ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 4, 1975 Математика

Р. С. ДАВТЯН, А. А. ТАЛАЛЯН

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ПОЛНЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ НА МНОЖЕСТВАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ

В настоящей статье изучается вопрос о зависимости сходимости почти всюду на множестве положительной меры ортогонального ряда по полной системе от его сходимости в среднем на том же множестве.

Этот вопрос не тривиален для полных в L_2 [0, 1] систем $\{\varphi_n(x)\}$, являющихся системами сходимости — когда из условия $\sum a_k^2 < +\infty$ следует сходимость ряда $\sum a_k \varphi_k(x)$ почти всюду на [0, 1]. Оказывается, что ряд $\sum a_k \varphi_k(x)$ по такой системе может сходиться в среднем на множестве $E \subset [0, 1]$ меры сколь угодно близкой к мере отрезка [0, 1] и расходиться почти всюду на этом множестве, хотя, как это следует из определения систем сходимости, этого не может быть, когда $\mu(E) = \mu([0, 1])$.

Верна следующая

Теорема 1. *Для любой полной в $L_2[0, 1]$ ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$* существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{1}$$

который расходится почти всюду на [0, 1] и сходится асимптотически в метрике L_2 на отрезке [0, 1], т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует $E_\varepsilon \subset [0, 1]$, $\mu(E_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, такое, что ряд (1) сходится в метрике L_2 на множестве E.

Можно добиться того, чтобы коэффициенты ряда (1) стремились к нулю, а в случаях некоторых конкретных систем сходимости, например для системы Хаара, коэффициенты соответствующих рядов (1) могут стремиться к нулю со скоростью, близкой к максимально возможной скорости.

Соответствующая теорема для системы Хаара формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Существует расходящийся почти всюду на [0, 1] ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x), \tag{2}$$

* В дальнейшем для краткости будем писать $\{\varphi_n(x)\}$ — ПОНС.

который сходится асимптотически в метрике L_2 *на отрезке* $[0, 1]$ *и коэффициенты которого удовлетворяют условию*

$$a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Множества E положительной меры, на которых ряд $\sum a_n \varphi_n(x)$ по системе сходимости $\{\varphi_n(x)\}$ сходится в среднем и расходится почти всюду, вообще говоря, должны иметь малую плотность. Это подтверждается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть* F — *замкнутое множество отрезка* $[0, 1]$ *и его дополнительные интервалы* $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, *перенумерованные в каком-нибудь порядке, удовлетворяют условию*

$$\mu(\Delta_k) \leqslant \frac{C}{2^k} \quad (k = 1, 2, \cdots)^*.$$

Тогда, если частные суммы $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k(x)$ *ряда по системе Хаара удовлетворяют неравенствам*

$$\int_F |S_n(x)|^p \, dx \leqslant M \; (n = 1, 2, \cdots),$$

где $p > 1$ *и* M — *постоянная, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ *сходится почти всюду на множестве* F.

Легко показать, что в случае $p = 1$ теорема 3 не верна. Более того, для любой последовательности $a_k \to 0$ существуют последовательность $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся интервалов и расходящийся почти всюду на множестве $F = [0, 1] - \bigcup \delta_k$ ряд по системе Хаара такие, что $\mu(\delta_k) < a_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ и $\int_F |S_n(x)| \, dx \leqslant M$ $(n=1, 2, \cdots)$.

§ 1. Доказательство леммы

При доказательстве теоремы 1 мы пользуемся следующей леммой, установленной в работе [1] (см. там стр. 86).

Лемма 1. Пусть $f(x)$, $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)$ — произвольные функции (N конечное), принадлежащие классу $L_2(\Delta)$, где Δ — некоторый отрезок. Тогда для любых наперед заданных чисел $1 > \varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно определить функцию $f^*(x)$ и множество e, обладающие следующими свойствами:

a) $f^*(x) = f(x)$ при $x \,\overline{\in}\, e$, где $e \subset \Delta$, $\mu(e) < \varepsilon_0 \cdot \mu(\Delta)$,

---

* Когда имеется конечное число дополнительных интервалов, то начиная с некоторого места Δ_k считаются пустыми.

b) $\int\limits_{\Delta} |f^*|^2\,dx \leqslant \frac{2}{\varepsilon_0}\int\limits_{\Delta} f^2\,dx,$

c) $\left|\int\limits_{\Delta} f^*(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right| < \varepsilon \quad (1 \leqslant k \leqslant N).$

