сведения и формулировка основной теоремы

Пусть $K(r)$ — заданная на $(0, +\infty)$ невозрастающая положительная непрерывная функция, удовлетворяющая требованию

$$\lim_{r \to 0+0} K(r) = +\infty. \tag{1}$$

Такую функцию будем называть ядром. Мы будем рассматривать в m-мерном вещественном пространстве R^m потенциалы с ядром $K(r)$. Поэтому функцию $K(r)$ подчиним дополнительно требованию

$$\int_0 K(r)\, r^{m-1}\, dr < +\infty. \tag{2}$$

Если μ — некоторая бэровская вещественная мера (заряд) в R^m, то под потенциалом $U^\mu(x)$ этой меры понимаем

$$U^\mu(x) = \int K(|x-y|)\, d\mu_y, \tag{3}$$

где $|x-y|$ — расстояние между точками x и y в R^m. Интегрирование в (3) ведется по носителю μ; замкнутый носитель μ обозначается через $S(\mu)$. Далее рассматриваем лишь заряды, для которых $S(\mu)$ — — компакт.

(Заметим тут же, что в дальнейшем, если не оговорено противное, мерой мы называем лишь неотрицательную меру, а термин заряд сохраняем для вещественных мер). Условие (2) обеспечивает локальную суммируемость потенциалов. Интеграл

$$E(\mu) = \int_{S(\mu)} U^\mu(x)\, d\mu_x \tag{4}$$

есть интеграл энергии для μ. Для компакта Γ величина

$$\gamma_k(\Gamma) = [V(\Gamma)]^{-1}, \quad V(\Gamma) = \inf E(\mu) \tag{5}$$

и inf взята по всем мерам $\mu \geqslant 0$, удовлетворяющим условиям

$$S(\mu) \subseteq \Gamma, \int_\Gamma d\mu = 1 \tag{6}$$

называется K-емкостью компакта Γ. Для произвольного множества Q положим $\gamma_k(Q) = \sup \gamma_k(\Gamma)$, где sup берется по всевозможным компактам $\Gamma \subseteq Q$. Если какое-то свойство имеет место всюду, кроме быть может множества K-емкости нуль, то говорят, что оно имеет место K-квази всюду. Справедливы [14], [12] следующие результаты (для мер $\mu \geqslant 0$):

$$\text{Если } U^\mu(x) \leqslant M,\ x \in S(\mu), \text{ то } U^\mu(x) \leqslant AM,\ \forall x. \tag{7}$$

Здесь A зависит только от размерности пространства R^m (но может считаться независимой от вида $K(r)$; например, в случае $m = 2$ имеем $A = 6$).

Если сужение $U^{\mu}(x)$ на $S(\mu)$ непрерывно там, то $U^{\mu}(x)$ — непрерывен во всем пространстве.

Пусть $\gamma_k(\Gamma)>0$ и μ^* — мера, экстремальная в задаче о K-емкости (5). Тогда

$$U^{\mu^*}(x) \geqslant V(\Gamma) \ K\text{-квази всюду на } \Gamma, \tag{8}$$

$$U^{\mu^*}(x) \leqslant V(\Gamma) \ \text{всюду на } S(\mu), \tag{9}$$

таким образом, на $S(\mu)$:

$$U^{\mu^*}(x) = V(\Gamma) \ K\text{-квази всюду.} \tag{10}$$

Потенциал $U^{\mu^*}(x)$ называют емкостным потенциалом. Если ядро $K(r)$ удовлетворяет определенным дополнительным условиям, то для Γ, являющегося объединением конечного числа замкнутых шаров, неравенство (8) имеет место везде на Γ (а не только K-квази всюду).

В частности, указанное свойство выполняется, если ядро $K(r)$ удовлетворяет неравенству

$$k(r) \leqslant CK(2r), \ \forall r>0 \tag{11}$$

с некоторым C.

Хорошо известен следующий критерий Эванса ([1], [12]): для того чтобы $\gamma_k(\Gamma)=0$ необходимо и достаточно, чтобы существовал потенциал $U^{\mu}(x)$, $\mu\geqslant 0$ такой, что

$$U^{\mu}(x)=\infty, \ x\in\Gamma, \ U^{\mu}(x)<+\infty, \ x\,\overline{\in}\,\Gamma. \tag{12}$$

В работе [2] Валлин доказал следующую теорему: если ядро $K(r)$ таково, что для Γ, являющегося объединением конечного числа замкнутых шаров, неравенство (8) выполняется везде на Γ (в частности, если имеет место (11)), и $V_k(\Gamma)=0$, то для произвольной непрерывной на Γ функции $\varphi(x)>0$, произвольной окрестности $G\supset\Gamma$ и любого $\varepsilon>0$ существует мера $\mu\geqslant 0$ со следующими свойствами:

$$S(\mu)\subset G, \int\limits_{S(\mu)} d\mu<\varepsilon, \ u^{\mu}(x) \text{ — непрерывен в } R^m, \tag{13}$$

$$u^{\mu}(x)=\varphi(x), \ x\in\Gamma.$$

При этом мера μ может считаться абсолютно-непрерывной относительно лебеговой меры в R^m и обладает бесконечно дифференцируемой вне Γ плотностью.

Условимся для дальнейшего в следующем обозначении. Если функция $F(x)$ задана на каком-то множестве $\Gamma_1\supset\Gamma$, то через $F(x)/_{\Gamma}$ будем обозначать сужение этой функции на Γ.

