ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 4, 1975 Математика

И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается задача определения меридиана оболочки вращения, мало отличающаяся по форме от цилиндрической, если известен спектр частот ее осесимметрических колебаний. Применяется метод малого параметра (см. [1] и [3]).

Если в качестве оси абсцисс взять ось вращения, то осесимметрические колебания оболочки вращения описываются следующими уравнениями:

$$-\frac{1}{A}\frac{d}{dx}\frac{1}{AB}\frac{d}{dx}Bu-\frac{1-\sigma}{R_1R_2}u+\frac{1}{A}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right]w'+$$
$$+\frac{1}{A}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]'w=\lambda u,$$
$$-\frac{1}{A}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right]u'-\frac{1}{A}\left[\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]\frac{B'}{B}u+\mu\left[\frac{1}{AB}\frac{d}{dx}\frac{B}{A}\frac{d}{dx}\right]^2w+$$
$$+\left[\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right]w=\lambda w. \tag{1}$$

Здесь $B(x)$ — ордината точки меридиана, $A(x)=\sqrt{1+B'^2}$, $R_1^{-1}(x)$ и $R_2^{-1}(x)$ — главные кривизны оболочки:

$$\frac{1}{R_1}=-\frac{B''}{(1+B'^2)^{3/2}},\quad \frac{1}{R_2}=\frac{1}{B\sqrt{1+B'^2}},$$

$u(x)$ и $w(x)$ — перемещения, λ — параметр частоты, $|\sigma|<\frac{1}{2}$ — коэффициент Пуассона, $\mu=\frac{h^2}{12}$, где h — толщина оболочки. Пусть $0\leqslant x\leqslant\pi$, и краевые условия задачи имеют вид

$$u'(0)=u'(\pi)=w(0)=w(\pi)=w''(0)=w''(\pi)=0. \tag{2}$$

Одновременно будем рассматривать также следующие краевые условия:

$$u'(0)=u(\pi)=w(0)=w'(\pi)=w''(0)=w'''(\pi)=0. \tag{3}$$

Предположим, что функция $B(x,\varepsilon)$ аналитически зависит от параметра ε в некотором интервале $-\delta<\varepsilon<\delta$, и ее разложение в ряд по степеням ε имеет вид

$$B(x, \varepsilon) = B_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j B_j(x),$$

где B_0 — положительная постоянная. Будем предполагать, что этот ряд можно четыре раза почленно дифференцировать по x.

Спектры задач (1), (2) и (1), (3) дискретны и собственные значения $\lambda_s(\varepsilon)$, $s=0, 1, 2, \cdots$, аналитически зависят от ε. При $\varepsilon = 0$ система уравнений (1) сводится к системе уравнений колебания круговой цилиндрической оболочки радиуса B_0

$$\begin{gathered} -u'' + \frac{\sigma}{B_0} w' = \lambda u, \\ -\frac{\sigma}{B_0} u' + \mu w^{\mathrm{IV}} + \frac{1}{B_0^2} w = \lambda w. \end{gathered} \tag{4}$$

Число B_0 предполагается таким, что спектры задач (4), (2) и (4), (3) были простыми.

Настоящая статья посвящена доказательству следующих теорем:

Теорема 1. *Если функция* $B(x, \varepsilon)$ *удовлетворяет условию* $B(x, \varepsilon) = B(\pi - x, \varepsilon)$, *то она спектром задачи* (1), (2) *определяется однозначно.*

Теорема 2. *Функция* $B(x, \varepsilon)$ *спектрами задач* (1), (2) и (1), (3) *определяется однозначно.*

В доказательстве этих теорем описывается также процесс нахождения коэффициентов $B_j(x)$ разложения $B(x, \varepsilon)$ в ряд по степеням ε. Укажем еще, что, как можно показать примером, заданием конечного числа частот $\lambda_s(\varepsilon)$ функция $B(x, \varepsilon)$ не определяется (см. по этому поводу [2]).