При помощи леммы 1 доказывается

Лемма 2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *ПОНС на отрезке* $[0, 1]$ *и* $\Delta \subset [0, 1]$ — *некоторый отрезок. Тогда для любого* $1 > \delta > 0$ *и любого натурального* N *существуют измеримое множество* E, *полином вида* $\sum\limits_{n=N+1}^{L} a_n\varphi_n(x)$ $(L > N)$ *и натуральное число* N' $(L \geqslant N' > N)$, *для которых выполняются следующие условия:*

$$E \subset [0, 1],\ \mu(E) < \delta\cdot\mu(\Delta), \tag{1.1}$$

$$\left\|\sum_{n=N+1}^{r} a_n\varphi_n(x)\right\| < 8\left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta}\right)^{1/2} \quad (N < r < L)^*, \tag{1.2}$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{L} a_n\varphi_n(x)\right| < \frac{\delta}{2}\mu(\Delta), \quad (x \overline{\in} E), \tag{1.3}$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N'} a_n\varphi_n(x)\right| > 1 - \delta \quad (x \in \Delta - E). \tag{1.4}$$

Доказательство. Определим измеримое множество E_1 и положительное число ε, удовлетворяющие условиям

$$E_1 \subset [0, 1],\ \mu(E_1) < \frac{\delta}{8}\mu(\Delta), \tag{1.5}$$

$$\varepsilon\cdot\sum_{n=1}^{N} |\varphi_n(x)| < \frac{\delta}{8}\mu(\Delta) \quad (x \overline{\in} E_1). \tag{1.6}$$

Применяя лемму 1, когда в ее формулировке положено $f(x) \equiv \chi_\Delta(x)$**, $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{8}$, найдем множество E_2 и функцию $f^*(x)$, для которых согласно a), b) и c) выполняются условия:

$$E_2 \subset \Delta,\quad \mu(E_2) < \frac{\delta}{8}\mu(\Delta), \tag{1.7}$$

$$f^*(x) = \chi_\Delta(x) \quad (x \overline{\in} E_2), \tag{1.8}$$

$$\int\limits_{\Delta} |f^*(x)|^2\,dx \leqslant \frac{16}{\delta}\int\limits_{\Delta}\chi_\Delta^2(x)\,dx = \frac{16\,\mu(\Delta)}{\delta}, \tag{1.9}$$

$$\left|\int\limits_{\Delta} f^*(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right| < \varepsilon \quad (1 \leqslant k \leqslant N). \tag{1.10}$$

---

* Через $\|f\|$ обозначается норма в $L_2\,[0, 1]$ функции $f(x)$.

** Через $\chi_\Delta(x)$ обозначается характеристическая функция множества Δ.

В силу полноты системы $\{\varphi_n(x)\}$ существуют измеримое множество E_3 и натуральное число N' $(N' > N)$ такие, что

$$E_3 \subset [0, 1], \quad \mu(E_3) < \frac{\delta}{8} \mu(\Delta), \tag{1.11}$$

$$|S_{N'}(x, f^*) - f^*(x)| < \frac{\delta}{8} \mu(\Delta) \quad (x \overline{\in} E_3). \tag{1.12}$$

Положим

$$a_k = \int_0^1 f^*(x) \varphi_k(x) \, dx \quad (N < k \leqslant N'), \tag{1.13}$$

$$E_4 = E_1 \cup E_2 \cup E_3. \tag{1.14}$$

Тогда согласно (1.5), (1.7) и (1.11) будем иметь

$$E_4 \subset [0, 1], \quad \mu(E_4) < \frac{3\delta}{8} \mu(\Delta), \tag{1.15}$$

а из (1.9) получаем

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{r} a_n \varphi_n(x) \right\| \leqslant 4 \cdot \left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta} \right)^{1/2} \qquad (N < r \leqslant N'). \tag{1.16}$$

Далее из (1.14), (1.12), (1.10), (1.8) и (1.6) следует

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) - f^*(x) \right| < \frac{\delta}{4} \mu(\Delta) \qquad (x \overline{\in} E_4).$$

Учитывая теперь (1.8) и (1.14), из последнего неравенства получим

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) - \chi_\Delta(x) \right| < \frac{\delta}{4} \mu(\Delta) \qquad (x \overline{\in} E_4). \tag{1.17}$$