Распространим еще понятие непрерывности функции на случай функций, принимающих бесконечные значения, считая, что такая функция $F(x)$ непрерывна (в обобщенном смысле) в точке x_0, когда $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$ (в частности, при $F(x_0)=\infty$). Наша цель состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\gamma_k(\Gamma)=0$. Для произвольного открытого множества $C\subset\Gamma$ и произвольного $\varepsilon>0$ существует мера $\mu\geqslant 0$ со следующими свойствами:*

1. $S(\mu)\subset G$, $\int\limits_{S(\mu)} d\mu<\varepsilon$, *$\mu$ — абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и её плотность бесконечно дифференцируема вне* Γ.

2. $U^{\mu}(x)=+\infty,\ x\in\Gamma,\ U^{\mu}(x)<+\infty,\ x\overline{\in}\Gamma,$

$u^{\mu}(x)$ *— непрерывен в R^m (в обобщенном смысле).*

3. *Пусть $F(x)>0$ — произвольная полунепрерывная снизу в некоторой окрестности Γ функция и $\varphi(x)=F(x)/_\Gamma$. Существует замкнутое подмножество T_φ множества $S(\mu)$ такое, что если μ_φ — сужение μ на T_φ, то $U^{\mu_\varphi}(x)/_\Gamma=\varphi(x)$ и потенциал $U^{\mu_\varphi}(x)$ непрерывен вне Γ и непрерывен в обобщенном смысле в тех точках Γ, в которых $F(x)$ является таковой. Плотность меры μ_φ бесконечно дифференцируема вне* Γ.

4. *Для произвольной непрерывной на Γ функции $\varphi(x)>0$ имеет место утверждение п. 3 с непрерывным в R^m потенциалом $U^{\mu_\varphi}(x)$.*

Заметим, что никаких дополнительных предположений о ядре (кроме положительности, монотонности и (2)) мы не делаем. Таким образом, сформулированная теорема усиливает результат Валлина в следующих направлениях:

а) снимает ограничения на ядро, б) доводит конструкцию до „универсального“ потенциала, „обслуживающего“ сразу все функции и охватывающего, к тому же, и результат Эванса, в) рассматривает полунепрерывные функции, а не только непрерывные.

Основную роль в наших рассуждениях будет играть построение Валлина [2], однако мы сумеем обойтись без его дополнительных предположений.

§ 2. Леммы

Будем называть канонической окрестностью компакта Γ объединение D конечного числа (замкнутых) шаров, причем такое, что точки Γ являются внутренними к D. Если D — каноническая окрестность Γ и $a>0$ — число, то aD — множество, получающееся из D растяжением каждого шара, входящего в D в a раз (относительно центра!)

Лемма 1. Пусть для компакта Γ

$$\gamma_k(\Gamma)=0. \tag{14}$$

Для произвольного открытого множества $G\supset\Gamma$ и произвольных чисел $a>0$ и $\delta>0$ существует мера μ, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега, обладающая бесконечно дифференцируемой плотностью и такая, что ее потенциал непрерывен в R^m) и*

---

* Из приводимой ниже леммы 3 ясно, что условие (2) обеспечивает непрерывность потенциала абсолютно непрерывной меры с ограниченной плотностью.

$$S(\mu) \subset G, \int\limits_{S(\mu)} d\mu < \delta, U^{(\mu)}(x) \geqslant a, \ x \in \Gamma,$$

$$U^{\mu}(x) \leqslant Aa, \ \forall x \in R^m \tag{15}$$

(*константа* A *из* (7)).

Доказательство. Подберем число $V_0 > 0$ так, чтобы $\frac{a}{V_0} < \delta$ и построим такую каноническую окрестность D_1 множества Γ, что $V(D_1) \geqslant V_0$. Это возможно сделать, так как при стягивании D_1 к Γ величина $V(D_1) \to \infty$ (из-за того, что $\gamma_k(\Gamma) = 0$). В D_1 построим каноническую окрестность D такую, что $2D \subset D_1$. Тогда $V(2D) \geqslant V(D_1) \geqslant V_0$. Пусть мера ν решает задачу о емкости для множества $2D$. Тогда

$$U^{\nu}(x) \geqslant V(2D) \geqslant V_0 \tag{16}$$

K-квази всюду на множестве $2D$ и

$$U^{\nu}(x) \leqslant A\, V(2D) \text{ везде в } R^m,$$

причем $\int d\nu = 1$.

Неравенство (16), выполняясь K-квази всюду, выполняется на $2D$, в частности, почти везде относительно меры Лебега. (В силу условия (2) множество положительной лебеговой меры не может иметь нулевой емкости). Если взять теперь меру σ: $d\sigma = \frac{a}{V(2D)} d\nu$, то для нее: $U^{\sigma}(x) \geqslant a$ почти везде на множестве $2D$,

$$U^{\sigma}(x) \leqslant Aa, \ \forall x \in R^m,$$

$$\int d\sigma = \frac{a}{V(2D)} < \frac{a}{V_0} < \delta. \tag{17}$$

Пусть теперь r_0 — наименьший из радиусов шаров, составляющих D. Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x) \geqslant 0$ с компактным носителем, лежащем в шаре $|x| < r < r_0$, причем

$$\int\limits_{|x|<r} \varphi(x)\, dx = 1 \tag{18}$$

(dx — дифференциал меры Лебега в R^m). Рассмотрим свертки (см., например, [1]):

$$U^{\sigma} * \varphi \text{ и } \sigma * \varphi \overset{def}{=} \mu. \tag{19}$$

Так как $U^{\sigma} = K * \sigma$, то

$$U^{\sigma} * \varphi = K * \sigma * \varphi = K * \mu = U^{\mu}. \tag{20}$$

Мера μ — абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и обладает бесконечно дифференцируемой плотностью, причем

$$\int d\mu = \int d\sigma < \delta.$$

Потенциал $U^{\mu}(x)$, в силу (19) и (20) непрерывен во всей плоскости, ибо его значения получаются осреднением значений суммируемой функции $U'(x)$ с хорошим весом $\varphi(x)$. По этой же причине и так как $r < r_0$, $U^{\mu}(x) > a$ на D и, тем более, на Γ. Наконец, $U^{\mu}(x) \leqslant Aa$ везде. Очевидно также, что можно считать $3D \subset G$ и тогда, $S(\mu) \subset G$. Доказательство завершено.