§ 1. Доказательство теоремы 1

Задача (4), (2) — самосопряженная, ее спектр состоит из двух последовательностей собственных значений λ_{00}, $\lambda_{k_0}^-$ и $\lambda_{k_0}^+$, $k=1, 2, 3, \cdots$

$$\lambda_{00} = 0, \ \lambda_{k_0}^{\pm} = \frac{1}{2}\left[\mu k^4 + k^2 + \frac{1}{B_0^2} \pm \sqrt{\left(\mu k^4 - k^2 + \frac{1}{B_0^2}\right)^2 + \frac{4\sigma^2}{B_0^2} k^2}\right], \tag{5}$$

которым соответствуют собственные вектор-функции

$$\begin{pmatrix} u_{00}(x) \\ w_{00}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} u_{k_0}^{\pm}(x) \\ w_{k_0}^{\pm}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kx \\ \dfrac{B_0}{\sigma} \dfrac{1}{k} (\lambda_{k_0}^{\pm} - k^2) \sin kx \end{pmatrix}. \tag{6}$$

При $k \to \infty$ числа $\lambda_{k_0}^-$ и $\lambda_{k_0}^+$ имеют следующую асимптотику:

$$\lambda_{k_0}^- = k^2 - \frac{\sigma^2}{\mu B_0^2} \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \ \lambda_{k_0}^+ = \mu k^4 + \frac{1}{B_0^2} + \frac{\sigma^2}{\mu B_0^2} \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{7}$$

Отметим, что, зная любое из собственных значений (5) (кроме λ_{00}) и его номер, можно однозначно определить число B_0.

Задача (1), (2) является самосопряженной с весом AB, ее спектр состоит из двух последовательностей собственных значений $\lambda_0(\varepsilon)$, $\lambda_k^-(\varepsilon)$ и $\lambda_k^+(\varepsilon)$, $k=1, 2, 3,\cdots$. Пусть

$$\lambda_0(\varepsilon)=\lambda_{00}+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\lambda_{0j},\quad \lambda_k^{\pm}(\varepsilon)=\lambda_{k_0}^{\pm}+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\lambda_{kj}^{\pm},$$

$$u_0(x,\varepsilon)=u_{00}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j u_{0j}(x),\quad u_k^{\pm}(x,\varepsilon)=u_{k_0}^{\pm}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j u_{kj}^{\pm}(x),$$

$$w_0(x,\varepsilon)=w_{00}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j w_{0j}(x),\quad w_k^{\pm}(x,\varepsilon)=w_{k_0}^{\pm}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j w_{kj}^{\pm}(x)$$

являются разложениями собственных значений и собственных вектор-функций задачи (1), (2).

Для удобства в дальнейшем запись верхних индексов $(\pm)$ будем сохранять только тогда, когда это необходимо.

С учетом сделанных выше обозначений имеем

$$-\dot{u}_k-\lambda_{k_0}u_k+\frac{\sigma}{B_0}w_k'=F_k^{(1)}(x,\varepsilon),$$

$$-\frac{\sigma}{B_0}u_k'+\mu w_k^{\mathrm{IV}}+\left(\frac{1}{B_0^2}-\lambda_{k0}\right)w_k=F_k^{(2)}(x,\varepsilon), \tag{8}$$

где

$$F_k^{(1)}(x,\varepsilon)=-\dot{u}_k+\frac{1}{A}\frac{d}{dx}\frac{1}{AB}\frac{d}{dx}Bu_k+\left[\frac{1-\sigma}{R_1R_2}+(\lambda_k-\lambda_{k0})\right]u_k-$$

$$-\left[\frac{1}{A}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)-\frac{\sigma}{B_0}\right]w_k'-\frac{1}{A}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]'w_k,$$

$$F_k^{(2)}(x,\varepsilon)=\left[\frac{1}{A}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)-\frac{\sigma}{B_0}\right]u_k'+\frac{1}{A}\left[\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]\frac{B'}{B}u_k+\mu w_k^{\mathrm{IV}}-$$

$$-\mu\left[\frac{1}{AB}\frac{d}{dx}\frac{B}{A}\frac{d}{dx}\right]^2w_k-\left[\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{B_0^2}-(\lambda_k-\lambda_{k0})\right]w_k.$$

Так как задача (4), (2) самосопряженная, то должно выполняться следующее условие совместности:

$$\int_0^{\pi}\left[u_{k0}(x)F_k^{(1)}(x,\varepsilon)+w_{k0}(x)F_k^{(2)}(x,\varepsilon)\right]dx=0, \tag{9}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