Повторяя рассуждения, с помощью которых были построены удовлетворяющие условиям (1.15)—(1.17) полином $\sum\limits_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x)$ и множество E_4, можно определить полином вида $\sum\limits_{n=N'+1}^{L} b_n \varphi_n(x)$ $(L > N')$ и множество E_4', обладающие следующими свойствами, аналогичными (1.15)—(1.17):

$$E_4' \subset [0, 1], \quad \mu(E_4') < \frac{3\delta}{8} \mu(\Delta), \tag{1.18}$$

$$\left\| \sum_{n=N'+1}^{r} b_n \varphi_n(x) \right\| \leqslant 4 \left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta} \right)^{1/2} \quad (N' < r \leqslant L), \tag{1.19}$$

$$\left| \sum_{n=N'+1}^{L} b_n \varphi_n(x) - \chi_\Delta(x) \right| < \frac{\delta}{4} \mu(\Delta) \qquad (x \overline{\in} E_4'). \tag{1.20}$$

Легко видеть, что полином

$$\sum_{n=N+1}^{L} a_n \varphi_n(x) \equiv \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) + \sum_{n=N'+1}^{L} - b_n \varphi_n(x) \tag{1.21}$$

и множество

$$E = E_4 \cup E_4' \tag{1.22}$$

удовлетворяет всем условиям леммы 2.

Действительно, (1.1) следует из (1.15), (1.18) и (1.22). Далее, при тех r, для которых $N < r \leqslant N'$, условие (1.2) леммы 2 выполняется в силу (1.16). Пусть теперь $N < r \leqslant L$, тогда учитывая (1.21), (1.16), (1.19), будем иметь:

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{r} a_n \varphi_n(x) \right\| \leqslant \left\| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) \right\| + \left\| \sum_{n=N'+1}^{r} b_n \varphi_n(x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta} \right)^{1/2} + 4 \left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta} \right)^{1/2} = 8 \left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta} \right)^{1/2},$$

так что и в этом случае выполняется условие (1.2). Используя (1.21), (1.22), (1.17) и (1.20), при $x \overline{\in} E$ получим

$$\left| \sum_{n=N+1}^{L} a_n \varphi_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) - \sum_{n=N'+1}^{L} b_n \varphi_n(x) + \right.$$

$$\left. + \chi_\Delta(x) - \chi_\Delta(x) \right| \leqslant \left| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) - \chi_\Delta(x) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{n=N'+1}^{L} b_n \varphi_n(x) - \chi_\Delta(x) \right| < \frac{\delta}{4} \mu(\Delta) + \frac{\delta}{4} \mu(\Delta) = \frac{\delta}{2} \mu(\Delta).$$

Наконец, условие (1.4) леммы 2 тоже выполнено в силу (1.17).

Лемма 3. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ *— ПОНС на отрезке* $[0, 1]$. *Тогда для любого* $1 > \varepsilon > 0$ *и любого натурального* N *существуют измеримое множество* E *и полином вида* $\sum_{k=N+1}^{L} a_k \varphi_k(x)$ $(L > N)$, *для которых выполняются условия:*

$$E \subset [0, 1], \quad \mu(E) < \varepsilon, \tag{1.23}$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{r} a_k \varphi_k(x) \right\|_{[0, 1]-E} < \varepsilon \quad (N < r \leqslant L), \tag{1.24}$$

для любого $x \in [0, 1] - E$ *существуют натуральные числа* $n(x)$ *и* $m(x)$ *такие, что* $N < n(x) < m(x) \leqslant L$ *и*

$$\left| \sum_{k=n(x)}^{m(x)} a_k \varphi_k(x) \right| > 1 - \varepsilon. \tag{1.25}$$

Доказательство. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ — попарно непересекающиеся интервалы, удовлетворяющие условиям

$$\bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i = [0, 1], \tag{1.26}$$

$$8\left(\frac{\mu(\Delta_i)}{\varepsilon}\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.27}$$

Применяя лемму 2, в формулировке которой последовательно полагается $\Delta \equiv \Delta_i$, $\delta \equiv \varepsilon\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, можно определить полиномы

$$\sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.28}$$

множества $E_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ и натуральные числа $N_i'\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ так, чтобы

$$N_0 = N, \quad N_0 < N_1 < \cdots < N_n, \tag{1.29}$$

$$N_{i-1} < N_i' \leqslant N_i\ (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.30}$$

$$E_i \subset [0, 1], \quad \mu(E_i) < \varepsilon \cdot \mu(\Delta_i)\ (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.31}$$

$$\left\| \sum_{k=N_{i-1}+1}^{r} a_k \varphi_k(x) \right\| < 8 \cdot \left(\frac{\mu(\Delta_i)}{\varepsilon}\right)^{1/2} (N_{i-1} < r \leqslant N_i, \ i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.32}$$

$$\left| \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \mu(\Delta_i) \quad (x \overline{\in} E_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.33}$$

$$\left| \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i'} a_k \varphi_k(x) \right| > 1 - \varepsilon \quad (x \in \Delta_i - E_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.34}$$

Обозначим $L \equiv N_n$ и покажем, что полином

$$\sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x) \tag{1.35}$$

и множество

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \tag{1.36}$$

удовлетворяют всем условиям леммы 3. Выполнение условия (1.23) очевидно.

