

А. А. АНДРЯН

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей статье мы рассматриваем граничную задачу типа задачи Коши для систем уравнений гиперболического типа первого порядка.

Задачи такого типа в случае системы из двух уравнений первого порядка с различными характеристиками или произвольного числа уравнений с одной кратной характеристикой рассматриваются, например, в работе [1].

При изучении этой задачи в общем случае методом, данным в работе [1], встречается ряд трудностей. Мы предлагаем другой метод решения этой задачи в общем случае.

Рассматриваем два случая задачи Коши. В первом из них доказывается корректность поставленной задачи путем доказательства сходимости метода последовательных приближений для системы интегральных уравнений, к которой сводится граничная задача. Во втором случае доказывается фредгольмовость.

§ 1. Постановка задачи

Пусть D — конечная область, ограниченная гладкой кривой Γ . Если $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_m)$ — две m -мерные действительные вектор-функции, то под их скалярным произведением будем понимать

$$[u, v] = \iint_D (u, v) dx dy, \quad (u, v \in L_2(D))' \quad (1.1)$$

где через (u, v) обозначена сумма

$$(u, v) = \sum_{i=1}^m u_i v_i$$

Рассмотрим систему уравнений первого порядка, записанную в виде

$$v_x - A(x, y) v_y - B(x, y) v = g(x, y), \quad (1.2)$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$ — заданные в области D вещественные квадратные матрицы порядка m , $g(x, y)$ — заданная, а $v(x, y)$ — искомая m -мерные вещественные вектор-функции.

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (1.2), записывается в виде

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (1.3)$$

где E — является m -мерной единичной матрицей.

Определение 1. Система (1.2) называется гиперболической, если все корни $\lambda_1(x, y), \dots, \lambda_m(x, y)$ характеристического уравнения (1.3) действительны и матрица $A(x, y)$ в каждой точке области D имеет m линейно независимых собственных векторов.

Систему (1.2) можно привести к каноническому виду [3]

$$u_x - Q_1 u_y = A_1 u + f, \quad (1.4)$$

где $Q_1(x, y)$ — диагональная матрица с элементами $\lambda_1(x, y), \dots, \lambda_m(x, y)$ на диагонали.

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать систему (1.4), где $Q_1 \in C_1^1(D + \Gamma)$; $A_1 \in C^1(D + \Gamma)$ — квадратная матрица порядка m , $f \in C^1(D + \Gamma)$ — заданная, а $u \in C^1(D) \cap C_\alpha(D + \Gamma)$ ($0 < \alpha < \min(\frac{1}{2}, \nu)$)

— искомая m -мерные вектор-функции.

Вначале предположим, что матрица Q_1 постоянная, а область D — единичный круг.

Граничная задача P . Требуется найти решение u системы (1.4), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.5)$$

где Γ_i — часть окружности Γ , заключенная между касательными, параллельными прямой $y + \lambda_i x = 0$.

§ 2. Исследование граничной задачи P

В условиях (1.5) выберем Γ_i специальным образом.

Пусть l_0 — произвольный луч с вершиной в центре окружности Γ .

Через Γ_i мы обозначим ту часть окружности Γ , которая заключена между касательными, параллельными прямой $y + \lambda_i x = 0$ и имеет общую точку с лучом, выходящим из центра окружности Γ параллельно прямой $y + \lambda_i x = 0$ и образующим с l_0 угол, не превосходящий $\frac{\pi}{2}$.

Исследуем задачу P при таким образом выбранных Γ_i в условиях (1.5).

Не ограничивая общности, мы можем предположить, что i -ая компонента вектор-функции $u = (u_1, \dots, u_m)$ в i -ом уравнении системы (1.4) присутствует только в левой части. Далее, заметим, что левая часть i -го уравнения системы (1.4) есть, с точностью до постоянного множителя, производная функции $u_i(x, y)$ по направлению i -ой характеристики. Интегрируя i -ое уравнение системы (1.4) вдоль i -ой характеристики от внутренней точки $M(x_0, y_0)$ до границы Γ_i ($i = 1, \dots, m$) и учитывая граничные условия (1.5), получим следующую систему интегральных уравнений:

$$u_i(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int_{l_i(x_0, y_0)} \sum_{k=1}^m a_{ik}(x, y) u_k(x, y) ds -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int_{l_i(x_0, y_0)} f_i(x, y) ds, \quad (2.1)$$

$$(i = 1, \dots, m),$$

где $l_i(x_0, y_0)$ — часть i -ой характеристики, соединяющая точку $M(x_0, y_0)$ с Γ_i .