Применяя к системе уравнений (8) метод вариации произвольных постоянных, получим

$$u_k(x, \varepsilon) = u_{k0}(x) + \int_0^\pi \omega_k^{(1)}(x, t)\, F_k^{(1)}(t, \varepsilon)\, dt + \int_0^\pi \omega_k^{(2)}(x, t)\, F_k^{(2)}(t, \varepsilon)\, dt,$$

$$w_k(x, \varepsilon) = w_{k0}(x) + \int_0^\pi \omega_k^{(3)}(x, t)\, F_k^{(1)}(t, \varepsilon)\, dt + \int_0^\pi \omega_k^{(4)}(x, t)\, F_k^{(2)}(t, \varepsilon)\, dt,$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{10}$$

При $k \geqslant 1$ функции $\omega_k^{(\nu)}(x, t)$, $\nu = 1, 2, 3, 4$, определяются следующим образом: при $t \leqslant x$

$$\omega_k^{(1)}(x, t) = \frac{\sigma^2}{\mu B_0^2} \frac{1}{p_k^2 - q_k^2} \left[-\frac{k(p_k^2 - q_k^2)}{(\lambda_{k0} - k^2)(p_k^2 + k^2)(q_k^2 + k^2)} \cos kx \sin kt + \right.$$

$$+ \frac{p_k}{(\lambda_{k0} + p_k^2)(p_k^2 + k^2)} \frac{\operatorname{ch} p_k t \operatorname{ch} p_k(\pi - x)}{\operatorname{sh} p_k \pi} - \frac{q_k}{(\lambda_{k0} + q_k^2)(q_k^2 + k^2)} \times$$

$$\left. \times \frac{\operatorname{ch} q_k t \operatorname{ch} q_k(\pi - x)}{\operatorname{sh} q_k \pi} \right],$$

$$\omega_k^{(2)}(x, t) = \frac{\sigma}{\mu B_0} \frac{1}{p_k^2 - q_k^2} \left[\frac{p_k^2 - q_k^2}{(p_k^2 + k^2)(q_k^2 + k^2)} \cos kx \cos kt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p_k^2 + k^2} \frac{\operatorname{sh} p_k t \operatorname{ch} p_k(\pi - x)}{\operatorname{sh} p_k \pi} - \frac{1}{q_k^2 + k^2} \frac{\operatorname{sh} q_k t \operatorname{ch} q_k(\pi - x)}{\operatorname{sh} q_k \pi} \right],$$

$$\omega_k^{(3)}(x, t) = \frac{\sigma}{\mu B_0} \frac{1}{p_k^2 - q_k^2} \left[-\frac{p_k^2 - q_k^2}{(p_k^2 + k^2)(q_k^2 + k^2)} \sin kx \sin kt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{p_k^2 + k^2} \frac{\operatorname{ch} p_k t \operatorname{sh} p_k(\pi - x)}{\operatorname{sh} p_k \pi} + \frac{1}{q_k^2 + k^2} \frac{\operatorname{ch} q_k t \operatorname{sh} q_k(\pi - x)}{\operatorname{sh} q_k \pi} \right],$$

$$\omega_k^{(4)}(x, t) = \frac{1}{\mu} \frac{1}{p_k^2 - q_k^2} \left[\frac{(\lambda_{k0} - k^2)(p_k^2 - q_k^2)}{k(q_k^2 + k^2)(q_k^2 + k^2)} \sin kx \cos kt - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_{k0} + p_k^2}{p_k(p_k^2 + k^2)} \frac{\operatorname{sh} p_k t \operatorname{sh} p_k(\pi - x)}{\operatorname{sh} p_k \pi} + \frac{\lambda_{k0} + q_k^2}{q_k(q_k^2 + k^2)} \frac{\operatorname{sh} q_k t \operatorname{sh} q_k(\pi - x)}{\operatorname{sh} q_k \pi} \right],$$

где

$$p_k^2 = -\frac{1}{2} \left[\lambda_{k0} - k^2 + \sqrt{(\lambda_{k0} - k^2)^2 + \frac{4}{\mu} \frac{\lambda_{k0}}{k^2} \left(\lambda_{k0} - \frac{1}{B_0^2} \right)} \right],$$

$$q_k^2 = -\frac{1}{2} \left[\lambda_{k0} - k^2 - \sqrt{(\lambda_{k0} - k^2)^2 + \frac{4}{\mu} \frac{\lambda_{k0}}{k^2} \left(\lambda_{k0} - \frac{1}{B_0^2} \right)} \right],$$

а при $x < t$

$$\omega_k^{(1)}(x, t) = \omega_k^{(1)}(t, x), \quad \omega_k^{(2)}(x, t) = \omega_k^{(3)}(t, x), \quad \omega_k^{(3)}(x, t) = \omega_k^{(2)}(t, x),$$

$$\omega_k^{(4)}(x, t) = \omega_k^{(4)}(t, x).$$

Функцию $\omega_0^{(\nu)}(x, t)$ можно получить из $\omega_k^{(\nu)-}(x, t)$ формальным предельным переходом, когда $k \to 0$.