Пусть теперь $N < r \leqslant L$, тогда для некоторого $i_0\ (1 \leqslant i_0 \leqslant n)$ будет $N_{i_0-1} < r \leqslant N_{i_0}$.

Поскольку

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{r} a_k \varphi_k(x) \right\|_{[0,1]-E} \leqslant \sum_{l=1}^{l_0-1} \left\| \sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k \varphi_k(x) \right\|_{[0,1]-E} + $$
$$+ \left\| \sum_{k=N_{l_0-1}+1}^{r} a_k \varphi_k(x) \right\|_{[0,1]-E}^{*},$$

то в силу (1.32) и (1.27), (1.26), (1.33) и (1.36) будем иметь

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{r} a_k \varphi_k(x) \right\|_{[0,1]-E} \leqslant \sum_{l=1}^{l_0-1} \frac{\varepsilon}{2} \mu(\Delta_l) + 8 \cdot \left(\frac{\mu(\Delta_l)}{\varepsilon} \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, условие (1.24) выполняется.

Наконец, выполнение последнего условия (1.25) леммы 3 следует из (1.34), так как если $x \in [0,1] - E$, то $x \in \Delta_l - E$ для некоторого l и тогда можно полагать $n(x) = N_{l-1} + 1$, $m(x) = N_l$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $\{\chi_n(x)\}$ — система Хаара (см. [2]). Для любого положительного числа $\delta < 1$ можно определить $M > 0$ такое, что каковы бы ни было натуральное число N и отрезок $\Delta \subset [0, 1]$, являющийся носителем некоторой функции Хаара, существуют измеримое множество E, полином вида $\sum_{n=N+1}^{L} a_n \chi_n(x)$ $(L > N)$ и натуральное число N' $(N < N' \leqslant L)$, для которых выполняются следующие условия:*

$$E \subset \Delta, \quad \mu(E) < \delta \cdot \mu(\Delta), \tag{1.37}$$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{r} a_n \chi_n(x) \right| < M \cdot \mu(\Delta) \quad (N < r \leqslant L), \tag{1.38}$$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{L} a_n \chi_n(x) \right| = 0 \quad (x \overline{\in} E), \tag{1.39}$$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \chi_n(x) \right| = 1 \quad (x \in \Delta - E), \tag{1.40}$$

$$|a_n \chi_n(x)| \leqslant 1 \quad (x \in [0, 1], \ N < n \leqslant L). \tag{1.41}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n \chi_n(x) = \chi_0^{(1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \chi_n^{(k)}(x), \tag{1.42}$$

где коэффициенты b_n определены из равенства (1.42) и, следовательно, удовлетворяют условию

$$\max_{x \in [0,1]} |b_n \chi_n(x)| = 1 \quad (n = 2, 3, \cdots). \tag{1.43}$$

* Сумма $\sum_{l=1}^{l_0-1}$ при $l_0 = 1$ считается равной нулю.

Так как этот ряд расходится почти всюду на [0, 1], то почти всюду на [0, 1] будем иметь (см. [3], следствие 3 или [4])

$$\limsup_{n>2} S_n(x) = +\infty, \quad \liminf_{n>2} S_n(x) = -\infty, \tag{1.44}$$

где

$$S_n(x) = \sum_{j=3}^{n} b_j \chi_j(x) \quad (n>2).$$

Положим

$$A_n = \{x: S_n(x) = 0, \quad S_1(x) \neq 0, \cdots, \; S_{n-1}(x) \neq 0\} \; (n \geqslant 3). \tag{1.45}$$

Множества $A_n \, (n \geqslant 3)$ попарно не пересекаются и из (1.43) и (1.44) легко следует (см. [5] или [6]), что

$$\sum_{n=3}^{\infty} \mu(A_n) = 1. \tag{1.46}$$

Положим $F = \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n$, где n_0 выбрано так, что

$$\mu(F) < \delta, \tag{1.47}$$

и рассмотрим полином

$$\sum_{n=2}^{n_0} c_n \chi_n(x), \tag{1.48}$$

где $c_n = 0$, если для некоторого j $(3 \leqslant j \leqslant n_0)$ имеет место равенство

$$\mu(\{x: \chi_n(x) \neq 0\} - A_j) = 0, \tag{1.49}$$

и $c_n = b_n$ — для остальных n.