Случай различных характеристик. Покажем, что однородная система интегральных уравнений (2.1) в классе $C(D+\Gamma)$ имеет только нулевое решение. Для этого введем в рассмотрение набор операторов, действующих по формуле

$$(T_{ik}\varphi)(x_0, y_0) = \int_{l_i(x_0, y_0)} \tilde{a}_{ik}(x, y) \varphi(x, y) ds, \quad (2.2)$$

где $\varphi(x, y) \in C(D+\Gamma)$, $\tilde{a}_{ik}(x, y) = -a_{ik}(x, y) / \sqrt{1+\lambda_i^2}$.

Через $D_{ij}(x, y)$ будем обозначать область, ограниченную отрезками $l_i(x, y)$, $l_j(x, y)$ ($i \neq j$) и дугой $\bigcup_{l=1}^m \Gamma_l$.

Легко видеть, что

$$(T_{ik}T_{jp}\varphi)(x_0, y_0) = \int_{l_i(x_0, y_0)} \tilde{a}_{ik}(x, y) \int_{l_j(x, y)} \tilde{a}_{jp}(\xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) ds_{\xi\eta} ds_{xy} =$$

$$= \iint_{D_{ij}(x_0, y_0)} K_{ij}(x_0, y_0, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.3)$$

где ядро $K_{ij}(x_0, y_0, \xi, \eta)$ однозначно определяется при помощи ядер операторов T_{ik} и T_{jp} . Обратно, если есть двойной интеграл вида (2.3), то его всегда можно представить в виде

$$\int_{l_i(x_0, y_0)} \left(\int_{l_j(x, y)} K_{ij}^1(x_0, y_0, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) ds_{\xi\eta} \right) ds_{xy}$$

с ядром $K_{ij}^1(x_0, y_0, \xi, \eta)$ того же класса, что и $K_{ij}(x_0, y_0, \xi, \eta)$, определяемым через $K_{ij}(x_0, y_0, \xi, \eta)$ однозначно.

Лемма 2.1. $(T_{ip}T_{jk}T_{rs}\varphi)(x, y)$ ($j \neq r$) всегда можно представить в виде

$$\iint_{D_i(x, y)} K(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где $D_1(x, y)$ — область, ограниченная дугой $\bigcup_{l=1}^m \Gamma_l$ и теми отрезками из $l_1(x, y)$, $l_j(x, y)$ и $l_r(x, y)$, которые составляют наибольший угол, $K(x, y, \xi, \eta)$ непрерывна по (x, y) и ограничена по совокупности переменных (x, y, ξ, η) .

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} (T_{jk} T_{rs} \varphi)(x_0, y_0) &= \iint_{D_{jr}(x_0, y_0)} K_{jr}(x_0, y_0, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \iint_D K_{jr}^0(x_0, y_0, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$K_{jr}^0(x_0, y_0, \xi, \eta) = \begin{cases} K_{jr}(x_0, y_0, \xi, \eta), & (\xi, \eta) \in D_{jr}(x_0, y_0), \\ 0, & (\xi, \eta) \in D \setminus D_{jr}(x_0, y_0). \end{cases}$$

С другой стороны, на основании (2.4)

$$\begin{aligned} (T_{lp} T_{jk} T_{rs} \varphi)(x, y) &= \int_{l_1(x, y)} \tilde{a}_{lp}(x_0, y_0) \left(\iint_D K_{jr}^0(x_0, y_0, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) \times \\ &\times ds_{x_0, y_0} = \iint_D \left(\int_{l_1(x, y)} \tilde{a}_{lp}(x_0, y_0) K_{jr}^0(x_0, y_0, \xi, \eta) ds_{x_0, y_0} \right) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \iint_D K_1(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