Теперь мы можем дать доказательство основной леммы, использующей конструкцию Валлина [2], но без дополнительных ограничений на ядро, сделанных в [2].

Пусть $f(x) > 0$ — непрерывная функция на Γ. Продолжим ее непрерывно на все пространство и возьмем компакт $D \supset \Gamma$ такой, что $f(x) > 0$ на D и каждая точка Γ является внутренней для D.

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого открытого множества $G \supset \Gamma$ существует мера $\nu > 0$, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега, обладающая бесконечно дифференцируемой плотностью и следующими свойствами:*

$$U^{\nu}(x) < f(x),\ x \in D,\ U^{\nu}(x) \geqslant f(x) - \varepsilon,\ x \in \Gamma,$$

$$\int\limits_{S(\nu)} d\nu < \varepsilon,\ S(\nu) \subset G. \tag{21}$$

(*Потенциал $U^{\nu}(x)$ непрерывен в R^m*).

Доказательство. Обозначим $M = 3^m A + 4$, где A — число из оценки (7). Будем рассматривать последовательность $\{\eta_i\}$, $i = 0, 1, \cdots$ разбиений пространства R^m на замкнутые кубы. При этом η_0 состоит из всех замкнутых кубов со стороной единица, вершины которых имеют целые координаты, а η_i, $i > 0$ состоит из всех кубов, которые получаются делением каждого куба из η_{i-1} на 2^m равных кубов гиперплоскостями размерности $(m-1)$, параллельными координатным плоскостям.

Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{M}$ и возьмем такую есть η_i, чтобы на каждом кубе этой сети, пересекающемся с D, колебание $f(x)$ было менее ε_1. Пусть $\omega_1, \cdots, \omega_e$ все кубы этой сети, пересекающиеся с D. Можно считать размеры кубов столь малыми, что

$$\min_{x \in \bigcup\limits_{l=1}^{e} \omega_l} f(x) = \delta > 0. \tag{22}$$

Разобьем теперь кубы $\omega_1, \cdots, \omega_e$ на три категории:

1. Куб ω_l отнесем первой категории ($\omega_l \in I$), если

$$\max_{x \in \omega_l \cap \Gamma} f(x) > \varepsilon.$$

2. $\omega_l \in II$, если ω_l граничит с некоторым кубом первой категории, но при этом $\overline{\omega_l} \in I$.

3. К третьей категории отнесем все те кубы из $\omega_1, \cdots, \omega_e$, которые не вошли в I и II категории.

Если кубов первой категории вообще нет, то полагая $\nu \equiv 0$, удовлетворим требованиям леммы. Поэтому будем считать, что существует $s > 0$ кубов первой категории и что ими являются кубы $\omega_1, \cdots, \omega_s$. Пусть $\omega_l \in I$. Так как

$$\gamma_k(\omega_l \cap \Gamma) = 0,$$

то, использовав предыдущую лемму, построим меру $\mu_l \geqslant 0$ со следующими свойствами:

$$S(\mu_l) \subset G',\ U^{\mu_l}(x) > \varepsilon_1,\ x \in \Gamma \cap \omega_l,\ U^{\mu}(x) \leqslant A\varepsilon_1,\ \forall x, \tag{23}$$

причем $U^{\mu_l}(x)$ непрерывен и вариация (μ_l) сколь угодно мала. Мы будем, в частности, считать вариацию μ_l столь малой, чтобы в любой точке x, не лежащей в кубах непосредственно граничащих с данным ω_l, выполнялось неравенство

$$U^{\mu_l}(x) < \min\left(\frac{\delta}{2s}, \quad \frac{\varepsilon_1}{s}\right). \tag{24}$$

Кроме того, считаем, что

$$\int\limits_{S(\mu_l)} d\mu_l < \frac{\varepsilon}{2s}. \tag{25}$$

Указанное построение осуществим для всех $i = 1, \cdots, s$ и положим $\nu^1 = \mu_1 + \cdots + \mu_s$. Рассмотрим потенциал $U^{\nu_1}(x)$. Ясно, что

$$S(\nu_1) \subset G,\ \int d\nu^1 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{26}$$

Потенциал $U^{\nu^1}(x)$ непрерывен во всей плоскости. Дадим его оценку в сравнении с величиной $f(x)$. Если x входит в куб ω_l первой или второй категории, то, как легко усмотреть из построения

$$f(x) > \varepsilon - 2\varepsilon_1 = (3^m A + 2)\varepsilon_1. \tag{27}$$

В то же время наш куб может быть соседним менее, чем для 3^m кубов первой категории, и поэтому

$$U^{\nu^1}(x) < 3^m A\varepsilon_1 + s\frac{\varepsilon_1}{s} = (3^m A + 1)\varepsilon_1. \tag{28}$$

Если x входит в куб третьей категории, то

$$f(x) > \delta,\ U^{\nu^1}(x) < s\ \frac{\delta}{2s} = \frac{\delta}{2}.$$

С другой стороны, если $x \in \omega_l \cap \Gamma$, $i = 1, \cdots, s$, то

$$U^{\nu^1}(x) \geqslant U^{\mu_1}(x) \geqslant \varepsilon_1. \tag{29}$$

Во всех остальных точках Г, т. е. в точках Г, не принадлежащих кубам первой категории, будем иметь

$$f(x) \leqslant \varepsilon = M\varepsilon_1, \quad U^{\nu^1}(x) > 0. \tag{30}$$

Сопоставив (27) — (30), приходим к заключению, что построенный нами потенциал удовлетворяет неравенствам

$$U^{\nu^1}(x) < f(x), \quad x \in D,$$
$$U^{\nu^1}(x) > \min(f(x) - \varepsilon, \ \varepsilon_1) \quad x \in \Gamma. \tag{31}$$

Если второе из неравенств (21) еще не удовлетворено, то повторяем конструкцию с заменой $f(x)$ на $f(x) - U^{\nu^1}(x)$.