Отметим некоторые свойства полинома (1.48):

$$\sum_{n=2}^{n_0} c_n \chi_n(x) = 0 \quad (x \,\overline{\in}\, F), \tag{1.50}$$

$$|c_2 \chi_2(x)| = 1 \quad \text{(почти всюду на [0,1])}. \tag{1.51}$$

$$\max_{x \in [0,1]} |c_n \chi_n(x)| \leqslant 1 \quad (x \in [0, 1], \quad 2 \leqslant n \leqslant n_0). \tag{1.52}$$

Обозначим

$$M = \sup_{2 < j < n_0} \; \sup_{x \in [0,1]} \left| \sum_{n=2}^{j} c_n \chi_n(x) \right|. \tag{1.53}$$

Пусть теперь N — некоторое натуральное число, а Δ—носитель некоторой функции Хаара. Разделим Δ на непересекающиеся равные отрезки $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_q$, являющиеся носителями некоторых функций Хаара $\chi_n(x)$ $(n > N)$.

Обозначим через $\chi_n(\Delta_i, x)$ $(n = 1, 2, \cdots, i = 1, 2, \cdots, q)$ — функцию, полученную из $\chi_n(x)$ при линейном отображении отрезка [0, 1] на отрезок Δ_i и через $F(\Delta_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ — множество, полученное из F при том же отображении. Для некоторых действительных Q_j и натурального L имеем

$$\sum_{n=2}^{n_0}\left(\sum_{l=1}^{q} c_n \chi_n(\Delta_l),\ x)\right) \equiv \sum_{j=N+1}^{L} a_j \chi_j(x), \tag{1.54}$$

причем

$$|a_j \chi_j(x)| \leqslant 1 \quad (N < j \leqslant L, \quad x \in [0,\ 1]).$$

Положим, далее $E = \bigcup_{l=1}^{q} F(\Delta_l)$ и возьмем N' $(N < N' < L)$ такое' что

$$\sum_{j=N+1}^{N'} a_j \chi_j(x) = \sum_{l=1}^{q} c_2 \chi_2(\Delta_l,\ x).$$

Тогда, определенные таким образом множество E, число N' и полином (1.54) будут удовлетворять всем условиям леммы 4, причем фигурирующее в ее формулировке число M определяется из равенства (1.53) и очевидно зависит только от δ. Этот факт является непосредственным следствием свойств (1.50)—(1.52) полинома (1.48).

Из леммы 4 вытекает, что в случае системы Хаара, доказанную выше лемму 3 можно усилить, потребовав, чтобы помимо условий (1.23)—(1.25), где положено $\varphi_k(x) = \chi_k(x)$, выполнялось также условие

$$|a_k \chi_k(x)| \leqslant 1 \quad (x \in [0,\ 1]). \tag{1.55}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно отрезок $[0,\ 1]$ представить в виде суммы $\bigcup_{l=1}^{2^n} \Delta_l$ попарно непересекающихся интервалов длины 2^{-n}, где $2^{-n} \cdot M < \varepsilon$, и применяя лемму 4, для каждого Δ_l определить полиномы $\sum_{k=N_l+1}^{L_l} a_k \chi_k(x)$, $N = N_l$, $N_l < L_l \leqslant N_{l+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^n - 1)$, удовлетворяющие требованиям леммы 4, когда $\Delta = \Delta_l$, $N = N_l$ и $\delta = \varepsilon$. Тогда полином $\sum_{l=1}^{2^n} \sum_{k=N_l+1}^{L_l} a_k \chi_k(x)$ $(L = L_{2^n})$ будет обладать требуемыми свойствами.