где

$$K_1(x, y, \xi, \eta) = \int_{l_1(x, y)} \tilde{a}_{lp}(x_0, y_0) K_{jr}^0(x_0, y_0, \xi, \eta) ds_{x_0, y_0}.$$

Из выбора Γ_l следует, что все l_i находятся в одной и той же полуплоскости, следовательно функция $K_1(x, y, \xi, \eta)$ обращается в нуль по крайней мере в области $(\xi, \eta) \in D \setminus (D_{ll}(x, y) \cup D_{jr}(x, y))$, т. е.

$$(T_{lp} T_{jk} T_{rs} \varphi)(x, y) = \iint_{D_{ll}(x, y)} K(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2.2. Пусть имеем оператор, действующий по формуле

$$(T\varphi)(x, y) = \iint_{D_{ll}(x, y)} K(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где ядро $K(x, y, \xi, \eta)$ — непрерывная функция по (x, y) , ограниченная по совокупности переменных (x, y, ξ, η) . Тогда уравнение $\varphi = T\varphi$ в $C(D + \Gamma)$ имеет только нулевое решение.

Не ограничивая общности, можно предположить, что отрезки $l_1(x, y)$ и $l_2(x, y)$ параллельны осям ox и oy соответственно, так как в противном случае этого можно добиться заменой переменных (x, y) и (ξ, η) . Тогда оператор T можно переписать в виде

$$(T\varphi)(x, y) = \int_x^{\sqrt{1-y^2}} \int_y^{\sqrt{1-\xi^2}} K(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Очевидно, что оператор T действует из $C(D+\Gamma)$ в $C(D+\Gamma)$ и ограничен. Обозначая через $M = 2 \sup_{D+\Gamma} |K(x, y, \xi, \eta)|$, получаем

$$|(T\varphi)(x, y)| \leq \frac{M}{2} \|\varphi\|_{C(D+\Gamma)} \int_x^{\sqrt{1-y^2}} (\sqrt{1-\xi^2} - y) d\xi \leq M(1-x) \|\varphi\|_{C(D+\Gamma)}.$$

Последовательно применяя такие оценки, мы приходим к неравенствам

$$|(T^n \varphi)(x, y)| \leq \frac{M^n (1-x)^n}{n!} \|\varphi\|_{C(D+\Gamma)}. \quad (2.5)$$

Из оценки (2.5) легко следует справедливость леммы 2.2.

Далее, однородную систему (2.1) преобразуем в эквивалентную ей систему следующим образом: подставим в первое уравнение вместо функций $u_2, \dots, u_m$ их выражения в правой части однородной системы (2.1), а остальные оставим без изменений, в новой системе то же самое сделаем со вторым уравнением и т. д. Через m шагов на основании леммы 2.1 получим систему интегральных уравнений, имеющую вид

$$u = Ku, \quad (2.6)$$

где $u = (u_1, \dots, u_m)$ — искомая вектор-функция класса $C(D+\Gamma)$, $K = (K^{ij})$ — матрица из операторов интегрирования по областям $D_{ij}(x, y)$ с ядрами $K_{ij}(x, y, \xi, \eta)$ класса $C^1(D+\Gamma)$ по (x, y) и кусочно-непрерывными по (ξ, η) . Из выбора Γ следует, что существует область $D_{i_0 j_0}(x, y)$ из областей $D_{ij}(x, y)$ ($i, j = 1, \dots, m$), которая содержит все остальные.

Изменяя ядра операторов K^{ij} (полагая равными нулю на $D_{i_0 j_0}(x, y)$ $D_{ij}(x, y)$), мы можем считать, что область интегрирования для всех операторов K^{ij} есть область $D_{i_0 j_0}(x, y)$. Мы также, не ограничивая общности, можем считать, что отрезки $l_{i_0}(x, y)$, $l_{j_0}(x, y)$ параллельны осям ox и oy соответственно.