Таким образом, построим меру ν^2 со следующими свойствами:

$$S(\nu^2) \subset G, \int d\nu^2 < \frac{\varepsilon}{2^2},$$
$$U^{\nu^2}(x) < f(x) - U^{\nu^1}(x), \quad x \in D, \tag{32}$$
$$U^{\nu^2}(x) > \min(f(x) - U^{\nu^1}(x) - \varepsilon, \ \varepsilon_1), \quad x \in \Gamma,$$

причем потенциал $U^{\nu^2}(x)$ непрерывен в R^m. Последние неравенства, используя (31), можно переписать так:

$$U^{\nu^1+\nu^2}(x) < f(x), \quad x \in D,$$
$$U^{\nu^1+\nu^2}(x) > \min(f(x) - \varepsilon, \ 2\varepsilon_1).$$

Если неравенства (21) еще не выполняются для меры $\nu^1 + \nu^2$, то продолжаем построение с использованием взамен $f(x) - U^{\nu^1}(x)$ функции $f(x) - U^{\nu^1+\nu^2}(x)$ и т. д. При этом заботимся, чтобы для построенной на k-ом шаге меры ν^k выполнялись условия

$$S(\nu^k) \subset G, \ \int d\nu^k < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{33}$$

Пусть $\sup\limits_{x \in D} f(x) = N$. При натуральном n таком, что $n\varepsilon_1 > N$, будем иметь

$$U^{\nu^1+\dots+\nu^n}(x) < f(x), \quad x \in D,$$
$$U^{\nu^1+\dots+\nu^n}(x) > \min(f(x) - \varepsilon, \ n\varepsilon_1) = f(x) - \varepsilon. \tag{34}$$

Кроме того, для меры $\nu = \nu^1 + \dots + \nu^n$ имеем

$$S(\nu) \subset G, \int d\nu < \sum_1^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon. \tag{35}$$

Наконец, из леммы 1 и описанной конструкции следует, что мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и ее плотность есть бесконечно дифференцируемая функция. Потенциал $U^\nu(x)$ непрерывен во всем пространстве. Доказательство завершено.

Лемма 3. *Пусть D — какое-либо измеримое (по мере Лебега dx) множество в R^m и*

$$U_D^{dx}(x) = \int_D K(|x-t|)\,dt. \tag{36}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\operatorname{mes} D < \delta \rightrightarrows U_D^{dx}(x) < \varepsilon \ \forall x. \tag{37}$$

Доказательство. Обозначим, ради краткости, $\operatorname{mes} D = q$, и пусть $R(q)$ — такое число, что

$$K(r) \leqslant (q)^{-\frac{1}{2}}, \text{ при } r > R(q). \tag{38}$$

Очевидно, что $R(q) \to 0$, при $q \to 0$. Опишем из произвольной точки x как из центра, шар радиуса $R(q)$, и пусть D_1 — та часть D, которая лежит вне этого шара. Тогда

$$U_D^{dx}(x) \leqslant B \int_0^{R(q)} K(r) r^{m-1}\,dr + \int_{D_1} K(|t-x|)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant B \int_0^{R(q)} K(r) r^{m-1}\,dr + \sqrt{q}\,. \tag{39}$$

Здесь B—абсолютная константа, зависящая только от размерности m. В силу сходимости интеграла (2) первый член в оценке (39) стремится к нулю вместе с q. Лемма доказана.

Лемма 4. *В условиях леммы* 2 *можно считать, что носитель* $S(\nu)$ *меры* ν *не пересекается с* Γ.

Дказательство. Так как $\gamma_k(\Gamma) = 0$, то и $\operatorname{mes}\Gamma = 0$.

Так как мера ν, построенная в лемме 2, абсолютно непрерывна относительно dx и имеет бесконечно дифференцируемую плотность (нам хватило бы здесь и ограниченности этой плотности), то можно взять окрестность $D \supset \Gamma$ сколь угодно малой меры. Если ν_1 — сужение ν на D, то потенциал $U^{\nu_1}(x)$ равномерно сколь угодно мал при достаточной малости $\operatorname{mes} D$. Поэтому для меры $\nu_2 = \nu - \nu_1$ потенциал $U^{\nu_2}(x)$ сколь угодно близок к $U^{\nu}(x)$. Однако, $S(\nu_2)$ лежит вне Γ и лемма доказана.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Мы можем любую непрерывную функцию $f(x)$, заданную и положительную на Γ, считать непрерывной и положительной на некотором, одном и том же для всех $f(x)$, замкнутом шаре $S \supset \Gamma$, для которого каждая точка Γ является внутренней. Каждая полунепрерывная снизу на Γ функция может быть продолжена до функции, полунепрерывной снизу на S.