§ 2. Доказательство теорем

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ПОНС на отрезке $[0,\ 1]$, ε_l — положительные числа такие, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l < 1. \tag{2.1}$$

Последовательным применением леммы 3, предварительно полагая в ее формулировке $\varepsilon = \varepsilon_l$ $(i = 1,\ 2, \cdots)$, можно определить полиномы

$$\sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k \varphi_k(x) \quad (i = 1,\ 2, \cdots) \tag{2.2}$$

и множества E_i $(i=1, 2,\cdots)$ такие, что

$$N_0=1, \qquad N_0<N_1<\cdots, \tag{2.3}$$

$$E_i\subset[0, 1], \quad \mu(E_i)<\varepsilon_i, \tag{2.4}$$

$$\left\|\sum_{k=N_{i-1}+1}^{r} a_k\varphi_k(x)\right\|_{[0, 1]-E_i} < \varepsilon_i \quad (N_{i-1}<r\leqslant N_i); \tag{2.5}$$

для любого $x\in[0, 1]-E_i$ существуют натуральные числа $n_i(x)$ и $m_i(x)$ такие, что $N_{i-1}<n_i(x)<m_i(x)\leqslant N_i$ и

$$\left|\sum_{k=n_i(x)}^{m_i(x)} a_k\varphi_k(x)\right|>1-\varepsilon_i. \tag{2.6}$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k\varphi_k(x)\equiv\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k\varphi_k(x) \tag{2.7}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.

Положим

$$B=\limsup\{[0, 1]-E_i\} \tag{2.8}$$

и, учитывая (2.6), заметим, что ряд (2.7) расходится на множестве B, которое, в силу (2.4) и (2.1), имеет полную меру.

Для завершения доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что ряд (2.7) сходится в метрике L_2 на множествах

$$B_\nu=\bigcap_{i=\nu}^{\infty}([0, 1]-E_i) \quad (\nu=1, 2,\cdots),$$

$$\text{ибо } \mu(B_\nu)>1-\sum_{i=\nu}^{\infty}\varepsilon_i \text{ и } \sum_{i=\nu}^{\infty}\varepsilon_i\to 0 \quad \text{при } \nu\to\infty.$$

Рассмотрим сумму $\sum_{k=N}^{m} a_k\varphi_k(x)$, где $N_\nu<N<m$. Если $N_p<N\leqslant N_{p+1}$, $N_q<m\leqslant N_{q+1}$, где $p\geqslant\nu$ и $q\geqslant p$, то можно написать

$$\sum_{k=N}^{m} a_k\varphi_k(x)=\sum_{i=p+1}^{q}\sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k\varphi_k(x)+\sum_{k=N_q+1}^{m} a_k\varphi_k(x)-\sum_{k=N_p+1}^{N-1} a_k\varphi_k(x)^{*}. \tag{2.9}$$

Учитывая, что $B_\nu\subset[0, 1]-E_i$ при $i\geqslant\nu$, из условий (2.5) получим

$$\left\|\sum_{k=N}^{m} a_k\varphi_k(x)\right\|_{B_\nu}\leqslant\sum_{i=p+1}^{q}\left\|\sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k\varphi_k(x)\right\|_{B_\nu}+$$

* Первая сумма в правой части при $p=q$, а последняя — при $N=N_p+1$, считаются равными нулю.

$$+\left\|\sum_{k=N_q+1}^{m} a_k\varphi_k(x)\right\|+\left\|\sum_{k=N_p+1}^{N} a_k\varphi_k(x)\right\|_{B_\nu}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=p+1}^{q}\left\|\sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k\varphi_k(x)\right\|_{([0,1]-E_l)}+\left\|\sum_{k=N_q+1}^{m} a_k\varphi_k(x)\right\|_{([0,1]-E_{q+1})}+$$

$$+\left\|\sum_{k=N_p+1}^{N} a_k\varphi_k(x)\right\|_{([0,1]-E_{p+1})}\leqslant\varepsilon_{p+1}+\sum_{l=p+1}^{\infty}\varepsilon_l.$$

Так как $p\to\infty$ при $N\to\infty$, из последнего неравенства вытекает, что $\left\|\sum\limits_{k=N}^{m} a_k\varphi_k(x)\right\|_{B_\nu}\to 0$ при $N,\ m\to\infty$. Таким образом, ряд (2.7) сходится в метрике $L_2(B_\nu)$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что в случае системы Хаара лемма 3 верна и при дополнительном требовании (1.55). Поэтому при построении ряда (2.7) для системы Хаара (когда $\varphi_k=\chi_k$) можно добиться того, чтобы его коэффициенты удовлетворяли условию $\max\limits_{x\in[0,1]}|a_n\chi_n(x)|\leqslant C$ или, что то же самое, $a_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Из вышеуказанного следует, что теорема 2 также доказана.