Обозначая через $M = 2 \max_{D+\Gamma} \{\sup |K_{ij}(x, y, \xi, \eta)|; i, j = 1, \dots, m\}$ и используя оценку (2.5), получим

$$|(K^n u)(x, y)| \leq \frac{(M m^2)^n}{n!} (1-x)^n \|u\|_{C(D+\Gamma)}. \quad (2.7)$$

Из неравенства (2.7) следует, что уравнение

$$u = Ku + g,$$

имеет единственное решение в $C(D + \Gamma)$ при каждом $g(x, y) \in C(D + \Gamma)$ и это решение представляется в виде

$$u = g + Rg,$$

где $R = K + K^2 + \dots + K^n + \dots$ — ограниченный в $C(D + \Gamma)$ оператор.

Случай одной кратной характеристики. Как мы отмечали, задача P в этом случае может быть решена методом, данным в работе [1]. Мы применяем метод характеристик лишь потому, что хотим получить решение задачи P в специальном виде, который существенно используется при изучении задачи P в общем случае.

Не ограничивая общности, можем считать, что семейство характеристик совпадает с семейством прямых $y = \text{const}$. В этом случае система интегральных уравнений (2.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} u_i(x, y) = & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^x \sum_{k=1}^m a_{ik}(\tau, y) u_k(\tau, y) d\tau - \\ & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^x f_i(\tau, y) d\tau, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$(i = 1, \dots, m).$$

Если через $N = (N_{ij})$ обозначим матрицу из операторов N_{ij} , где

$$(N_{ij} \varphi)(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^x a_{ij}(\tau, y) \varphi(\tau, y) d\tau, \quad (i, j = 1, \dots, m),$$

то аналогично (2.7) получим

$$|(N^n u)(x, y)| \leq \frac{(Mm^2)^n}{n!} (1-x)^n \|u\|_{C(D+\Gamma)}. \quad (2.9)$$

Из оценки (2.9) следует однозначная и везде разрешимость системы интегральных уравнений (2.8) в классе $C(D + \Gamma)$. Из этой же оценки следует, что решение системы (2.8) определяется формулой

$$u = g + Ng + \dots + N^n g + \dots = g(x, y) + \int_{\sqrt{1-y^2}}^x \gamma(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta) ds_{\xi\eta}, \quad (2.10)$$

где $\gamma(x, y, \xi, \eta) = (\gamma_{ij})$ — резольвента системы (2.8), непрерывная по (x, y, ξ, η) , $g = (g_1, \dots, g_m)$ — заданная вектор-функция (правая часть).

Если $g \in C^1(D + \Gamma)$ и обращается в нуль на кривой $x = \sqrt{1-y^2}$ ($|y| \leq 1$), то легко показать равномерную сходимость формально продифференцированного ряда (2.10) в D , это означает, что $u \in C^1(D) \cap C(D + \Gamma)$.

Покажем, что для таких правых частей решение u системы (2.8) на самом деле принадлежит классу $C^1(D) \cap C_\alpha(D + \Gamma)$. Действительно,

очевидно, что функции $u_1, \dots, u_m$ удовлетворяют условию Гельдера по переменной x равномерно относительно y . Убедимся в том, что функции $u_1, \dots, u_m$ удовлетворяют условию Гельдера и по переменной y равномерно относительно x . Действительно

$$\begin{aligned} u_i(x, y_1) - u_i(x, y_0) &= \int_{\sqrt{1-y_1^2}}^x \sum_{k=1}^m (a_{ik}(\tau, y_1) - a_{ik}(\tau, y_0)) u_k(\tau, y_1) d\tau + \\ &+ \int_{\sqrt{1-y_0^2}}^x \sum_{k=1}^m a_{ik}(\tau, y_0) (u_k(\tau, y_1) - u_k(\tau, y_0)) d\tau + \\ &+ \int_{\sqrt{1-y_0^2}}^{\sqrt{1-y_1^2}} \sum_{k=1}^m a_{ik}(\tau, y_0) u_k(\tau, y_1) d\tau + g_i(x, y_1) - g_i(x, y_0). \end{aligned}$$

Отсюда

$$|u_i(x, y_1) - u_i(x, y_0)| \leq C_1 |y_0 - y_1|^2 + C_2 \sum_{k=1}^m \int_{\sqrt{1-y_0^2}}^x |u_k(\tau, y_1) - u_k(\tau, y_0)| d\tau. \quad (2.11)$$

Суммируя неравенства (2.11) по i от 1 до m , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |u_i(x, y_1) - u_i(x, y_0)| &\leq m C_1 |y_0 - y_1|^2 + \\ &+ (m-1) C_2 \int_{\sqrt{1-y_0^2}}^x \sum_{i=1}^m |u_i(\tau, y_1) - u_i(\tau, y_0)| d\tau. \end{aligned}$$

По лемме Гронуолла [2] имеем отсюда

$$\sum_{i=1}^m |u_i(x, y_1) - u_i(x, y_0)| \leq C |y_0 - y_1|^2,$$

что и требовалось доказать.