Построим счетное множество непрерывных на S положительных функций $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$ таким образом, чтобы для любой положительной непрерывной на S функции $f(x)$ нашлась подпоследовательность

$\{\varphi_{n_j}(x)\}$ последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, равномерно сходящаяся к $f(x)$ на S, причем

$$\varphi_{n_j}(x) < f(x). \tag{40}$$

Разумеется построение последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ с требуемыми свойствами возможно и может быть сделано разными приемами. Запишем функции $\{\varphi_n(x)\}$ в треугольную таблицу

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1(x) & & \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

и изменим обозначения, положив

$$f_1(x) = \varphi_1(x),\ f_2(x) = \varphi_1(x),\ f_3(x) = \varphi_2(x),$$
$$f_4(x) = \varphi_1(x),\ f_5(x) = \varphi_2(x),\ f_6(x) = \varphi_3(x), \cdots. \tag{41}$$

Основываясь на леммах 1—4, построим последовательность положительных мер $\{\mu_j\}$, являющихся абсолютно непрерывными относительно меры Лебега, обладающих бесконечно дифференцируемыми плотностями и непрерывными в R^m потенциалами $U^{\mu_j}(x)$ и имеющих, кроме того, следующие свойства:

$$\int d\mu_j < \frac{\varepsilon}{2j};\ S(\mu_j) \subset G;\ S(\mu_j) \cap \Gamma = \varnothing,\ S(\mu_j) \cap S(\mu_i) = \varnothing;$$

$$j \neq i;\ U^{\mu_j}(x) < f_j(x),\ x \in S;\ U^{\mu_j}(x) > f_j(x) - \frac{1}{2^j},\ x \in \Gamma. \tag{42}$$

Построение мер μ_j ведем последовательно, накачивая меру μ_{j+1} в „зазор“ между $S(\mu_j)$ и Γ.

Ясно также, что процесс построения $\{\mu_j\}$ можно вести таким путем, чтобы

$$\rho_j = \max_{x \in S(\mu_j)} |\rho(x, \Gamma)| \to 0, \tag{43}$$

где $\rho(x, \Gamma)$ — расстояние от x до Γ.

Положим

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j. \tag{44}$$

Ряд (44) сходится по вариации; можно понимать также сходимость ряда (44) в смысле сходимости ряда из плотностей μ_j в смысле метрики $L_1(S, dx)$ (пространство суммируемых на S по мере Лебега dx функций). Ясно, что μ — абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и ее плотность бесконечно дифференцируема вне Γ. Очевидно также, что $S(\mu) \subset G$ и $\int d\mu < \varepsilon$. Из оценок (42) и (43) вытекает, что

$$U^{\mu}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} U^{\mu j}(x) < +\infty, \ x \overline{\in} \Gamma. \tag{45}$$

(Обосновать равенство $U^{\mu}(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} U^{\mu j}(x)$ при любом x легко с помощью известных теорем о почленном интегрировании рядов). Покажем, что $U^{\mu}(x) \equiv \infty$ на Г. Возьмем сколь угодно большое $N > 0$ и пусть $f(x) \equiv N+1$. В силу построения системы $\{f_n(x)\}$ найдется такая $f_j(x)$, что $f_j(x) > N$, $x \in \Gamma$. А тогда, по построению $U^{\mu j}(x) > f_j(x) - \frac{1}{2^j}$ и, следовательно, $U^{\mu j}(x)$ сколь угодно велика на Г вместе с N. Так как $U^{\mu}(x) > U^{\mu j}(x)$, то $U^{\mu}(x) \equiv \infty$, $x \in \Gamma$. Непрерывность $U^{\mu}(x)$ вне Г следует из (45) и свойств $U^{\mu j}(x)$. Поскольку $U^{\mu}(x)$, как всякий потенциал положительной меры, полунепрерывен снизу, то при $x_0 \in \Gamma$

$$\varliminf_{x \to x_0} U^{\mu}(x) \geqslant U^{\mu}(x_0) = \infty$$

и, следовательно, $U^{\mu}(x)$ непрерывен в обобщенном смысле везде в R^m.

Переходим к доказательству п. 3. Так как $F(x)$ полунепрерывна в некоторой окрестности Г (можно считать, что на S), то найдется ряд из положительных непрерывных функций $\psi_1(x), \cdots, \psi_n(x), \cdots$ такой, что

$$\sum_{1}^{\infty} \psi_i(x) = F(x), \quad x \in S. \tag{46}$$

Берем функцию $f_{n_1}(x)$ из системы (41), для которой

$$\psi_1(x) - \frac{1}{2} \leqslant f_{n_1}(x) < \psi_1(x), \quad x \in S$$

и потенциал $U^{\mu n_1}(x)$. Затем для функции $\varphi_2(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) - U^{\mu n_1}(x)$ $(\varphi_1 = \psi_1)$ подбираем $f_{n_2}(x)$ $(n_2 > n_1)$ так, чтобы

$$\varphi_2(x) - \frac{1}{2^2} \leqslant f_{n_2}(x) < \varphi_2(x) \quad x \in S \tag{47}$$

и берем $U^{\mu n_2}(x)$. Рассматриваем функцию

$$\varphi_3(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x) - U^{\mu n_1}(x) - U^{\mu n_2}(x) \text{ и т. д.}$$

Положим

$$\mu_{\varphi} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{n_j}. \tag{48}$$

Ряд (48) сходится по вариации; в (48) имеет место также сходимость плотностей в пространстве $L_1(S, dx)$.