Доказательство теоремы 3. Как будет видно из дальнейших рассуждений, без ограничения общности можно полагать, что

$$\mu(\Delta_i)<\frac{1}{2^i}\ (i=1,\ 2,\cdots).\tag{2.10}$$

Обозначим

$$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_i,\quad F=[0,\ 1]-G$$

и допустим, что частные суммы $S_n(x)$ некоторого ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_k(x)\tag{2.11}$$

удовлетворяют условию

$$\int_F|S_k(x)|^p\,dx<M\quad(k=1,\ 2,\cdots),\tag{2.12}$$

где $p>1$, M — постоянная.

Обозначим через $\mathbf{F}_k$ множество попарно непересекающихся интервалов, на каждом из которых постоянны первые 2^k функций Хаара $\chi_1(x),\ \chi_2(x),\cdots,\ \chi_{2^k}(x)$ и которые удовлетворяют условиям:

$$\mu(\Delta)=\frac{1}{2^k}\ \text{для всех}\ \Delta\in\mathbf{F}_k,\tag{2.13}$$

$$\mu\Big(\bigcup_{\Delta\in\mathbf{F}_k}\Delta\Big)=1.\tag{2.14}$$

Пусть $n_0 > 1$ — фиксированное натуральное число. Определим последовательность множеств $\{A_i\}$ $(i = n_0, n_0 + 1, \cdots)$ следующим образом:

$$A_{n_0} = \cup \left\{\Delta : \Delta \in \mathbf{F}_{n_0}, \mu\left(\Delta \cap \left(\bigcup_{\nu=1}^{n_0+2} \Delta_\nu\right)\right) > 0\right\} \tag{2.15}$$

и

$$A_i = H_{i-1} \cap (\Delta_1^i \cup \Delta_2^i) \quad \text{при} \quad i > n_0, \tag{2.16}$$

где

$$H_{i-1} = [0, 1] - \sum_{\nu=n_0}^{i-1} A_\nu \quad (i = n_0 + 1, \cdots), \tag{2.17}$$

$$\Delta_1^i, \ \Delta_2^i \in \mathbf{F}_i, \ \Delta_1^i \cup \Delta_2^i \supset \Delta_{i+2}. \tag{2.18}$$

Существование интервалов Δ_1^i, Δ_2^i, удовлетворяющих (2.18), следует из (2.13), (2.14) и (2.10).

Из определения множеств A_i $(i = n_0, n_0 + 1, \cdots)$, непосредственно следуют неравенства

$$\mu(A_{n_0} \cap F) \leqslant \mu\left(A_{n_0} \cap \left([0, 1] - \bigcup_{i=1}^{n_0+2} \Delta_i\right)\right) \leqslant \frac{2(n_0 + 2)}{2^{n_0}}, \tag{2.19}$$

$$\mu(A_i) \leqslant \frac{2}{2^i} \quad (i = n_0 + 1, \ n_0 + 2, \cdots), \tag{2.20}$$

из которых получаем

$$\mu\left(F \cap \bigcup_{i=n_0}^{\infty} (\Delta_i)\right) \leqslant \frac{2n_0 + 6}{2^{n_0}}. \tag{2.21}$$

Положим теперь

$$T_n(x) = S_{2^n}(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.22}$$

$$T_n'(x) = \begin{cases} T_n(x), & x \in H_{n-1} \\ T_i(x), & x \in A_i \ (i = n_0, \ n_0 + 1, \cdots, \ n-1), \end{cases} \tag{2.23}$$

$$(n = n_0 + 1, \quad n_0 + 2, \cdots).$$

Пусть $1 < r < p$, тогда для любого $n > n_0$

$$\int_0^1 |T_n'(x)|^r \, dx = \int_{H_{n-1}} |T_n(x)|^r \, dx + \int_{A_{n_0}} |T_{n_0}(x)|^r \, dx + \sum_{i=n_0+1}^{n-1} \int_{A_i} |T_i(x)|^r \, dx. \tag{2.24}$$

Из определения H_{n-1} следует, что

$$H_{n-1} \cap \left(\bigcup_{\nu=1}^{n+1} \Delta_\nu\right) = \varnothing,$$

$$H_{n-1} \cap G = H_{n-1} \cap \left(\bigcup_{\nu=n+2}^{\infty} \Delta_\nu\right).$$

Поэтому в силу (2.10)

$$\mu(H_{n-1} \cap G) < \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{2.25}$$

Отсюда и из (2.13) при $k = n$ следует, что если $\Delta \in \mathbf{F}_n$ и $\Delta \subset H_{n-1}$, то $\mu(\Delta \cap F) > \frac{1}{2}\mu(\Delta)$, и, так как $T_n(x)$ постоянна на каждом $\Delta \in \mathbf{F}_n$, имеем

$$\int_{H_{n-1}} |T_n(x)|^r\,dx \leqslant 2 \int_{H_{n-1} \cap F} |T_n(x)|^r\,dx. \tag{2.26}$$