Случай нескольких кратных характеристик. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — собственные значения матрицы Q_1 с кратностями $p_1, \dots, p_r$ соответственно. Однородную систему интегральных уравнений (2.1) в этом случае можно переписать в виде

$$u_{k_j+1}(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int_{l_j(r_0, y_0)^{k+k_j+1}}^x \sum_{i=1}^m a_{k_j+1, k}(x, y) u_k(x, y) ds,$$

$$i=1, \dots, p_i; j=1, \dots, r_1; k_1=0; k_j=p_1+\dots+p_{j-1}. \quad (2.12)$$

В системе (2.12) рассмотрим уравнения при $j=1$. Подставив в

эти уравнения вместо функций $u_{k_1+l}(x, y)$ ($j \geq 2$) их выражения в правой части системы (2.12), получим

$$u_{k_1+l}(x_0, y_0) = - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_l^2}} \int_{l_1(x_0, y_0)}^{p_1} \sum_{k+l} a_{lk}(x, y) u_k(x, y) ds + \\ + \sum_{l=2}^{r_1} \iint_{D_{1l}(x_0, y_0)} \sum_{r=1}^m K_{lr}^l(x, y, \xi, \eta) u_r(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.13)$$

$$i = 1, \dots, p_1.$$

Используя предыдущий результат, систему (2.13) можем разрешить относительно функций $u_1, \dots, u_{p_1}$, в результате получим

$$u_i(x_0, y_0) = \sum_{j=2}^{r_1} \sum_{r=1}^m \iint_{D_{1j}(x_0, y_0)} K_{jr}^1(x, y, \xi, \eta) u_r(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ + \sum_{\alpha=1}^{p_1} \int_{l_1(x_0, y_0)} \gamma_{l\alpha}(x_0, y_0, \xi, \eta) \left(\sum_{j=2}^{r_1} \sum_{r=1}^m \iint_{D_{1j}(\xi, \eta)} K_{jr}^2(\tau, \sigma, \xi, \eta) u_r(\tau, \sigma) d\tau d\sigma \right) ds, \quad (2.14)$$

$$i = 1, \dots, p_1.$$

На основании леммы 2.1 систему интегральных уравнений (2.14) можно переписать в виде

$$u_i(x_0, y_0) = \sum_{j=1}^m \iint_{D_{i,j}(x_0, y_0)} K_{ij}(x_0, y_0, \xi, \eta) u_j(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.15)$$

$$i = 1, \dots, p_1,$$

где $D_{i,j}(x_0, y_0)$ — область, определенная выше.

Очевидно система (2.12) эквивалентна новой системе, у которой первые p_1 уравнений заменены уравнениями (2.15). В этой новой системе аналогичную процедуру сделаем с уравнениями с $j = 2$ и т. д. Через r_1 шагов систему (2.12) приведем к эквивалентной ей системе, имеющую вид (2.6).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.1. Система интегральных уравнений (2.1) при любой правой части класса $C(D + \Gamma)$ имеет решение в классе $C(D + \Gamma)$ и оно единственно.