Мера μ_{φ} абсолютно непрерывна относительно dx и плотность ее бесконечно дифференцируема вне Г. Если γ — совокупность предельных точек множества $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} S(\mu_{n_j})$, лежащих на Г, то очевидно, что

$$S(\mu_\varphi)=\gamma\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}S(\mu_{n_j}).$$

Мера μ_φ есть сужение μ на $S(\mu_\varphi)$, которое и можно принять за T_φ. Однако, $\operatorname{mes}\gamma=0$ и поэтому мера μ_φ сосредоточена на $\bigcup_{j=1}^{\infty}S(\mu_{n_j})$. При любом x потенциал

$$U^{\mu_\varphi}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}U^{\mu_{n_j}}(x), \tag{49}$$

что снова можно обосновать с помощью известных теорем о предельном переходе под знаком интеграла. Что потенциал $U^{\mu_\varphi}(x)$ непрерывен вне Γ обосновывается так же, как непрерывность $U^{\mu}(x)$. На k-ом шаге нашей конструкции мы имеем неравенства

$$U^{\mu_{n_k}}(x)<f_{n_k}(x)<\psi_1(x)+\dots+\psi_k(x)-U^{\mu_{n_1}}(x)-\dots-U^{\mu_{n_{k-1}}}(x), \tag{50}$$

т. е.

$$U^{\mu_{n_1}}(x)+\dots+U^{\mu_{n_k}}(x)<\psi_1(x)+\dots+\psi_k(x),\quad x\in S,$$

$$U^{\mu_{n_k}}(x)\geqslant f_{n_k}(x)-\frac{1}{2^{n_k}}>\psi_1(x)+\dots+\psi_k(x)-U^{\mu_{n_1}}(x)-\dots-$$

$$-U^{\mu_{n_{k-1}}}(x)-\frac{1}{2^{n_k}}-\frac{1}{2^k},\quad x\in\Gamma,$$

т. е.

$$U^{\mu_{n_1}}(x)+\dots+U^{\mu_{n_k}}(x)<\psi_1+\dots+\psi_k(x)-\frac{1}{2^{n_k}}-\frac{1}{2^k},\quad x\in\Gamma. \tag{51}$$

Из (46), (49), (50) и (51) следует, что

$$U^{\mu_\varphi}(x)\leqslant F(x)\quad x\in S \tag{52}$$

и

$$U^{\mu_\varphi}(x)|_\Gamma=F(x)|_\Gamma=\varphi(x). \tag{53}$$

Пусть теперь $F(x)$ непрерывна (б. м. в обобщенном смысле) в точке $x_0\in\Gamma$. Тогда, с одной стороны

$$\varliminf_{x\to x_0}U^{\mu_\varphi}(x)\geqslant U^{\mu_\varphi}(x_0)=\varphi(x_0)=F(x_0),$$

а с другой стороны

$$\varlimsup_{x\to x_0}U^{\mu_\varphi}(x)\leqslant\varlimsup_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)=\varphi(x_0)$$

и непрерывность $U^{\mu_\varphi}(x)$ в точке x_0 доказана.

Утверждение п. 4 автоматически следует из п. 3, так как любая непрерывная на Γ функция $\varphi(x)$ может быть непрерывно продолжена на S.

Теорема доказана.

§ 4. Несколько следствий из основной теоремы и фактов, к ней примыкающих

В направлении, обратном к теореме 1, укажем следующий результат (более сильный, чем непосредственное обращение теоремы 1):

Теорема 2. *Если при произвольном* $\varepsilon > 0$ *найдется такой заряд* λ, *что*

$$\max_{x \in \Gamma} |1 - U^{\lambda}(x)| < \varepsilon, \quad \int\limits_{S(\lambda)} |d\lambda| < \varepsilon, \tag{54}$$

то

$$\gamma_k(\Gamma) = 0. \tag{55}$$

Доказательство. Пусть $\mu \geqslant 0$ — произвольная мера, для которой $S(\mu) \subset \Gamma$ и $U^{\mu}(x) \leqslant 1$ в R^m. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} d\mu = \int\limits_{\Gamma} d\mu \, [1 - U^{\lambda}(x)] + \int\limits_{\Gamma} U^{\lambda}(x) \, d\mu < \varepsilon \int\limits_{\Gamma} d\mu +$$

$$+ \int\limits_{S(\lambda)} U^{\mu}(x) \, d\lambda < \varepsilon \int\limits_{\Gamma} d\mu + \varepsilon.$$

Таким образом, $\int\limits_{\Gamma} d\mu = 0$ и, следовательно, $\mu \equiv 0$. Отсюда немедленно следует (55).

Теорема 3. *Если имеет место* (55), *то для произвольной непрерывной на* Γ *функции* $\varphi(x)$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *найдутся точки* $y_1, \cdots, y_n$ *вне* Γ *и действительные числа* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *такие, что*

$$\begin{gathered} \max_{x \in \Gamma} \left| \varphi(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j K(|x - y_j|) \right| < \varepsilon, \\ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| < \varepsilon. \end{gathered} \tag{56}$$

Обратно, если аппроксимация (56) *возможна для* $\varphi(x) \equiv 1$, *то* $\gamma_k(\Gamma) = 0$.

Доказательство. Для доказательства возможности аппроксимации (56) при условии $\gamma_k(\Gamma) = 0$ воспользуемся леммами 2 и 4. Потенциал $U^{\mu}(x)$, аппроксимирующий $\varphi(x)$ согласно этим леммам, заменяем интегральной суммой и получаем (56). Второе утверждение теоремы 3 содержится в теореме 2.

Представляется полезной следующая характеристика множеств нулевой емкости. Введем величину

$$\gamma_k^{*}(\Gamma) = \sup \int\limits_{\Gamma} |d\nu|, \tag{57}$$

где верхняя грань берется по всем зарядам ν, для которых:

$$S(\nu) \subset \Gamma, \quad |U^\nu(x)| \leqslant 1, \quad x \in R^m \setminus \Gamma. \tag{58}$$

Теорема 4. *Условия*

$$\gamma_k(\Gamma) = 0 \tag{55}$$

и

$$\gamma_k^*(\Gamma) = 0 \tag{59}$$

— равносильны.