Нетрудно убедиться, что разложения функций $F_k^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $F_k^{(2)}(x, \varepsilon)$ по степеням параметра ε имеют следующую структуру:

$$F_k^{(1)}(x, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \left[\psi_{kj}^{(1)}(x) + \Phi_{kj}^{(1)}(x)\right],$$

$$F_k^{(2)}(x, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \left[\psi_{kj}^{(2)}(x) + \Phi_{kj}^{(2)}(x)\right], \tag{11}$$

где

$$\psi_{kj}^{(1)}(x) = \frac{B_j'}{B_0} u_{k0}' + \left[\sigma \frac{B_j''}{B_0} + \lambda_{kj}\right] u_{k0} + \left[B_j'' + \sigma \frac{B_j}{B_0^2}\right] w_{k0}' +$$
$$+ \left[B_j''' + \frac{B_j'}{B_0^2}\right] w_{k0}, \tag{12}$$

$$\psi_{kj}^{(2)}(x) = -\left[B_j'' + \sigma \frac{B_j}{B_0^2}\right] u_{k0}' + \frac{B_j'}{B_0^2} u_{k0} - 2\mu \frac{B_j'}{B_0} w_{k0}''' - 2\mu \frac{B_j''}{B_0} w_{k0}'' -$$
$$- \mu \frac{B_j'''}{B_0} w_{k0}' + \left[2\sigma \frac{B_j''}{B_0} + 2 \frac{B_j}{B_0^3} + \lambda_{kj}\right] w_{k0},$$

$\Phi_{k1}^{(1)}(x) \equiv 0$, $\Phi_{k1}^{(2)}(x) \equiv 0$, а в выражения функций $\Phi_{kj}^{(1)}(x)$ и $\Phi_{kj}^{(2)}(x)$, при $j \geqslant 2$, входят функции $B_n^{(s)}(x)$, $w_{kn}^{(s)}(x)$, $u_{kn}^{(r)}(x)$, $(s = 0, 1, 2, 3, 4,$ $r = 0, 1, 2)$ и числа λ_{kn} с $n \leqslant j-1$.

В силу (11), формулу (9) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \left\{ \int_0^{\pi} \left[u_{k0}(x)\, \psi_{kj}^{(1)}(x) + w_{k0}(x)\, \psi_{kj}^{(2)}(x)\right] dx + \int_0^{\pi} \left[u_{k0}(x)\, \Phi_{kj}^{(1)}(x) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + w_{k0}(x)\, \Phi_{kj}^{(2)}(x)\right] dx \right\} = 0,$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots.$$

В этой формуле, приравнивая нулю коэффициент при ε^j, и имея в виду формулы (6) и (12), получим

$$B_j'(\pi) - B_j'(0) = -\pi \frac{B_0}{\sigma} \lambda_{0j} - \frac{B_0}{\sigma} \int_0^{\pi} \Phi_{0j}^{(1)}(x)\, dx, \quad j = 1, 2, 3, \cdots, \tag{13}$$

$$a_k \int_0^{\pi} \cos 2kx\, B_j(x)\, dx = b_k \lambda_{kj} + c_k \left[B_j'(\pi) - B_j'(0)\right] + d_k \int_0^{\pi} B_j(x)\, dx + E_{kj},$$
$$k, j = 1, 2, 3, \cdots, \tag{14}$$