Имеет место

Лемма 2.3. Оператор $T_{ip} T_{jk}$ (см. (2.2)) переводит пространство $C(D + \Gamma)$ в пространство $C^1(D + \Gamma)$ при всех $i \neq j$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что

$$(T_{ip} \varphi)(x, y) = \int_{\sqrt{1-y^2}}^x a(\tau, y) \varphi(\tau, y) d\tau, \quad (T_{jk} \varphi)(x, y) = \int_{\sqrt{1-x^2}}^y b(x, \eta) \varphi(x, \eta) d\eta.$$

Тогда

$$(T_{lp} T_{jk} \varphi)(x, y) = \int_{\sqrt{1-y^2}}^x a(\tau, y) \left(\int_{\sqrt{1-\tau^2}}^y b(\tau, \eta) \varphi(\tau, \eta) d\eta \right) d\tau. \quad (2.16)$$

Поменяв пределы интегрирования в (2.16), получим

$$\begin{aligned} (T_{lp} T_{jk} \varphi)(x, y) &= \int_y^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_x^{\sqrt{1-\eta^2}} a(\tau, y) b(\tau, \eta) \varphi(\tau, \eta) d\tau \right) d\eta + \\ &+ \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-\eta^2}}^{\sqrt{1-\eta^2}} a(\tau, y) b(\tau, \eta) \varphi(\tau, \eta) d\tau \right) d\eta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из (2.16) и (2.17) следует, что $\frac{\partial}{\partial x}(T_{lp} T_{jk} \varphi)$ и $\frac{\partial}{\partial y}(T_{lp} T_{jk} \varphi)$ существуют и непрерывны в $D + \Gamma$, что и требовалось доказать.

Из результата, полученного в случае одной кратной характеристики, теоремы 2.1 и леммы 2.3 следует

Теорема 2.2. *Граничная задача P при любой $f \in C^1(D + \Gamma)$ имеет решение из класса $C^1(D) \cap C_\alpha(D + \Gamma)$ и оно единственно.*

Если в граничных условиях (1.5) функцию $u_i(x, y)$ мы будем задавать на части Γ_i окружности Γ (мы не требуем дополнительных условий) на Γ_i , которые налагали раньше), то преобразовывая аналогичным образом систему интегральных уравнений (2.1) к виду (2.6), нетрудно убедиться в том, что оператор K в системе (2.6) вполне непрерывен в классе $C_\alpha(D + \Gamma)$. Поэтому однородная граничная задача P имеет конечное число линейно независимых решений.

Для получения необходимых и достаточных условий разрешимости неоднородной задачи P , построим сопряженную граничную задачу к задаче P .

Формально сопряженная система уравнений к системе (1.4) относительно скалярного произведения (1.1) имеет вид

$$L^*v \equiv -v_x + Q_1 v_y - A_1' v = g, \quad (g \in C^1(D + \Gamma), v \in C^1(D) \cap C_\alpha(D + \Gamma)), \quad (2.18)$$

где $A_1'(x, y)$ — обозначает матрицу, транспонированную к матрице $A_1(x, y)$.

Согласно работе [5] введем

Определение 2. Граничное условие

$$Mv = 0 \text{ на } \Gamma \quad (2.19)$$

будем называть сопряженным к граничному условию (1.5) относительно оператора L , где

$$Lu = u_x - Q_1 u_y - A_1 u,$$

если равенство $[Lu, v] = [u, L^*v]$ выполняется для любой вектор-функ-

ции u , удовлетворяющей на Γ условию (1.5), тогда и только тогда, когда на границе Γ вектор-функция v удовлетворяет условию (2.19).

Задачу (2.18), (2.19) мы будем называть сопряженной к задаче P .

Легко видеть, что граничное условие (2.19) имеет вид

$$v_i = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.20)$$

то есть сопряженная граничная задача (2.18), (2.20) есть граничная задача P для гиперболической системы (2.18).

Из определения сопряженной задачи следует, что условия

$$[f, v_i^*] = 0, \quad i = 1, \dots, m_0, \quad (2.21)$$

где вектор-функции $v_1^*, \dots, v_{m_0}^*$ являются полной линейно независимой системой решений однородной сопряженной задачи (2.18), (2.20), необходимы для разрешимости неоднородной задачи P , а условия

$$[g, u_i^*] = 0, \quad i = 1, \dots, m_0, \quad (2.22)$$

где вектор-функции $u_1^*, \dots, u_{m_0}^*$ являются полной линейно независимой системой решений однородной задачи P , необходимы для разрешимости неоднородной задачи (2.18), (2.20).