Аналогичными рассуждениями получим

$$\int_{A_i} |T_i(x)|^r\,dx \leqslant 2 \int_{A_i \cap F} |T_i(x)|^r\,dx \quad (i = n_0 + 1, \cdots, n-1). \tag{2.27}$$

Учитывая (2.22), (2.12) и (2.20), из последних двух неравенств получаем

$$\int_{H_{n-1}} |T_n(x)|^r\,dx \leqslant 2\,[\mu(F)]^{1-\frac{r}{p}} \left(\int_F |T_n(x)|^p\,dx\right)^{\frac{r}{p}} \leqslant 2 \cdot M^{\frac{r}{p}},$$

$$\int_{A_i} |T_i(x)|^r\,dx \leqslant 2\,[\mu(A_i \cap F)]^{1-\frac{r}{p}} \left(\int_{A_i \cap F} |T_i(x)|^p\,dx\right)^{\frac{r}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \left(\frac{2}{2^i}\right)^{1-\frac{r}{p}} \cdot M^{\frac{r}{p}} \quad (i = n_0 + 1, \cdots, n-1).$$

Подставляя эти оценки в (2.24), будем иметь

$$\int_0^1 |T_n'(x)|\,dx \leqslant 2 \cdot M^{\frac{r}{p}} + \int_0^1 |T_{n_0}(x)|^r\,dx +$$

$$+ \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2 \cdot M^{\frac{r}{p}} \cdot \left(\frac{2}{2^i}\right)^{1-\frac{r}{p}} < C_1. \tag{2.28}$$

Из определения $T_n'(x)$ (см. (2.22), (2.23)) видно, что они являются частными суммами ряда по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x),$$

который отличается от ряда (2.11) лишь тем, что для функций $\chi_n(x)$, носители которых лежат внутри множеств A_i, $i \geqslant n_0$, положено $b_n = 0$ ($b_n = a_n$ для остальных n). Поэтому из (2.28) следует сходимость последовательности $T_n'(x)$ почти всюду на $[0, 1]$. Но из (2.23) и (2.17) видно, что

$$T_n(x) = T_n'(x) \quad (x \in F - \bigcup_{i=n_0}^{\infty} A_i,\ n > n_0),$$

где согласно (2.21)

$$\mu\left(F - \sum_{i=n_0}^{\infty} A_i\right) > \mu(F) - \frac{2n_0 + 6}{2^{n_0}}. \tag{2.29}$$

Отсюда следует, что последовательность $\{T_n(x)\}$ сходится почти всюду на $F - \bigcup_{l=n_0} A_l$, мера которого, ввиду произвольности n_0, можно сделать сколь угодно близкой к $\mu(F)$ (см. (2.29)). Из только что сказанного заключаем, что последовательность $\{T_n(x) = S_{2^n}(x)\}$ сходится почти всюду на F. Отсюда следует сходимость почти всюду на F ряда (2.11) и теорема 3 доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.V.1974

Ռ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Լրիվ օրթոգոնալ սիստեմներով շարքերի դրական չափի բազմությունների վրա զուգամիտության մասին *(ամփոփում)*

Ապացուցվում է, որ $L_2[0,1]$-ում լրիվ օրթոնորմավորված սիստեմներով շարքերը կարող են միջին իմաստով զուգամիտել մեկին բավականաչափ մոտ չափ ունեցող բազմությունների վրա և տարամիտել համարյա ամենուրեք [0,1] հատվածում։

R. S. DAVTIAN, A. A. TALALIAN. *On the convergence of series by complete orthogonal systems on the sets of positive measure* (summary)

It is proved, that the series by complete in L_2 (0, 1) orthonormal systems may converge in the mean on the sets with measures arbitrarily close to the measure of [0, 1] and diverge almost everywhere on [0, 1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Талалян.* Представление измеримых функций рядами, УМН, XV, вып. 5 (95), 1960, 77—141.
2. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.
3. *Y. S. Chow.* Convergence Theorems of Martingales, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 1, 1963, 340—346.
4. *Ф. Г. Арутюнян.* О рядах по системе Хаара, ДАН Арм.ССР, 42, № 3, 1963, 134—140.
5. *М. Б. Петровская.* О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, Изв. АН СССР, серия матем., 28, 1964, 773—798.
6. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами, Мат. сб., 90 (132) : 4, 1973, 483—520.