где

$$a_k = -\frac{1-2\sigma}{B_0} k^2 + \frac{2}{\sigma B_0}(\lambda_{k0} - k^2) - \frac{4B_0}{\sigma}\lambda_{k0}(\lambda_{k0} - k^2) +$$

$$+\frac{1}{\sigma^2 B_0} \cdot \frac{1}{k^2}(\lambda_{k0} - k^2)^2 + \frac{2\mu B_0}{\sigma^2} k^2 (\lambda_{k0} - k^2)^2,$$

$$b_k = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{B_0^2}{\sigma^2 k^2}(\lambda_{k0} - k^2)^2\right],$$

$$c_k = \frac{\sigma}{B_0} + \frac{\mu B_0}{\sigma^2}(\lambda_{k0} - k^2)^2,$$

$$d_k = \frac{1}{B_0}(\lambda_{k0} - k^2)\left[1 + \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{k^2}(\lambda_{k0} - k^2)\right],$$

$$E_{kj} = \int_0^\pi \left[\cos kx\, \Phi_{kj}^{(1)}(x) + \frac{B_0}{\sigma}\frac{1}{k}(\lambda_{k0} - k^2)\sin kx\, \Phi_{kj}^{(2)}(x)\right] dx.$$

Если учесть опущенные индексы $(\pm)$, то формула (14) на самом деле представляет собой две формулы (14^+) и (14^-). Важно отметить, что числа a_k^+ и a_k^- одновременно не обращаются в нуль: $|a_k^+| + |a_k^-| \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \cdots$. Обозначим $M = \{k;\, a_k^+ d_k^- - a_k^- d_k^+ = 0\}$. Множество M может содержать не более двух элементов, так как $a_k^+ d_k^- - a_k^- d_k^+ = 0$ эквивалентно относительно k^2 уравнению второго порядка. Взяв $k \overline{\in} M$, из формул (14^+) и (14^-) получим

$$\int_0^\pi B_j(x)\,dx = \frac{1}{a_k^+ d_k^- - a_k^- d_k^+}\{(a_k^- b_k^+ \lambda_{kj}^+ - a_k^+ b_k^- \lambda_{kj}^-) +$$

$$+ (a_k^- c_k^+ - a_k^+ c_k^-)[B_j'(\pi) - B_j'(0)] + (a_k^- E_{kj}^+ - a_k^+ E_{kj}^-)\}. \qquad (15)$$

$$j = 1, 2, 3, \cdots.$$

Теперь опишем процесс нахождения функций $B_j(x)$, $j = 1, 2, 3, \cdots$. При $j = 1$ из формулы (13) находим число $[B_1'(\pi) - B_1'(0)]$, затем из формул (15) и (14) -- интегралы

$$\int_0^\pi \cos 2kx\, B_1(x)\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Но значениями этих интегралов, в силу условия теоремы, однозначно определяется функция $B_1(x)$. Когда $B_1(x)$ уже известна, из формул (10) находим функции $u_{k1}(x)$ и $w_{k1}(x)$. После этого становятся известными как функции $\Phi_{k2}^{(1)}(x)$, $\Phi_{k2}^{(2)}(x)$, так и числа E_{k2}. Далее из формул (13), (15), (14) при $j = 2$ найдем функцию $B_2(x)$. Продолжая этот процесс, найдем все функции $B_j(x)$, $j = 1, 2, 3, \cdots$, т. е. функцию $B(x, \varepsilon)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Как уточнение теоремы 1 отметим, что для определения функции $B(x, \varepsilon)$ не обязательно использовать весь спектр задачи (1), (2). Прежде всего покажем, что можно обойтись без собственного значения $\lambda_0(\varepsilon)$. Действительно, интегрируя левую часть формулы (14) два раза по частям, получим

$$B_j'(\pi) - B_j'(0) = \frac{1}{\frac{a_k}{4k^2} - c_k}\left[b_k \lambda_{kj} + E_{kj} + d_k \int_0^\pi B_j(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \frac{a_k}{4k^3}\int_0^\pi \cos 2kx\, B_j''(x)\,dx \right].$$