Если $\gamma_k(\Gamma) > 0$, то очевидно, что $\gamma_k^*(\Gamma) > 0$. Пусть $\gamma_k(\Gamma) = 0$. Возьмем счетную систему точек $y_1, \cdots, y_n, \cdots$; всюду плотную в $R^m \setminus \Gamma$. Возможность аппроксимации (56) (где под точками y_j можно, разумеется, понимать точки выделенной сейчас системы) говорит о том, что система функций $\{\varphi_j(x) = K(|x - y_j|)\}$ будет $o(p)$ полна в пространстве $C(\Gamma)$ непрерывных на Γ функций с равномерной нормой и полунормой $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|$ (см. [8]). Согласно критерию $o(p)$ полноты (см., например, [8]) для любого заряда ν на Γ из условий

$$\left| \int_\Gamma d\nu_x K(|x - y_j|) \right| \leqslant 1, \quad j = 1, \cdots$$

следует, что $\nu \equiv 0$. Отсюда получаем $\gamma_k^*(\Gamma) = 0$ и теорема доказана.

Дадим еще другое доказательство теоремы 4, не опирающееся на понятие $o(p)$ полноты. Это доказательство сообщено нам проф. Н. С. Ландкофом и асп. А. А. Вагаршакяном. Пусть $\nu = \nu^+ - \nu^-$ — заряд на Γ такой, что $|U^\nu(x)| \leqslant 1$ в $R^m \setminus \Gamma$. Пусть ν^+ и ν^- сосредоточены на Γ^+ и Γ^- соответственно, $\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \varnothing$. Возьмем компакты $F^+ \subset \Gamma^+$ и $F^- \subset \Gamma^-$ и сколь угодно малые положительные числа ε и δ. Построим в R^m непрерывную функцию $f(x)$:

$$f(x) = 1, \quad x \in F^+,$$
$$f(x) = \delta, \quad x \in F^-,$$
$$\delta \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad x \in R^m \setminus (F^+ \cup F^-).$$

Применяя лемму 2, получаем абсолютно непрерывную меру $\mu \geqslant 0$, для которой $\mu(R^m) < \varepsilon$, $U^\mu(x) < f(x)$ везде, $U^\mu(x) > f(x) - \varepsilon$ на Γ. Используя абсолютную непрерывность μ, получим, что из условия $\gamma_k(\Gamma) = 0$ следует, что $\mu(\Gamma) = 0$. Поэтому

$$\varepsilon > \mu(R^m) \geqslant \int_{R^m \setminus \Gamma} |U^\nu(x)| \, d\mu \geqslant \int_{R^m \setminus \Gamma} U^\nu(x) \, d\mu = \int_{R^m} U^\nu(x) \, d\mu =$$

$$= \int_{R^m} U^\mu(x) \, d\nu \geqslant (1 - \varepsilon) \nu^+(F^+) - \delta \nu^-(F^-) - \nu^-(\Gamma^- \setminus F^-).$$

В силу произвольности ε и δ получаем неравенство

$$0 \geqslant \nu^+(F^+) - \nu^-(\Gamma^- \setminus F^-).$$

Из этого неравенства, в силу произвольности $F^- \subset \Gamma^-$ следует, что $\nu^+(F^+) = 0$ и по произвольности $F^+ \subset \Gamma^+$ получаем, что $\nu^+(\Gamma^+) = 0$. Точно так же убеждаемся в равенстве $\nu^-(\Gamma^-) = 0$, и значит $\nu \equiv 0$.

§ 5. Множества нулевой длины на прямой

Компакты нулевой длины на оси $R = (-\infty, +\infty)$ совпадают с компактами нулевой аналитической емкости. Поэтому для них имеет место аппроксимационная характеристика, принадлежащая В. П. Хавину и автору (см. [9], [10], [11]). Однако, для этого случая может быть получена и несколько более точная информация.

Теорема 5. *Пусть* $\Gamma \subset (-\infty, +\infty)$ *и*

$$\operatorname{mes} \Gamma = 0. \tag{60}$$

Для произвольной вещественной непрерывной функции $\varphi(x)$ *на* Γ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся действительные точки* $y_1, \cdots, y_n \in R \setminus \Gamma$ *и действительные числа* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *такие, что*

$$\max_{x \in \Gamma} \left| \varphi(x) - \sum_1^n \frac{\lambda_j}{x - y_j} \right| < \varepsilon, \quad \sum_1^n |\lambda_j| < \varepsilon. \tag{61}$$

Обратно, если аппроксимация (61) *возможна для* $\varphi(x) \equiv 1$, *то* $\operatorname{mes} \Gamma = 0$.

Доказательство. Пусть выполнено (60). Возьмем всюду плотное счетное множество точек $y_1, \cdots, y_n, \cdots$ в $R \setminus \Gamma$. Рассмотрим пространство $C(\Gamma)$ непрерывных вещественных функций на Γ и положим $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|$. Мы должны доказать, что система $\left\{\frac{1}{x - y_j}\right\}$ будет $o(p)$ полна в нашем пространстве. Это приводит к необходимости доказать, что условие

$$\left| \int \frac{d\nu}{x - y_j} \right| \leqslant 1, \ j = 1, 2, \cdots \tag{62}$$

влечет равенство $\nu \equiv 0$, (ν — произвольный заряд на Γ). Рассмотрим в нижней полуплоскости интеграл типа Коши — Стильтьеса

$$F(y) = \int_\Gamma \frac{d\nu}{x - y}. \tag{63}$$

Функция $F(y)$ входит в классы H_δ в нижней полуплоскости, а из (62) вытекает, что ее граничные значения ограничены почти везде на оси. Поэтому $F(y)$ — ограниченная аналитическая функция в нижней полуплоскости (теорема В. И. Смирнова [13]). Будучи ограниченной аналитической функцией $F(y)$ не может иметь почти везде на оси вещественных граничных значений, если только $F(y) \not\equiv 0$. Но, с другой стороны, граничные значения $F(y)$ на оси именно вещественны почти везде и, следовательно, $F(y) \equiv 0$ в нижней полуплоскости.