Отсюда, на основании теоремы 2 работы [6], следует

Теорема 2.3. *Однородная граничная задача P имеет конечно число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи P необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий (2.21).*

Замечание. Аналогичным образом можно показать справедливость теорем 2.2, 2.3 и в случае, когда матрица Q_1 переменная, принадлежащая классу $C_\mu^1(D + \Gamma)$ ($\mu > \alpha$), а область D такова, что каждая характеристика системы (1.4) пересекает ее границу Γ (гладкую) ровно в двух точках.

В случае одной кратной характеристики мы все граничные условия задавали на одной и той же части Γ_1 окружности Γ .

Приведем примеры, показывающие, что если некоторые граничные условия зададим на Γ_1 , а остальные — на $\Gamma \setminus \Gamma_1$, то граничная задача P может оказаться, вообще говоря, не нетеровой. Нетеровость такой задачи сильно зависит от конфигурации области D и коэффициентов системы (1.4).

Пример 1. Рассмотрим следующую однородную граничную задачу:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{\varphi_1^2 - \varphi_2^2} \left[\left(\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} - \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} \right) u_1 + \left(\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} - \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right) u_2 \right], \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{\varphi_1^2 - \varphi_2^2} \left[\left(\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} - \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right) u_1 + \left(\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} - \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} \right) u_2 \right], \quad (2.24)$$

$$u_1 = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad u_2 = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_1, \quad (2.25)$$

где Γ — единичная окружность, Γ_1 — правая полуокружность, а

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \exp(x), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ \exp\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}\right), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \exp(-x), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ -\exp\left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Легко видеть, что вектор-функции $y_1 = (\varphi_1, \varphi_2)$ и $y_2 = (\varphi_2, \varphi_1)$ линейно независимы и удовлетворяют системе (2.23), (2.24). Отсюда [2], общее решение системы (2.23), (2.24) запишется в виде

$$u_1(x, y) = C_1(y) \varphi_1(x) + C_2(y) \varphi_2(x), \quad (2.27)$$

$$u_2(x, y) = C_1(y) \varphi_2(x) + C_2(y) \varphi_1(x), \quad (2.28)$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ — произвольные функции от y , непрерывные на отрезке $[-1, 1]$ и дифференцируемые на $(-1, 1)$.

Подставим общее решение (2.27), (2.28) системы (2.23), (2.24) в граничные условия (2.25), получим

$$C_1(y) \varphi_1(\sqrt{1-y^2}) + C_2(y) \varphi_2(\sqrt{1-y^2}) = 0 \quad (|y| \leq 1), \quad (2.29)$$

$$C_1(y) \varphi_1(-\sqrt{1-y^2}) + C_2(y) \varphi_2(-\sqrt{1-y^2}) = 0 \quad (|y| \leq 1). \quad (2.30)$$

В силу обозначений (2.26), система (2.29), (2.30) на отрезке $|y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ запишется в виде

$$C_1(y) \exp(\sqrt{1-y^2}) + C_2(y) \exp(-\sqrt{1-y^2}) = 0, \quad (2.31)$$

$$C_1(y) \exp(\sqrt{1-y^2}) + C_2(y) \exp(-\sqrt{1-y^2}) = 0. \quad (2.32)$$

Поскольку определитель системы (2.31), (2.32) равен тождественно нулю на отрезке $|y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, то за $C_1(y)$ можно взять любую функцию из $C_0^\infty(-\infty + \infty)$, сосредоточенную на отрезке $|y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $C_2(y)$ определить из (2.31).

Подставим $C_1(y)$ и $C_2(y)$ в (2.27), (2.28). Получим некоторый набор решений однородной задачи (2.23), (2.24), (2.25), среди которых, в силу произвольности $C_1(y)$, есть бесчисленное множество линейно независимых. То есть задача (2.23), (2.24), (2.25) не является нетривиальной.

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = u_2, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 3u_2 - 2u_1, \quad (u_1, u_2 \in C^1(D) \cap C_2(D + \Gamma)). \quad (2.34)$$

Покажем, что граничная задача: найти решение (u_1, u_2) системы (2.33), (2.34), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_1 = \varphi_1 \text{ на } \Gamma_1, \quad u_2 = \varphi_2 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_1, \quad (2.35)$$

где $\varphi_1 \in C^1_a(\Gamma_1)$, $\varphi_2 \in C^1_a(\Gamma \setminus \Gamma_1)$ — заданные функции, является нетривальной.