В этой формуле переходя к пределу, когда $k \to \infty$ и учитывая (7), а также выражения чисел a_k, b_k, c_k, d_k, получим

$$B_j'(\pi) - B_j'(0) = -\pi \frac{2B_0}{1+2\sigma} \lim_{k\to\infty} \left[\lambda_{kj}^- + \frac{1}{b_k^-} E_{kj}^- \right] =$$

$$= -\pi \frac{B_0}{\mu} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2}\left[\lambda_{kj}^+ + \frac{1}{b_k^+} E_{kj}^+ \right], \qquad (16)$$

$$j = 1, 2, 3, \cdots,$$

после чего вместо формулы (13) можно использовать формулу (16). Обозначим $N^- = \{k;\ a_k^- = 0\}$ и $N^+ = \{k;\ a_k^+ = 0\}$. Множество $N^- \cup N^+$ может содержать не более шести элементов. При $k > 1$, кроме некоторого значения $k = k_0$, $k_0 \in M$, из собственных значений $\lambda_k^-(\varepsilon)$ и $\lambda_k^+(\varepsilon)$ можно использовать только одно: при $k \in N^-$ используется $\lambda_k^+(\varepsilon)$, а при $k \in N^+ - \lambda_k^-(\varepsilon)$.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим задачу (1), (3). Обозначения в этом случае оставим те же, что в § 1, добавляя всюду значок ($\wedge$). Чтобы не повторять рассуждений, сделанных в § 1, приведем здесь только некоторые формулы. Собственными значениями и собственными вектор-функциями задачи (4), (3) являются

$$\hat{\lambda}_{k0}^{\pm} = \frac{1}{2}\left\{ \mu\left(k - \frac{1}{2}\right)^4 + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{B_0^2} \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left[\mu\left(k - \frac{1}{2}\right)^4 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{B_0^2}\right]^2 + \frac{4\sigma^2}{B_0^2}\left(k - \frac{1}{2}\right)^2} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{k0}^{\pm}(x) \\ \hat{w}_{k0}^{\pm}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x \\ \frac{B_0}{\sigma}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}\left[\hat{\lambda}_{k0}^{\pm}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x \end{pmatrix},$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\cdots.$$

Для нахождения функций $\hat{u}_{kj}(x)$ и $\hat{w}_{kj}(x)$ получаем формулы

$$\hat{u}_k(x,\ \varepsilon)=\hat{u}_{k0}(x)+\int_0^\pi \hat{\omega}_k^{(1)}(x,t)\hat{F}_k^{(1)}(t,\ \varepsilon)\,dt+\int_0^\pi \hat{\omega}_k^{(2)}(x,\ t)\hat{F}_k^{(2)}(t,\ \varepsilon)\,dt,$$

$$\hat{w}_k(x,\ \varepsilon)=\hat{w}_{k0}(x)+\int_0^\pi \hat{\omega}_k^{(3)}(x,\ t)\hat{F}_k^{(1)}(t,\ \varepsilon)\,dt+\int_0^\pi \hat{\omega}_k^{(4)}(x,\ t)\hat{F}_k^{(2)}(t,\ \varepsilon)\,dt,$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\cdots. \tag{17}$$

Функцию $\hat{\omega}_k^{(\nu)}(x,\ t)$ можно получить из $\omega_k^{(\nu)}(x,\ t)$, если в выражение последней вместо k, λ_{k0}, p_k, q_k, $\operatorname{sh}p_k\pi$, $\operatorname{sh}q_k\pi$, $\operatorname{sh}p_k(\pi-x)$, $\operatorname{sh}q_k(\pi-x)$, $\operatorname{ch}p_k(\pi-x)$, $\operatorname{ch}q_k(\pi-x)$ подставить соответственно

$$k-\frac{1}{2},\ \hat{\lambda}_{k0},\ \hat{p}_k,\ \hat{q}_k,\ \operatorname{ch}\hat{p}_k\pi,\ \operatorname{ch}\hat{q}_k\pi,\ \operatorname{ch}\hat{p}_k(\pi-x),\ \ \operatorname{ch}\hat{q}_k(\pi-x),$$

$$\operatorname{sh}\hat{p}_k(\pi-x),\ \ \operatorname{sh}\hat{q}_k(\pi-x),$$

где числа $\hat{p}_k$ и $\hat{q}_k$ определяются по аналогии с p_k и q_k.