Таким образом, в верхней полуплоскости $F(y)$ есть интеграл Коши. Но тогда заряд ν должен быть по теореме бр. Рисс абсолютно непрерывен, а он у нас сингулярен ($\operatorname{mes} \Gamma = 0$). Отсюда следует, что $\nu \equiv 0$.

Пусть теперь аппроксимация (61) возможна для $\varphi(x) \equiv 1$. Согласно критериям такой аппроксимации (см. [8]) из условий

$$\left| \int_\Gamma \frac{d\nu}{x - y_j} \right| \leqslant 1, \ j = 1, 2, \cdots \to \int_\Gamma d\nu = 0 \tag{64}$$

с произвольным вещественным зарядом на Γ. Но тогда и для комплексной меры μ должно быть

$$\left| \int_\Gamma \frac{d\mu}{x - y_j} \right| \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \cdots \to \int_\Gamma d\mu = 0. \tag{65}$$

Однако, если бы $\operatorname{mes} \Gamma > 0$ и, следовательно, аналитическая емкость $\Omega(\Gamma) > 0$, то существует (см. [3]) комплексная мера μ^*, для которой

$$\left| \int_\Gamma \frac{d\mu^*}{x - y} \right| \leqslant 1, \quad y \overline{\in} \Gamma \quad \text{и} \quad \int_\Gamma d\mu^* = \Omega(\Gamma) > 0$$

— противоречие. Теорема доказана.

Положим для точек $y_j \overline{\in} \Gamma$

$$U_j(x) = \operatorname{Re} \frac{1}{x - y_j}, \quad v_j(x) = \operatorname{Im} \frac{1}{x - y_j}. \tag{66}$$

В противовес к теореме 5, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть Γ — произвольный компакт на оси R. Для произвольной непрерывной на Γ вещественной функции $\varphi(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют точки $y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}, \cdots, y_N$ в нижней полуплоскости и вещественные числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_N$ такие, что*

$$\max_{x \in \Gamma} \left| \varphi(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j U_j(x) - \sum_{n+1}^{N} \lambda_j v_j(x) \right| < \varepsilon,$$

$$\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| < \varepsilon.$$

На доказательстве этого результата мы не останавливаемся, так как оно близко к доказательству предыдущей теоремы.

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступила 14.X.1974

Ս. Յա. ԽԱՎԻՆՍՈՆ. Զրոյական ունակությամբ կոմպակտների ունիվերսալ պոտենցիալը և նոր բազմությունների ուղիղ ապրոքսիմացիոն բնութագրիչներ *(ամփոփում)*

Հոդվածը պարունակում է հեղինակի զեկուցումից մի շարք թեորեմների ապացույցներ ֆունկցիաների տեսության գծով Միջազգային կոնֆերանսում (Երևան, 1965 թ.) Նախապես հրատարակված [3]-ում առանց ապացույցների։

Հիմնական թեորեմը ունիվերսալ պոտենցիալի մասին ապացուցված է առանց սահմանափակումների կորիզի վրա, որոնք ներկա էին [3]-ում։ Բերված են մի քանի նոր արդյունքներ փոքր գործակիցներով ապրոքսիմացիայի վերաբերյալ։

S. Ja. HAVINSON. *Universal potential for compacta of zero capacity and other approximational characteristics of sparse sets* (summary)

The article includes detailed proofs of several theorems from the author's report at the international function's theory conference (Erevan, 1965). The theorems have been published in [3] without proofs. The main theorem about the universal potential is proved without limitation on the kernel wich had been assumed in [3]. There are also some new results concerning the approximation with small coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. С. Ландкоф.* Основы современной теории потенциала, М., Изд. „Наука", 1966
2. *H. Wallin.* Continuous functions and potential theory, Arkiv mat., 5, № 1, 1963 55—84.
3. *С. Я. Хавинсон.* О представлении и приближении функций на редких множествах, „Современные проблемы теории аналитических функций", сб. трудов, Изд. „Наука", М, 1966, 314—318.
4. *Ky Fan* and *Ph. Davis.* Complet sequences and approximation in normed linear spaces, Duke Math. Journ., 24, № 2, 1957, 189—192.
5. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые вопросы полноты систем, ДАН СССР, 137, № 4, 1961, 793—796.
6. *С. Я. Хавинсон.* Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, Труды МИ АН СССР им. В. А. Стеклова, 60, 1961, 304—324.
7. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые теоремы о приближении с учетом величин коэффициентов приближающих многочленов, ДАН СССР, 196, № 6, 1971.
8. *С. Я. Хавинсон.* О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, № 2, 1971, 221—234.
9. *С. Я. Хавинсон.* Об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль, ДАН СССР, 131, № 1, 1960, 44—46.
10. *В. П. Хавин.* О пространстве ограниченных регулярных функций, ДАН СССР, 131, № 1, 1960, 40—43.
11. *Е. Ш. Чацкая.* Одновременное приближение непрерывных функций рациональными дробями и их производными на некоторых замкнутых множествах комплексной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-матем., 17, № 4, 1964, 9—22.
12. *Л. Карлесон.* Избранные вопросы теории исключительных множеств, М., Изд „Мир", 1970.
13. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., Изд. „Физматгиз", 1950.
14. *T. Ugaheri.* On the general potential and capasity, Jap. journ. Math., 20, 1950, 37—43.