Действительно, общее решение системы (2.33), (2.34) имеет вид [2]

$$u_1(x, y) = c_1(y) \exp(x) + c_2(y) \exp(2x), \quad (2.36)$$

$$u_2(x, y) = c_1(y) \exp(x) + 2c_2(y) \exp(2x), \quad (2.37)$$

где $c_1(y)$ и $c_2(y)$ — произвольные функции от y , принадлежащие классу $C^1(-1, 1) \cap C_a[-1, 1]$. Подставляя u_1 и u_2 из (2.36), (2.37) в граничные условия (2.35), получим

$$c_1(y) \exp(\sqrt{1-y^2}) + c_2(y) \exp(2\sqrt{1-y^2}) = \varphi_1(\sqrt{1-y^2}, y), \quad (2.38)$$

$$c_1(y) \exp(-\sqrt{1-y^2}) + 2c_2(y) \exp(-2\sqrt{1-y^2}) = \varphi_2(-\sqrt{1-y^2}, y). \quad (2.39)$$

Легко видеть, что нули определителя системы (2.38), (2.39) — простые. Отсюда нетрудно заключить, что однородная задача (2.33), (2.34), (2.35) имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи (2.33), (2.34), (2.35) необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий на правые части.

Пример 3. Пусть граница Γ области D симметрична относительно оси ou и содержит отрезки, параллельные оси ou , скажем отрезки $x = \pm 1, |y| \leq \frac{1}{2}$. Рассмотрим граничную задачу

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = u_2, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\pi^2}{16} u_1, \quad (2.41)$$

$$u_1 = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad u_2 = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_1, \quad (2.42)$$

где Γ_1 — часть границы Γ , лежащая в правой полуплоскости.

Решениями этой задачи являются, например, функции

$$u_1(x, y) = A(y) \sin\left(-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$u_2(x, y) = -A(y) \cdot \frac{\pi}{4} \cos\left(-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}\right),$$

где $A(y) \in C_0^\infty(-\infty, +\infty)$, причем носитель функции $A(y)$ содержится в отрезке $|y| \leq \frac{1}{2}$. Выбирая функции $A(y)$ линейно независимыми, мы получим бесчисленное множество линейно независимых решений однородной задачи (2.40), (2.41), (2.42).

В заключение автор искренне благодарит своего научного руководителя профессора Н.Е. Товмасяна за постановку задачи и ценные обсуждения в ходе выполнения работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 22.VII.1974

Ա. Ա. ԱՆԴՐՅԱՆ. Հիպերբոլական տիպի հավասարումների սիստեմների համար մի հզգային խնդրի մասին (ամփոփում),

Հիպերբոլական տիպի հավասարումների սիստեմների համար սահմանային տիրույթում դրվում է հզգային խնդիր: Այդ խնդիրը լինում է կոռեկտ կամ ֆրեդհոլմի տիպի, նայած տիրույթի հզրի որ մասերի վրա են տրվում հզգային պայմանները:

A. A. ANDRIAN. *A boundary value problem for the systems of hyperbolic type (summary)*

Let

$$u_x - Q_1 u = A_1 u + f \quad (1)$$

be a system of the hyperbolic type, Γ_i — be parts of unit circle Γ (the choice of Γ_i depends on the characteristics of the system [1]).

Whether the boundary value problem

$$u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

or [1] happens to be correct or Fredholm type depends on the choice of Γ_i .

When the problem [1], [2] is correct, the solution may be obtained by successive iterations approach.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Джурев. Системы уравнений составного типа, М., 1972.
2. И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1970.
3. Р. Курант. Уравнения с частными производными, М., 1964.
4. И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными, М., 1961.
5. Н. Е. Товмасян. Общая краевая задача для эллиптических систем уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, 2, № 1, 1965, 3—23.
6. Н. Е. Товмасян. Некоторые уравнения в банаховых пространствах и их применения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 3, 1973, 181—189.