Формула (14) в этом случае заменяется следующей

$$\hat{a}_k\int_0^\pi \cos(2k-1)x\,B_j(x)\,dx=\hat{b}_k\hat{\lambda}_{kj}+c_k'\left[B_j'(\pi)+B_j'(0)\right]+$$

$$+c_k''\left[B_j'(\pi)-B_j'(0)\right]+\hat{d}_k\int_0^\pi B_j(x)\,dx+\hat{E}_{kj}, \tag{18}$$

$$k,\ j=1,\ 2,\ 3,\cdots,$$

где

$$c_k'=-\frac{\sigma}{2B_0}+\frac{B_0}{\sigma}\frac{\hat{\lambda}_{k0}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}\left[\hat{\lambda}_{k0}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right],$$

$$c_k''=\frac{\sigma}{2B_0}+\frac{B_0}{\sigma}\frac{\hat{\lambda}_{k0}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}\left[\hat{\lambda}_{k0}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{\mu B_0}{\sigma^2}\left[\hat{\lambda}_{k0}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2,$$

а числа $\hat{a}_k$, $\hat{b}_k$, $\hat{d}_k$ получаются из выражения для чисел a_k, b_k, d_k, если вместо k и λ_{k0} подставить соответственно $k-\frac{1}{2}$ и $\hat{\lambda}_{k0}$. Здесь тоже $|\hat{a}_k^+|+|\hat{a}_k^-|\neq 0$, $k=1, 2, 3, \cdots$. Для нахождения чисел $[B_j'(\pi)+B_j'(0)]$ получаем формулу

$$B_j'(\pi)+B_j'(0)=2\sigma\,[B_j'(\pi)-B_j'(0)]+2\pi B_0 \lim_{k\to\infty}\left[\hat{\lambda}_{kj}^-+\frac{1}{\hat{b}_k^-}\hat{E}_{kj}^-\right]=$$

$$=-2\,[B_j'(\pi)-B_j'(0)]-\pi\frac{B_0}{\mu}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}\left[\hat{\lambda}_{kj}^++\frac{1}{\hat{b}_k^+}\hat{E}_{kj}^+\right], \tag{19}$$

$$j=1, 2, 3, \cdots.$$

Определение функций $B_j(x)$ осуществляется с помощью формул (13), (15), (19), (14), (18), (10), (17). В этом случае используется тот факт, что значениями интегралов

$$\int_0^\pi \cos kx\, B_j(x)\, dx, \quad k=0, 1, 2, \cdots,$$

функция $B_j(x)$ определяется однозначно. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Замечание 1 остается в силе и в этом случае. Что касается спектра задачи (1), (3), то из собственных значений $\hat{\lambda}_k^-(\varepsilon)$ и $\hat{\lambda}_k^+(\varepsilon)$ можно использовать только одно, причем, если множества $\hat{N}^-$ и $\hat{N}^+$ определены по аналогии с N^- и N^+, то при $k\in\hat{N}^-$ используется $\hat{\lambda}_k^+(\varepsilon)$, а при $k\in\hat{N}^+$ — $\hat{\lambda}_k^-(\varepsilon)$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить признательность моему научному руководителю профессору В. Б. Лидскому за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Институт проблем механики
АН СССР
Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 3.IX.1974

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Թաղանթների տեսության մի հակադարձ խնդրի մասին *(ամփոփում)*

Քննարկվում է պտտման թաղանթի միջօրեականի որոշման հարցը, եթե հայտնի է թաղանթի առանցքասիմետրիկ տատանումների հաճախականությունների սպեկտրը։ Հոդվածում ապացուցվում է, որ որոշ ենթադրությունների դեպքում միջօրեականը տարբեր եզրային պայմաններին համապատասխանող երկու սպեկտրի միջոցով որոշվում է միակ ձևով։ Մի ուրիշ ենթադրությունների դեպքում այն որոշվում է մեկ սպեկտրի միջոցով։

I. G. KHACHATRIAN. *On a converse problem in the theory of shells* (summary)

The paper consideres the problem of finding the meridian of a shell of rotation when the frequency spectrum of its axissymmetrical oscillations is assumed to be known. It is proved that under some assumptions the meridian is reconstructed uniquely from two spectra, corresponding to different boundary conditions.

However sometimes the knowledge of one spectrum suffices for the purpose.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Я. Айнола.* К обратной задаче о собственных колебаниях упругих оболочек, ПММ, 1971, 35, вып. 2, 358—364.
2. *М. Л. Гервер, Д. А. Каждан.* О нахождении функции $\rho(x)$ по собственному числу $s = s(p)$ уравнения $y'' + [p\rho(x) - s]\, y = 0$, Мат. сб. 73, вып. 2, 1967, 227—235.
3. *F. J. Niordson.* A method for solving inverse eingenvalue problems, Recent Progress in Applied Mechanics, The Folk Odquist Volume, Stockholm, 1967, 373—382.